T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MORREY-TİP UZAYLARDA YAKLAŞIM TEORİSİNİN BAZI PROBLEMLERİ

ŞEYMA ÇETİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
DOÇ. DR. YUSUF ZEREN

İSTANBUL, 2016

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında; Morrey-Lebesgue, Morrey-Hardy ve Morrey-Smirnov uzayları incelenmiş ve bu uzaylarda Poisson Çekirdeği, Singüler Operatörün sınırlılığı ve konvolüsyonlar araştırılmıştır.

Tez çalışmam süresince bana destek olan ve araştırma imkanı sağlayan sayın Doç. Dr. Yusuf ZEREN (Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'e teşekkürlerimi sunarım.

Aralık, 2016

Şeyma ÇETİN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ vi

ÖZET vii

ABSTRACT viii

BÖLÜM 1 1

GİRİŞ 1

1.1 Literatür Özeti 1
1.2 Tezin Amacı 3
1.3 Hipotez 3

BÖLÜM 2 4

TEMEL TANIM VE TEOREMLER 4

2.1 Temel Kavramlar 4
2.2 Poisson İntegrali 9
2.3 Hardy-Littlewood Maximal Fonksiyonu 14
2.4 Teğet Olmayan Maksimal Fonksiyon ve Fatou Teoremi 16
2.5 H^p Uzayları 17

BÖLÜM 3 22

MORREY-TİP UZAYLAR 22

3.1 Morrey-Lebesgue Uzayları 22
3.2 Morrey-Hardy Uzayları 24
3.3 Morrey-Smirnov Uzayları 26

BÖLÜM 4 27

MORREY-TİP UZAYLARDA KONVOLÜSYONLAR 27

4.1 Minkowski İntegral Eşitsizliği 27
4.2 Konvolüsyonlar ile Yaklaşım 28

BÖLÜM 5 34

MORREY-LEBESGUE TİP UZAYLARDA İKİ BAZ ARASI İZOMORFİZM 34

5.1 Tanım ve Teoremler 34
5.2 İzomorfizm Teoremleri 39

BÖLÜM 6 46

SONUÇ VE ÖNERİLER 46

KAYNAKLAR 47

ÖZGEÇMİŞ 49

SİMGE LİSTESİ

N	Doğal Sayılar Kümesi
Z_+	$\{0\} \cup N$
R	Reel Sayılar Kümesi
Ω	Herhangi Bir Küme
$\mathfrak{M}$	Sigma Cebir
μ	Ölçüm Fonksiyonu
$L(X,Y)$	Sınırlı Lineer Operatörler Uzayı
Γ	Rektifiye Jordan eğrisi
γ	Birim Çember
ω	Birim Çemberin İç Bölgesi
H	Üst Yarı Düzlem
Mf	Hardy-Littlewood Maximal Fonksiyonu
L^p	Lebesgue Uzayı
$L^{p,\alpha}$	Morrey-Lebesgue Uzayı
$h^{p,\alpha}$	Harmonik Fonksiyonların Morrey-tip Sınıfı
$H_+^{p,\alpha}$	Morrey-Hardy Uzayı
$E^{p,\alpha}$	Morrey-Smirnov Uzayı
$\|I\|$	I aralığının Lebesgue Ölçüsü
u^+	u Harmonik Fonksiyonunun Sınır Değeri
P_r	Poisson Çekirdeği
S	Singüler Operatör
Mf	Maksimal Fonksiyon

ÖZET

MORREY-TİP UZAYLARDA YAKLAŞIM TEORİSİNİN BAZI PROBLEMLERİ

Şeyma ÇETİN

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Yusuf ZEREN

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde literatür özeti, tezin amacı ve hipotez ifade edilmiştir. İkinci bölümde temel tanım ve teoremler verilmiş, üçüncü bölümde Morrey-tip uzaylar tanıtılmış, dördüncü bölümde Poisson İntegrali, Minkowski eşitsizliği ve konvolüsyonlar incelenmiş, beşinci bölümde Morrey-Lebesgue uzaylarında üslü sistemler arası izomorfizm anlatılmış, altıncı bölümde ise sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Morrey-tip uzaylar, Poisson Çekirdeği, Singüler Operatör, Minkowski Eşitsizliği, Üslü Sistemler, İzomorfizm

ABSTRACT

SOME APPROXIMATION PROBLEMS IN MORREY-TYPE SPACES

Şeyma ÇETİN

Department of Mathematics
MSc. Thesis

Adviser: Assoc. Dr. Yusuf ZEREN

This thesis involves six chapters.

The first chapter is summary of the literature, aim and hypothesis of the thesis. The second chapter consists of main definitions and theorems. In the third chapter Morrey-type spaces are introduced. In the fourth chapter Poisson Integral, Minkowski Inequality and convolutions are examined. In the fifth chapter isomorphism of exponent systems in Morrey-type spaces is explained. The sixth chapter includes conclusions and recommendations.

Key words: Morrey-type Spaces, Poisson Integral, Singular Operator, Minkowski's Inequalty, Systems of exponent, Isomorphism

BÖLÜM1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Morrey uzayı kavramı ilk olarak C. Morrey tarafından [1] 1938 yılında eliptik tip denklemlerin çözümlerinin niteliksel özelliklerinin çalışmasında tanıtılmıştır. Yapılan çalışmalarda Morrey-tip uzaylarda diferensiyel denklemler, potansiyel teori, yaklaşım teorisi, maksimal ve singüler operatörler teorisi kavramlarının birçok problemi araştırılmıştır.

$0 \le \alpha \le 1,\ p \ge 1$ için $L^{p,\alpha}(\Gamma)$ Morrey-Lebesgue uzayında bir $f(\xi)$ ölçülebilir fonksiyonun normu

$$\|f\|_{L^{p,\alpha}(\Gamma)} = \left\{ \sup_{B} |B \cap \Gamma|_{\Gamma}^{\alpha-1} \int_{B\cap\Gamma} |f(\xi)|^p |d\xi| \right\}^{1/p} < +\infty \tag{1.1}$$

ile ifade edilir.

$\alpha = 1$ olması durumunda f fonksiyonun-un L_p Lebesgue uzayındaki normu elde edilir.

$\Omega \subset R^n$ herhangi bir küme ve $1 \le p < +\infty$ için $L_p(\Omega)$ Lebesgue uzayı

$$L_p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to R, f \text{ ölçü}lebilir : \int_{\Omega} |f(t)|^p dt < +\infty \right\} \tag{1.2}$$

ile tanımlanır[2].

T_δ shift operatörü olmak üzere $L^{p,\alpha}$ uzayında sürekli ötelemeye sahip fonksiyonların oluşturduğu uzay

$$\tilde{L}^{p,\alpha}(\Gamma) = \{ f \in L^{p,\alpha} : \|T_\delta f - f\|_{L^{p,\alpha}} \to 0, \delta \to 0 \} \tag{1.3}$$

ile tanımlıdır. $\tilde{L}^{p,\alpha}$, $L^{p,\alpha}$ uzayının altuzayıdır ve kapanışı $\bar{L}^{p,\alpha}$ ile gösterilir.

$L^{p,\alpha}$ uzayında yaklaşım teorisi kavramı özellikle [3;4;5;6] çalışmalarında kendine yer bulmuştur.

R reel sayılar kümesi üzerinde lokal integrallenebilir f fonksiyonunun Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$Mf(x) = \sup_{x \in I} \frac{1}{|I|} \int_I |f(t)| dt \tag{1.4}$$

şeklindedir[7].

B-maksimal ve B-fractional anlamda B-Riesz potansiyeli Y.Zeren tarafından [8] çalışmasında ortaya konulmuştur. Modifiye edilmiş Morrey uzaylarda Riesz potansiyelinin sınırlılığı için gerekli ve yeterli koşullar [9] çalışmasında incelenmiştir.

Harmonik fonksiyonların maksimum değerleri teğet olmayan bir açı için Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu ile değerlendirilir. Hardy-Littlewood maksimal opertörü Morrey-Lebesgue uzayında sınırlıdır.

Minkowski integral eşitsizliği Morrey-Lebesgue uzayında ispatlanmıştır.

$$\left\| \int_X F(x,y) d\vartheta(x) \right\|_{L^{p,\alpha}(dy)} \leq \int_X \|F(x,y)\|_{L^{p,\alpha}(dy)} \, d\vartheta(x) \tag{1.5}$$

Poisson çekirdeğinin yaklaşım özellikleri çalışılmıştır. Eğer $1 \leq \mathrm{p} < +\infty$, $0 \leq \alpha \leq 1$ için $f \in \bar{L}^{p,\alpha}$ ise $|z| \to 1$ iken $\|P_z * f - f\|_{L^{p,\alpha}} \to 0$ olur.

Birim çember üzerinde tanımlanan Poisson çekirdeği $0 < r < 1$ olmak üzere

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos t + r^2} \tag{1.6}$$

şeklindedir.

$$(Sf)(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - \tau}, \tau \in \gamma \tag{1.7}$$

ile gösterilen S singüler operatörüdür ve $1 < p < +\infty$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere bu operatör $L^{p,\alpha}$ uzayında sınırlıdır[3,10,11].

$$\|Sf\|_{p,\alpha} \leq C\|f\|_{p,\alpha}\,,\ \forall\, f\ \in L^{p,\alpha}(\gamma) \tag{1.8}$$

B.T. Bilalov [5] çalışmasında $\bar{L}^{p,\alpha}$ ($1 < p < +\infty$ ve $0 < \alpha \leq 1$) uzayı için $\left\{e^{int}\right\}_{n\in Z}$ üslü sisteminin baz olması kriterine yer vermiştir. $[-\pi, \pi]$ üzerinde Morrey-Lebesgue uzayında çiftli üslü sistemlerin baz oluşturması durumunda bu uzaydaki klasik sisteme izomorf olduğu gösterilmiştir.

1.2 Tezin Amacı

Morrey-tip uzayları tanıtmak ve bu uzaylarda Poisson integralinin yaklaşımı, Minkowski integral eşitsizliği, Singüler operatörün sınırlılığı için kaynak oluşturmaktır. Klasik üslü sistemlerin Morrey-Lebesgue uzayı için baz oluşturmasını ve bu sistemlerin çiftli üslü sistemlere izomorf olduğunu incelemektir.

1.3 Hipotez

Poisson çekirdeği ve Singüler operatörün konvolüsyonlar ile yaklaşım özellikleri Morrey-Lebesgue uzaylarında incelenmiştir. Klasik halde ispatlanmış Minkowski integral eşitsizliğinin benzer durumu Morrey-Lebesgue uzaylarında elde edilmiştir.

Klasik üslü sistemlerin Morrey-Lebesgue uzayları için baz oluşturma kriterleri araştırılmış ve bu uzaylar için baz oluşturan iki sistem arası izomorfizm kavramı ele alınmıştır.

BÖLÜM 2

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde yüksek lisans tez çalışması için ihtiyaç görülen temel kavramlara, tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

2.1 Temel Kavramlar

Tanım 2.1: X boştan farklı bir küme olsun. X üzerinde tanımlı bir metrik,

M1) $\forall\, x, y \in X$ için $d(x,y) \geq 0$

M2) $\forall\, x, y \in X$ için $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M3) $\forall\, x, y \in X$ için $d(x,y) = d(y,x)$, (simetri)

M4) $\forall\, x, y, z \in X$ için $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlayan bir

$d : X \times X \to \mathbb{R}$

fonksiyonudur. Eğer d, X üzerinde bir metrik ise o zaman (X,d) çiftine bir metrik uzay denir.

Tanım 2.2 : (Hölder Eşitsizliği)

$1 < p < \infty$ ve $1/p + 1/q = 1$ olsun. Eğer $f \in L_p(\Omega)$ ve $g \in L_q(\Omega)$ ise

$$\left(\int_\Omega |f(x)g(x)|\, dx\right) \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (2.1)$$

eşitsizliği sağlanır[12].

Tanım 2.3: (Minkowski Eşitsizliği)

$1 \leq p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere eğer $f, g \in L_p(\Omega)$ ise

$$\left(\int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega} |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (2.2)$$

eşitsizliği doğrudur[12].

Tanım 2.4: X bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. X üzerinde bir norm aşağıdaki özelliklerini sağlayan bir

$\| . \| : X \to \mathbb{R}$, $x \to \|x\|$

fonksiyonudur. Her $x \, \epsilon \, X$ ve her $a \, \epsilon \, K$ için

(1) $\|x\| \geq 0$

(2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(3) $\|ax\| = |a|\|x\|$

(4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

özelliklerini sağlayan bir $\| . \|$ normu için X vektör uzayına normlu vektör uzayı ya da sadece normlu uzay denir ve $(X, \| . \|)$ ile gösterilir.

Tanım 2.5: $(X, \| . \|)$ normlu bir uzay ve $x_0 \, \epsilon \, X$, $r > 0$ olsun. x_0 merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar, açık yuvar ve küre sırası ile;

i) $B[x_0, r] = \{ x : \|x - x_0\| \leq r \}$

ii) $B(x_0, r) = \{ x : \|x - x_0\| < r \}$

iii) $S[x_0, r] = \{ x : \|x - x_0\| = r \}$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.6: $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun. $A \subset X$ altkümesi ve $x \in X$ noktası verilsin. $\forall \varepsilon > 0$ için $S^{\circ}(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ ise x noktasına A kümesinin limit noktası denir. A' ifadesi A kümesinin limit noktaları kümesi olmak üzere $\bar{A} = A' \cup A$ kümesine A nın kapanışı denir. $B \subset X$ ve $x \in B$ olsun. $S(x, \varepsilon) \subset B$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa x' e B'nin iç noktası denir. B'nin iç noktaslarının kümesine B'nin içi denir[13].

$\bar{A} = X$ ise A' ya X içinde yoğun bir kümedir denir[13].

Tanım 2.7: Tam olan normlu uzaya Banach uzayı adı verilir. Diğer bir ifade ile $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olmak üzere bu uzayda alınan her (x_n) Cauchy dizisi yine $x \in X$ elemanına yakınsar ise $(X, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı olur[13].

Tanım 2.8: X ve Y bir K cismi üzerinde lineer uzaylar olsun. $T: X \to Y$ operatörü verilsin. $D(T)$, X in bir alt uzayı olmak üzere $\forall x, y \in D(A)$ ve $\forall \alpha, \beta \in K$ için $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ oluyorsa T operatörüne lineerdir denir. $\forall x \in D(A)$ için $\|Tx\| \leq c\|x\|$ olacak şekilde $c > 0$ sayısı varsa T operatörü sınırlıdır denir.

X' den Y' ye tanımlı tüm sınırlı lineer operatörlerin kümesi $L(X, Y)$ ile gösterilir.

T birebir operatör olmak üzere eğer $\forall y_0 \in R(T)$ elemanını $Tx_0 = y_0$ olacak şekilde $x_0 \in D(T)$ elemanına dönüştüren $T^{-1}: R(T) \to D(T)$ operatörüne T nin ters operatörü denir.

$Çek T = \{x \in D(T) : Tx = 0\}$ kümesine T operatörünün çekirdeği denir[13].

Teorem 2.9 : X ve Y Banach uzayları $T: X \to Y$ operatörü lineer, birebir, örten ve sınırlı olsun. Öyleyse $T^{-1}: Y \to X$ ters operatörü vardır ve sınırlıdır[13].

Teorem 2.10: (Banach Steinhaus, Düzgün Sınırlılık Prensibi) E ve F iki Banach uzayı, E'den F'ye tanımlı sürekli lineer operatörler ailesi $(T_i)_{i \in I}$ olsun.

$$\sup_{i \in I} \|T_i x\| < \infty \text{ , } \forall x \in E \tag{2.3}$$

olduğunu kabul edelim. Öyleyse

$$\sup_{i \in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty \tag{2.4}$$

olur. Diğer bir ifade ile öyle bir c sabiti vardır ki

$$\|T_i x\| \leq c\|x\| \text{ , } \forall x \in E \text{ , } i \in I$$

olur[2].

Tanım 2.11: Ω herhangi bir küme ve Σ, Ω'nın alt kümelerinin bir topluluğu olsun. Eğer

(a) $X, \emptyset \in \Sigma$,

(b) $A \in \Sigma \Rightarrow A^c \in \Sigma$,

(c) $A_1, A_2, \ldots \in \Sigma$ için $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$

oluyorsa Σ' ya bir *σ-cebiri* denir.

$\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ bir fonksiyon olmak üzere

(a) $\mu(\emptyset) = 0$,

(b) A_n'ler Σ topluluğunun sayılabilir ve ayrık kümelerinin bir ailesi olmak üzere $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

koşulları sağlanıyorsa μ' ye bir ölçüm fonksiyonu denir. Σ sigma cebirinin elemanlarına ölçülebilir küme denir. $\mu(A)$, A kümesinin ölçüsü $|A|$ ile de gösterilir.

Ayrıca (Ω_n), Σ' de sayılabilir bir topluluk olmak üzere $\forall n$ için $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ ve $\mu(\Omega_n) < \infty$ ise Ω kümesi σ-sonludur denir.

Yukarıda verilen özellikleri sağlayan Ω, Σ ve μ için (Ω, Σ, μ) üçlüsüne ölçüm uzayı denir[14].

Tanım 2.12: $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathrm{R}; f \text{ ölçü}lebilir : \int_{\Omega} |f(t)|^p \, \mathrm{d}\mu < +\infty \right\}$$

kümesine *Lebesgue uzayı* denir. Lebesgue uzayı bir normlu uzaydır ve bu uzay üzerindeki norm $\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(t)|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{1/p}$ şeklinde tanımlıdır. $p = 1$ için $f \in L^1(\Omega)$ fonksiyonu için norm tanımı $\|f\|_{L^1} = \int_{\Omega} |f(t)| \, \mathrm{d}\mu < +\infty$ şeklinde olur. $p = \infty$ için ise norm $\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty = \int_{\Omega} |f(t)| \, \mathrm{d}\mu = \inf\{C : |f(t)| \leq C, hhh \; t \in \Omega\}$ şeklinde tanımlıdır[2].

Örnek 2.13: $f(x) = x^2$ için $f \in L^p[0,1]$ midir?

Çözüm: $1 \leq p < \infty$ için

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |x^2|^p \, dx \right)^{1/p} = \left(\frac{1}{2p+1} \right)^{1/p}$$

elde edilir. Buradan $\|f\|_p$ normu sonlu bir değere sahiptir. Dolayısıyla $f \in L^p[0,1]$ olur.

Örnek 2.14: $1 \leq p < \infty$ için $f, g \in L^p(\Omega)$ olsun. $h(x) = max\{f(x), g(x)\} \in L^p(\Omega)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $1 \leq p < \infty$ için

$$\int_\Omega |max\{f(x), g(x)\}|^p dt = \int_\Omega |f(x)|^p dt = \|f\|_p < +\infty$$

olduğundan $h(x) \in L^p(\Omega)$ elde edilir. Yine aynı şekilde

$$\int_\Omega |max\{f(x), g(x)\}|^p dt = \int_\Omega |g(x)|^p dt = \|g\|_p < +\infty$$

olduğundan $h(x) \in L^p(\Omega)$ olur. Her iki durumda da görüldüğü üzere $h \in L^p(\Omega)$' dir.

Tanım 2.15: $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ eşitliğini sağlayan p ve q sayılarına konjuge sayılar denir[2].

Teorem 2.16: (Fubini) $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ olsun. Öyleyse h.h.h $x \in \Omega_1$ için $F(x, y) \in L^1_y(\Omega_2)$ ve $\int_{\Omega_2} F(x, y)\, d\mu_2 \in L^1_x(\Omega_1)$ olur. Benzer durum h.h.h $y \in \Omega_2$ için de yazılabilir. Buradan Fubini teoremi ile

$$\int_{\Omega_1} d\mu_1 \int_{\Omega_2} F(x, y) d\mu_2 = \int_{\Omega_2} d\mu_2 \int_{\Omega_1} F(x, y) d\mu_1 = \iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x, y) d\mu_1 d\mu_2$$

olduğu ifade edilir[2].

Yardımcı Teorem 2.17: (Fatou) L^1 uzayında alınan (f_n) fonksiyonlar dizisi aşağıdaki özellikleri sağlasın.

(a) $\forall n$ için hemen hemen her yerde $f_n \geq 0$

(b) $\sup_n \int f_n < \infty$.

Bir Ω bölgesindeki h.h.h x için $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \leq +\infty$ olsun. Bu durumda $f(x) \in L^1$ olur ve $\int f \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n$ eşitsizliği sağlanır[2].

Tanım 2.18: $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda \leq n$ olmak üzere $x \in R^n$ için lokal integrallenebilir $f(x)$ fonksiyonlarının

$$\|f\|_{L_{p,\lambda}} = \sup_{x \in R^n, t>0} \left(t^{-\lambda} \int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} < \infty$$

normu ile oluşturdukları uzaya Morrey uzayı denir.

2.2 Poisson İntegrali

$u(z)$ kapalı birim disk $\overline{D}$ üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $u(z)$ açık disk D üzerinde harmonik ise yani eğer

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

oluyorsa $u(z)$ ortalama değer özelliğine sahiptir denir ve

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})\, d\theta$$

şeklinde gösterilir[7].

$z_0 = re^{i\theta_0}$ noktası D üzerinde bir nokta olsun. Öyleyse $u(z_0)$ için Möbiüs dönüşümü ile elde edilen bir temsili vardır. $\tau(z) = (z - z_0)/(1 - \overline{z_0}z)$ olsun. ∂D birim çemberi τ altında invarianttır ve $\tau(e^{i\theta}) = e^{i\varphi}$ yazılabilir. Diferansiyel ise bize

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{1 - |z_0|^2}{|e^{i\theta} - z_0|^2} = \frac{1 - r^2}{1 - 2rcos(\theta - \theta_0) + r^2} = P_{z_0}(\theta) \qquad (2.5)$$

ifadesini verir.

$P_{z_0}(\theta)$ fonksiyonu $z_0 \in D$ noktasında Poisson çekirdeği $z_0 \in D$ noktasında olarak adlandırılır. D üzerinde harmonik ve $\overline{D}$ üzerinde sürekli olan başka bir $u(\tau^{-1}(z))$ fonksiyonu için değişkenlerin değişimi Poisson integral formülünü veririr.

$$u(z_0) = u(\tau^{-1}(z)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})\, P_{z_0}(\theta) d\theta.$$

Ayrıca Poisson çekirdeği

$$P_z(\theta) = Re\frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}$$

şeklinde de ifade edilebilir. Burada $e^{i\theta}$ sabitlenmiştir ve $P_z(\theta)$, $z \in D$ noktasında harmonik fonksiyondur. $f(\theta) \in L^1(\partial D)$ durumunda

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int P_z(\theta) f(\theta) d\theta \qquad (2.6)$$

fonksiyonu D üzerinde harmonik olur. $P_z(\theta)$, θ ya göre sürekli olduğundan ∂D üzerinde sonlu bir ölçü olan $d\mu(\theta)$ ile $f(\theta)d\theta$ ifadesini yer değiştirirsek (2.6) ifadesinden bir harmonik fonksiyon elde ederiz. (2.5) in en sağ kısmı Poisson integralinin bir konvolüsyon olarak da yazılabileceğini gösterir. $z = re^{i\theta_0}$ için

$$P_z(\theta) = P_r(\theta_0 - \theta)$$

olur ve (2.6) dan

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int P_r(\theta_0 - \theta)f(\theta)d\theta = (P_r * f)(\theta_0).$$

elde edilir. Son ifade bize D üzerinde harmonik olan fonksiyonlar uzayının öteleme altında invariant olduğunu gösterir[7].

$w \to z(w) = i(1-w)/(1+w)$ fonksiyonu D bölgesinden H üzerine tanımlı olsun. $w_0 \in D$ sabit noktası ve onun H üzerinde görüntüsü $z_0 = z(w_0)$ olsun. Bu fonksiyon ∂D'yi $R \cup \{\infty\}$ üzerine taşır. Eğer $w = e^{i\theta} \in \partial D$ ve $w \neq -1$ ise $z(w) = t \in R$ olur. Diferansiyel alarak

$$\frac{1}{2\pi}P_{w_0}(\theta)\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\pi}\frac{y_0}{(x_0 - t)^2} = P_{z_0}(t), z_0 = x_0 + iy_0.$$

elde etmiş oluruz. Bu eşitliğin sağ tarafı üst yarı düzlem için Poisson çekirdeğinin formülünü vermiş olur. Burada $P_{z_0}(t) = P_{y_0}(x_0 - t)$ dır. $u(z)$, $\overline{\mathrm{H}} \cup \{\infty\}$ üzerinde sürekli ve H üzerinde harmonik olduğunda Poisson integral formülü D bölgesinden H üzerine alınırsa

$$u(z) = \int P_z(t)u(t)dt = \int P_y(x - t)u(t)dt \qquad (2.7)$$

şeklinde olur. $t \in R$ sabitlendiğinde Poisson çekirdeği üst yarı düzlem için z nin harmonik fonksiyonu olur[7].

$$P_z(t) = \frac{1}{\pi}Im\left(\frac{1}{t - z}\right).$$

Formülden $P_z(t) \leq c_z/(1 + t^2)$ olduğu görülür. Burada c_z sadece z ye bağlı bir sabittir. Eğer $1 \leq q \leq \infty$ ise $P_z(t) \in L^2(R)$ ve

$$u(z) = \int P_z(t)f(t)dt \qquad (2.8)$$

H üzerinde harmoniktir. Burada $f(t) \in L^p(R)$, $1 \leq p \leq \infty$ dur. $f(t)$ ile bir sonlu ya da pozitif $d\mu(t)$ ölçüsünü yer değiştirirsek $P_z(t)$ fonksiyonu t' nin sürekli bir fonksiyonu olduğundan (2.8)'ten harmonik bir $u(z)$ fonksiyonu elde ederiz. Bu sonlu ölçü

$$\int \frac{1}{1+t^2} d\mu(t) < \infty$$

ifadesini sağlamalıdır.

$f(t)$ fonksiyonu (t_1, t_2) aralığının karakteristik fonksiyonu olsun. Elde edilen harmonik fonksiyon

$$\omega(z) = \int_{t_1}^{t_2} P_y(x-t)dt$$

$(t_1,\ t_2)$ aralığının harmonik ölçüsü olarak adlandırılır. Burada t_1 ve t_2 noktaları z'ye birleştirildiğinde oluşan α açısı olmak üzere

$$\omega(z) = \frac{1}{\pi} arg\left(\frac{z-t_2}{z-t_1}\right) = \frac{\alpha}{\pi}$$

ifadesi elde edilir.

Üst yarı düzlem için Poisson integral formülü konvolüsyon yardımı ile de aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$u(z) = \int P_y(x-t)f(t)dt = \big(P_y * f\big)(t).$$

Bu formül Poisson çekirdeğinden elde edilir. Poisson çekirdeğinin bazı özellikleri aşağıdaki gibidir:

(i) $P_y \geq 0$, $\int P_y(t)dt = 1$ dir.

(ii) P_y çift bir fonksiyondur. Yani $P_y(-t) = P_y(t)$ dir.

(iii) P_y , $t > 0$ için azalandır.

(iv) $P_y(t) \leq 1/\pi y$

(v) $\forall \delta > 0$ için $\sup_{|t|>\delta} P_y(t) \to 0\ (y \to 0)$.

(vi) $\forall \delta > 0$ için $\int_{|t|>\delta} P_y(t)dt \to 0\ (y \to 0)$.

(2.8) benzeri integralleri çalışırken önemli yardımcı bir ifade integraller için Minkowski eşitsizliğidir.

μ ve ν birer σ-sonlu ölçü olsunlar. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere eğer $F(x,t)$, $\nu \times \mu$ ölçülebilir ise

$$\left\| \int F(x,t)d\nu(x) \right\|_{L^p(\mu)} \leq \int \|F(x,t)\|_{L^p(\mu)} d\nu(x)$$

olur. Bu ifade $L^p(\mu)$ uzayında toplamlar için Minkowski eşitsizliği ile benzerdir. $p = 1$ için Fubini teoremine dönüşür. $p > 1$ için $F(x,t) \geq 0$ ve $F(x,t)$ yi basit fonksiyon olarak düşünebiliriz. Bu durumda her iki integral de yakınsar.

$$G(t) = \left(\int F(x,t)d\nu(x) \right)^{p-1}$$

olarak alalım. $q = p/(p-1)$ olduğundan

$$\|G\|_{L^p(\mu)} = \left\| \int F(x,t)d\nu(x) \right\|_{L^p(\mu)}^{p-1}$$

elde edilir. Fubini teoremini ve Hölder eşitsizliğini uygularsak

$$\left\| \int F(x,t)d\nu(x) \right\|_{L^p(\mu)}^{p} = \int G(t) \int F(x,t)d\nu(x)d\mu(t)$$

$$= \iint G(t)\, F(x,t)d\mu(t)d\nu(x)$$

$$\leq \int \|G\|_{L^q(\mu)} \|F(x,t)\|_{L^p(\mu)}\, d\nu(x)$$

$$= \|G\|_{L^q(\mu)} \int \|F(x,t)\|_{L^p(\mu)}\, d\nu(x)$$

$\|G\|_{L^q(\mu)}$ ifadesini her taraftan sadeleştirirsek Minkowski eşitsizliğini elde ederiz.

Eğer $u(x,y) = P_y * f(x)$, $f \in L^p$ ise Minkowski eşitsizliğini kullanarak

$$\left(\int |u(x,y)|^p dx \right)^{1/p} \leq \|f\|_p \,, 1 \leq p < \infty \qquad (2.9)$$

elde edilir ve μ, R üzerinde sonlu bir ölçü olmak üzere eğer

$$u(x,y) = P_y * \mu = \int P_y(x-t)d\mu(t)$$

ise

$$\int |u(x,y)|dx \leq \int |d\mu|$$

elde edilir[7].

$p = \infty$ için (2.9) ifadesinin benzeri, $\sup_x |u(x,y)| \leq \|f\|_\infty$, Poisson çekirdeğinin (i)-inci özelliğinden görülür.

Teorem 2.19: (a)Eğer $1 \leq p < \infty$ ve $f(x) \in L^p$ ise $\left\|P_y * f - f\right\|_p \to 0, (y \to 0)$.

(b) $f(x) \in L^\infty$ olduğunda $P_y * f$, $f(x)$'e zayıf yakınsar.

(c) Eğer $d\mu$, R üzerinde sonlu bir ölçü ise $(P_y * \mu)(x)dx$, $d\mu$'e zayıf yakınsar.

(d) Eğer $f(x)$, R üzerinde sınırlı ve düzgün sürekli ise $P_y * f(x)$, $f(x)$'e düzgün sürekli yakınsar.

Burada (b) ifadesi tüm $g \in L^1$ fonksiyonları için

$$\int g(x)\big(P_y * f\big)(x) \to \int f(x)g(x)dx, \ \ (y \to 0)$$

olduğunu ifade eder.

(c) ifadesi tüm $g \in C_0(R)$ için

$$\int g(x)\big(P_y * \mu\big)(x) \to \int g(x)d\mu(x), \ \ (y \to 0)$$

olduğunu gösterir.

Sonuç 2.20: $f(x)$ sınırlı ve düzgün sürekli olsun.

$$u(x,y) = \begin{cases} \big(P_y * f\big)(x), & y > 0, \\ f(x), & y = 0. \end{cases}$$

olduğunu kabul edelim. Öyleyse $u(x,y)$, H üzerinde harmoniktir. $\overline{\mathrm{H}}$ üzerinde ise süreklidir[7].

Yardımcı Teorem 2.21: $f(x) \in L^p, 1 \leq p \leq \infty$ ve f bir x_0 noktasında sürekli olsun. $u(x,y) = P_y * f(x)$ olduğunu varsayalım. Öyleyse $\lim_{(x,y)\to x_0} u(x,y) = f(x_0)$ dir.

Yardımcı Teorem 2.22: Eğer $u(z)$, H üzerinde harmonik ve $\overline{\mathrm{H}}$ üzerinde sınırlı ve sürekli ise

$u(z) = \int P_y(x-t)u(t)dt$

dir.

Teorem 2.23: $u(z)$, H üzerinde harmonik olsun. Öyleyse

(a) Eğer $1 < p \leq \infty$ ise u, L^p uzayında bir fonksiyonun Poisson integralidir ancak ve ancak $\sup_y \int \|u(x+y)\|_{L^p(dx)} < \infty$ dır.

(b) $u(z)$, R üzerinde sonlu bir ölçünün Poisson integralidir ancak ve ancak $\sup_y \int |u(x+iy)|dx < \infty$ dır.

(c) $c \geq 0$, $\mu \geq 0$ ve $\int \frac{d\mu(t)}{1+t^2} < \infty$ olduğunda $u(z)$ pozitiftir ancak ve ancak $u(z) = cy + \int P_y(x-t)d\mu(t)$.

2.3 Hardy-Littlewood Maximal Fonksiyonu

R üzerindeki her$f$ fonksiyonunu iki yardımcı fonksiyon ile ilişkilendirebiliriz. Bunlar f fonksiyonunun Poisson integrali ve genişliğinin ölçüsüdür. Öncelikle ilk yardımcı fonksiyonumuzu tanımlayalım. f herhangi bir (X, μ) ölçüm uzayında ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $\lambda > 0$ için

$m(\lambda) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\})$

dağılım fonksiyonudur. $m(\lambda)$ dağılım fonksiyonu λ nın azalan bir fonksiyonudur ve f nin L^p normunu belirler. Eğer $f \in L^p$ ise $\lambda \geq \|f\|_\infty$ için $m(\lambda) = 0$ ve $\lambda < \|f\|_\infty$ $m(\lambda) > 0$ dır. Böylelikle

$\|f\|_\infty = sup\{\lambda : m(\lambda) > 0\}$

elde ederiz[7].

Yardımcı Teorem 2.24: Eğer (X, μ) bir ölçüm uzayı ve $f(x)$ ölçülebilir ise $0 < p < \infty$ olmak üzere

$$\int |f|^p d\mu = \int_0^\infty p\lambda^{p-1} m(\lambda) d\lambda$$

olur.

Şimdi de diğer yardımcı fonksiyonu tanımlayalım. Bu fonksiyonu sadece R üzerindeki fonksiyonlar için tanımlayacağız. Öncelikle Lebesgue teoremini hatırlayalım. Eğer $f(x)$ R üzerinde lokal integrallenebilirse hemen hemen her f için

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{1}{h+k}\int_{x-h}^{x+k} f(t)dt = f(x) \tag{2.10}$$

olur. Lebesgue teoremini sayısal yapmak için (2.10) deki limiti supremum ile değiştirelim ve integralin içine mutlak değer koyalım. $|I|$ ile I aralığının uzunluğunu ifade etmekteyiz. R üzerinde lokal integrallenebilir f fonksiyonunun Hardy-Littlewood maximal fonksiyonu

$$Mf(x) = \sup_{x\in I} \frac{1}{|I|}\int_I |f(t)|dt$$

şeklindedir. Eğer $p \geq 1$ için $f \in L^p$ ise $Mf(x) < \infty$ (hemen hemen her yerde) olur[7].

Teorem 2.25: $\alpha > 0$ ve $t \in R$ için $\Gamma_\alpha(t)$, H üst yarı düzlemde t noktasında ve $2arctan\alpha$ açısıyla bir koni olsun.

$\Gamma_\alpha(t) = \{(x,y) : |x-t| < \alpha y, 0 < y < \infty\}.$

$f \in L^1(dt/(1+t^2))$ ve $u(x,y)$, $f(t)$ nin Poisson integrali olsun.

$$u(x,y) = \int P_y(s)f(x-s)ds.$$

Öyleyse

$$\sup_{\Gamma_\alpha(t)} |u(x,y)| \leq A_\alpha Mf(t), t \in R \tag{2.11}$$

dir ve A_α sabiti sadece α' ya bağlıdır.

$f \in L^1(dt/(1+t^2))$ şartı sadece $\int P_y(s)f(x-s)ds$ nin yakınsadığını garanti eder.

Teorem 2.26: $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere eğer $f \in L^p(R)$ ise $Mf(t)$ hemen hemen her yerde sonludur.

(a) Eğer $f \in L^1(R)$ ise Mf zayıf L^1 dendir,

$|\{t \in R : Mf(t) > \lambda\}| \leq (2/\lambda)\|f\|_1, \lambda > 0.$

(b) Eğer $f \in L^p(R), 1 < p \leq \infty,$ ise $Mf \in L^p(R)$ dir ve

$\|Mf\|_p \leq A_p \|f\|_p$

dır. Burada A_p sadece p ye bağlı bir sabittir.

Teorem 2.27: (X, μ) ve (Y, v) ölçün uzayları olsunlar. $1 < p_1 \leq \infty$ olmak üzere T, $L^1(X, \mu) + L^{p_1}(X, \mu)$ den v-ölçülebilir fonksiyonlara giden bir dönüşüm olsun, öyle ki

(i) $|T(f+g)(y)| \leq |Tf(y)| + |Tg(y)|$;

(ii) $v(\{y: |Tf(y) > \lambda|\}) \leq (A_0/\lambda)\|f\|_1$, $f \in L^1$;

(iii) $v(\{y: |Tf(y) > \lambda|\}) \leq \left((A_1/\lambda)\|f\|_{p_1}\right)^{p_1}$, $f \in L^{p_1}$;

($p_1 = \infty$ olduğu durumda $\|Tf\|_\infty \leq A_1 \|f\|_\infty$ olur.)

$1 < p < p_1$ için $\|Tf\|_p \leq A_p \|f\|_p$, $f \in L^p$ olur. Burada A_p sadece A_0, A_1, p ve p_1 sayılarına bağlıdır.

2.4 Teğet Olmayan Maksimal Fonksiyon ve Fatou Teoremi

$\alpha > 0$ sabiti için aşağıdaki koniyi ele alalım.

$$\Gamma_\alpha(t) = \{z \in \mathrm{H} : |x - t| < \alpha y\}, \ t \in R. \tag{2.12}$$

Eğer $u(z)$ fonksiyonu H üzerinde harmonik ise u' nun $t \in R$ noktasında teğet olmayan maximal fonksiyonu

$$u^*(t) = \sup_{\Gamma_\alpha(t)} |u(z)| \tag{2.13}$$

dır.

u^* nun değeri α parametresine bağlıdır, fakat α' yı sabit aldığımız için bunu göz ardı edebiliriz.

Teorem 2.28: $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $u(z)$ fonksiyonu H üzerinde harmonik ve

$$\sup_y \int |u(x+iy)|^p dx < \infty \tag{2.14}$$

olsun. Eğer $p > 1$ ise $u^*(t) \in L^p$ dir ve

$$\|u^*\|_p^p \leq B_p \sup_y \int |u(x+iy)|^p dx$$

dir. Eğer $p = 1$ ise $u^*(t) \in zayıf L^1$ dir ve

$$|\{t : u^*(t) > \lambda\}| \leq \frac{B_1}{\lambda} \sup_y \int |u(x+iy)|dx$$

dır. Burada B_p sabiti sadece p ve α' ya bağlıdır.

Şimdi bu teoremin bir sonucunu verelim.

Sonuç 2.29: Eğer $u(z)$ fonksiyonu H üzerinde harmonik ve $p > 1$ ise

$$\int \sup_y |u(x+iy)|^p dx \leq B_p \sup_y \int |u(x+iy)|^p dx \qquad (2.15)$$

dir.

Bu sonucun $p = 1$ için sağlanmadığı gösterilebilir. $u(x,y) = P_y * f(x),\ f \in L^1, f > 0$ alınırsa $\sup_y |u(x,y)| \geq Mf(x)$ ve $Mf \notin L^1$ olur.

Teorem 2.30: (Fatou) $u(z)$ fonksiyonu H üzerinde harmonik olsun. $1 \leq p \leq \infty$ ve

$$\sup_y \|u(x+iy)\|_{L^p(dx)} < \infty$$

olduğunu varsayalım. Öyleyse hemen hemen her t için teğet olmayan limiti

$$\lim_{\Gamma_\alpha(t) \ni z \to t} u(z) = f(t)$$

vardır.

Eğer $p > 1$ ise $u(z)$ fonksiyonu $f(t)$ sınır değerinin Poisson integraline eşittir.

Eğer $1 < p < \infty$ ise $\|u(x+iy) - f(x)\|_p \to 0$, $(y \to 0)$ dır.

Eğer $p = 1$ ise $u(z)$ fonksiyonu R üzerinde μ sonlu ölçümünün Poisson integralidir ve μ sınır değer fonksiyonu $f(t)$ ile ilişkilidir. Bu ilişki dv Lebesgue ölçüsü olmak üzere

$$d\mu = f(t)dt + dv$$

şeklindedir.

2.5 H^p Uzayları

2.5.1 Tanım ve Teoremler

$0 < p < \infty$ olmak üzere $f(z)$ bir D bölgesinde analitik olsun. Eğer

$$\sup_r \frac{1}{2\pi}\int \left|f(e^{i\theta})\right|^p d\theta = \|f\|_{H^p}^p < \infty$$

ise $f \in H^p = H^p(D)$ dir.

$p = \infty$ iken $f \in H^\infty$ analitik fonksiyonu D üzerinde sınırlıdır ve normu

$$\|f\|_\infty = \sup_{z\in D}|f(z)|$$

ile ifade edilir.

H üst yarı düzlemi belirtmek üzere burada analitik $f(z)$ fonksiyonu için $0 < p < \infty$ olmak üzere, eğer

$$\sup_y \int |f(x+iy)|^p dx = \|f\|_{H^p}^p < \infty$$

ise $f(z) \in H^p = H^p(dt)$ dir.

$p = \infty$ durumunda ise H^∞ uzayı H üst yarı düzleminde sınırlı analitik fonksiyonları içerir ve norm $\|f\|_\infty = \sup_H|f(z)|$ ile ifade edilir. Burada $H^p(dt)$ tanımı $0 < y < 1$ gibi küçük y değerlerinden oluşmaz, tüm y değerlerini içerir. Örnek ile açıklayacak olursak

$$g(z) = \frac{e^{-iz/p}}{(i+z)^{2/p}}$$

fonksiyonunu ele alalım. $\int |g(x+iy)|^p dx = \pi e^y (1+y)^{-1}$ olur. Fakat $g(z) \notin H^p(dt)$ dır[7].

$z = \tau(\omega) = i(1-\omega)/(1+\omega)$, D bölgesinden H üzerine bir konformal map olsun. $f \circ \tau \in H^\infty(D)$ dir ancak ve ancak $f \in H^\infty(dt)$ dir. Ancak $H^p(dt)$ ile $H^p(D)$ arasında ilişki yoktur. $H^p(D)$ ' de sıfır olmayan sabitler varken $H^p(dt)$ ' de yoktur. Bu iki uzayı bir arada ele almak için iki basit lemma ispatlamak yeterli olacaktır.

Yardımcı Teorem 2.31: $0 < p < \infty$ olmak üzere eğer $f \in H^p(dt)$ ise $|f(z)|^p$ altharmonik fonskiyonu H bölgesinde $u(z)$ harmonik üst sınırı vardır ve

$$u(i) \le (1/\pi)\|f\|_{H^p}^p$$

sağlanır.

Yardımcı Teorem 2.32: $0 < p < \infty$ olmak üzere eğer $f(z)$ fonksiyonu H bölgesinde analitikse öyle ki $|f(z)|^p$ altharmonik fonksiyonun harmonik üst sınırı vardır, öyleyse

$$F(z) = \frac{\pi^{-1/p}}{(z+i)^{2/p}} f(z)$$

ifadesi $H^p(dt)$ uzayına düşer ve $u(z)$, $|f(z)|^p$ nin harmonik üst sınırlarının en küçüğü olmak üzere $\|F\|_{H^p}^p \leq u(i)$ olur.

Teorem 2.33: $0 < p \leq \infty$ olmak üzere H^p uzayı tamdır.

2.5.2 Maksimal Fonksiyonlar ve Sınır Değerleri

Teorem 2.34: $0 < p < \infty$ ve $f(z) \in H^p(dt)$ olsun Öyleyse herhangi bir $\alpha > 0$ için teğet olmayan maksimal fonksiyon

$$f^*(t) = \sup_{z \in \Gamma_\alpha(t)} |f(z)| \tag{2.16}$$

$L^p(R)$ uzayındadır ve

$$\|f^*\|_p^p \leq \mathrm{A}_\alpha \|f\|_{H^p}^p \tag{2.17}$$

dır. Burada A_α sabiti sadece α' ya bağlıdır. Hemen hemen her $t \in R$ için $f(z)$ teğet olmayan limit değeri $f(t) \in L^p(R)$'ne sahiptir. Öyle ki bu değer

$$\int |f(t)|^p dt = \|f\|_p^p = \|f\|_{H^p}^p \tag{2.18}$$

şartını sağlar ve

$$\lim_{y \to 0} \|f(t+iy) - f(t)\|_p^p = 0 \tag{2.19}$$

olur.

Sonuç 2.35: $1 \leq p \leq \infty$ ve $f(t) \in L^p(R)$ olsun. $f(t)$ hemen hemen her yerde $H^p(dt)$ nin bir fonksiyonunun teğet olmayan limitidir ancak ve ancak $f(t)$ nin Poisson integrali

$$f(z) = P_y * f(x)$$

H üzerinde analitiktir. $f(z)$ Poisson integrali H^p nin bir fonksiyonuna karşılık gelir.

İspat: Eğer $f \in L^p(R)$ ve $f(z) = P_y * f(x)$ analitik ise $f(z) \in H^p(dt)$ olur ve $f(z)$, $f(t)$' ye non-tanjant şekilde yakınsar. Tersine $f(z)$ bir H^p fonksiyonu olsun. Eğer $p > 1$

ise $f(z)$ tanjant olmayan $f(t)$ limitine sahiptir ve $f(z) = P_y * f(x)$ dir. $p = 1$ ise teorem 2.34 ten $f(z) \in H^1$ olduğunda lemma 2.9 ve

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2}$$

ifadesinden

$$f(z+i\varepsilon) = \int P_z(t) f(t+i\varepsilon)\, dt, \varepsilon > 0$$

olur. (2.19) ifadesinden $f(z)$, $f(t)$ sınır değerinin Poisson integrali olur.

Sonuç 2.36: $0 < p < \infty$ ve $u(z)$ üst yarı düzlemde reel değerli harmonik fonksiyon olsun. Eğer $u(z)$, $f(z) \in H^p$ fonksiyonunun reel kısmı ise

$$u^*(t) = \lim_{\Gamma_\alpha(t)} |u(z)|$$

fonksiyonu $L^p(R)$ uzayındadır.

$p = 1$ durumunda sınır değerlerini gözden geçirelim. Eğer $u(z)$ harmonik fonksiyonu

$$\sup_y \int |u(x+iy)| dx < \infty$$

koşulunu sağlarsa $u(t)$ nin Poisson integrali olması gerekmez. $u(z)$ sadece sonlu bir ölçünün Poisson integralidir diyebiliriz. Ancak, eğer $u(z)$ bir analitik fonksiyon ise bu ölçüm kesinlikle süreklidir ve yoğunluğu $u(t)$'nin sınır değeridir. Çünkü maksimal fonksiyon $u^*(t)$ integrallenebilirdir.

Teorem 2.37: Eğer $f(z) \in H^1$ ise $f(z)$ sınır değerlerinin Poisson integralidir.

$$f(z) = \int P_y(x-t) f(t) dt. \qquad (2.20)$$

Tersine eğer μ, R üzerinde sonlu kompleks ölçüm ise, öyle ki $f(z) = P_y * \mu(x)$ üst yarı düzlemde analitiktir, öyleyse μ mutlak süreklidir ve

$$d\mu = f(t) = dt$$

dir. Burada $f(t)$, $f(z)$ nin μ'ye göre Poisson integralidir.

İspat: Eğer $f(z) \in H^1$ ise (2.20) ifadesi sonuç 2.35 ten elde edilir. Tersine, eğer $f(z) = P_y * \mu(x)$ bir analitik fonksiyon ise Minkowski integral eşitsizliğinden bir H^1

fonksiyonudur ve $f(t)$ sınır değerinin Poisson integralidir. Fark ölçümü $dv(t) = d\mu(t) - f(t)dt$ ifadesinin Poisson integrali sıfırdır ve teorem 2.34 gereği $v = 0$ olur.

Yardımcı Teorem 2.38: $f(z) \in H^1$ olsun. Tüm $s \leq 0$ için Fourier dönüşümü

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi ist} = 0$$

dır.

BÖLÜM 3

MORREY-TİP UZAYLAR

Bu bölümde Morrey-Lebesgue, Morrey-Hardy ve Morrey-Smirnov uzayları tanıtılmış ve bu uzaylara ilişkin teoremlere yer verilmiştir.

3.1 Morrey-Lebesgue Uzayları

Γ kompleks düzlemde rektifiye bir Jordan eğrisi olsun. $|M|_\Gamma$ ile $M \subset \Gamma$ kümesinin lineer Lebesgue ölçüsü gösterilmektedir. $L^{p,\alpha}(\Gamma)$ Morrey-Lebesgue uzayı $0 \leq \alpha \leq 1$, $p \geq 1$ olmak üzere Γ üzerinde tanımlı, ölçülebilir, sonlu norma sahip $f(\xi)$ fonksiyonlarının uzayıdır. $L^{p,\alpha}(\Gamma)$ uzayı üzerindeki norm $\|\cdot\|_{L^{p,\alpha}(\Gamma)}$:

$$\|f\|_{L^{p,\alpha}(\Gamma)} = \left\{ \sup_B |B \cap \Gamma|_\Gamma^{\alpha-1} \int_{B\cap\Gamma} |f(\xi)|^p |d\xi| \right\}^{1/p} < +\infty \tag{3.1}$$

ile tanımlıdır. Burada supremum merkezi Γ üzerinde olan B diskleri üzerinden alınmıştır[5].

Teorem 3.1: $L^{p,\alpha}(\Gamma)$ bir Banach uzayıdır.

Tanım 3.2: $\mu(\xi)$, Γ üzerinde tanımlı bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere $L_\mu^{p,\alpha}(\Gamma)$ uzayı ağırlıklı Morrey-tip uzaydır ve bu uzay üzerindeki norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\|f\|_{L_\mu^{p,\alpha}(\Gamma)} = \|f\mu\|_{L^{p,\alpha}(\Gamma)}, \; f \in L_\mu^{p,\alpha}(\Gamma) \tag{3.2}$$

Ayrıca, $p = 1$ için $L^{p,1}(\Gamma) = L_p(\Gamma)$ ve $p = 0$ için $L^{p,0}(\Gamma) = L_\infty(\Gamma)$ dır. $0 \le \alpha_1 \le \alpha_2 \le 1$ için $L^{p,\alpha_1}(\Gamma) \subset L^{p,\alpha_2}(\Gamma)$ olur ve buradan her $\alpha \in [0,1]$ ve $p \ge 1$ için $L^{p,\alpha}(\Gamma) \subset L_1(\Gamma)$ elde edilir[5].

Örnek 3.3: $p \ge 1$ için $f(t) = t^\beta$ fonksiyonunun $(0,1)$ aralığında L_p ve $L^{p,\alpha}$ uzaylarına ait olma durumunu inceleyelim.

Çözüm: $\int_0^1 \left|t^\beta\right|^p dt = \frac{1}{p\beta+1}$ ifadesi $\beta > -\frac{1}{p}$ durumunda sonlu bir değere sahip olur ve $L_p\big((0,1)\big)$ uzayına ait olur. $0 < \alpha < 1$ için $\sup_I \frac{1}{|I|^{1-\alpha}} \int_0^1 \left|t^\beta\right|^p dt$ ifadesinde $|I|$ değeri en fazla 1 olduğundan yine $\beta > -\frac{1}{p}$ durumunda sonlu bir değer olur ve verilen fonksiyon $L^{p,\alpha}\big((0,1)\big)$ uzayına ait olur.

Aynı şekilde $\delta > 0$ ve $0 < \alpha < 1$ olmak üzere $I = (0,\delta)$ için

$$\frac{1}{\delta^{1-\alpha}} \int_0^\delta \left|t^\beta\right|^p dt = \frac{\delta^{p\beta+\alpha}}{p\beta+1}$$

ifadesi $\beta \ge -\frac{\alpha}{p}$ durumunda sonlu bir değer olur. $0 < \alpha < 1$ kabulünden $\beta \ge -\frac{\alpha}{p} > -\frac{1}{p}$ olur ve $\beta \in \left(-\frac{1}{p}, -\frac{\alpha}{p}\right)$ için t^β fonksiyonu L_p uzayına ait olurken $L^{p,\alpha}$ uzayının elemanı olamaz.

Örnek 3.4: $1 \le p < \infty$ ve $0 < \alpha < 1$ için $f, g \in L^{p,\alpha}(0,1)$ olsun. $h(x) = max\{f(x), g(x)\} \in L^{p,\alpha}(0,1)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\sup_I \frac{1}{|I|^{1-\alpha}} \int_0^1 |max\{f(x), g(x)\}|^p dt$

$$= \sup_I \frac{1}{|I|^{1-\alpha}} \int_0^1 |f(x)|^p dt < +\infty$$

olduğundan $h(x) \in L^{p,\alpha}(\Omega)$ elde edilir. Yine aynı şekilde

$$\sup_I \frac{1}{|I|^{1-\alpha}} \int_0^1 |max\{f(x), g(x)\}|^p dt$$

$$= \sup_I \frac{1}{|I|^{1-\alpha}} \int_0^1 |g(x)|^p dt < +\infty$$

olduğundan $h(x) \in L^{p,\alpha}(\Omega)$ olur. Her iki durumda da görüldüğü üzere $h \in L^{p,\alpha}(0,1)$' dir.

Tanım 3.5: T_δ shift operatörü olmak üzere $L^{p,\alpha}$ uzayında sürekli ötelemeye sahip fonksiyonların oluşturduğu uzay

$$\tilde{L}^{p,\alpha}(\Gamma) = \{f \in L^{p,\alpha} : \|T_\delta f - f\|_{L^{p,\alpha}} \to 0, \delta \to 0\} \tag{3.3}$$

ile tanımlıdır. $\tilde{L}^{p,\alpha}$, $L^{p,\alpha}$ uzayının altuzayıdır ve kapanışı $\bar{L}^{p,\alpha}$ ile gösterilir[5].

Teorem 3.6: γ birim çember olmak üzere

$$(Sf)(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - \tau}, \qquad \tau \in \gamma \tag{3.4}$$

ile gösterilen S singüler operatörü , $1 < p < +\infty$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere, $L^{p,\alpha}$ uzayında sınırlıdır:

$$\|Sf\|_{p,\alpha} \leq C\|f\|_{p,\alpha}\,,\ \forall\, f\ \in L^{p,\alpha}(\gamma) \tag{3.5}$$

3.2 Morrey-Hardy Uzayları

γ, $z = 0$ merkezli birim çevre ve $int\gamma = \omega$ olsun. ω içinde harmonik olan fonksiyonların Morrey-tip sınıfı $h^{p,\alpha}$ dır ve bu sınıf üzerinde tanımlanan norm her $u \in h^{p,\alpha}$ için aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

$$\|u\|_{h^{p,\alpha}} = \sup_{0<r<1}\|u_r(\cdot)\|_{L^{p,\alpha}(\gamma)} \tag{3.6}$$

$h^{p,\alpha}$ sınıfının özellikleri:

- $h^{p,\alpha}$ Banach uzayıdır.
- $\alpha = 1$ için $h^{p,1} = h_p$ dir.
- $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$ için $h^{p,\alpha_1} \subset h^{p,\alpha_2}$ dir.
- $\forall\, \alpha\ \in\ [0,1]$ ve $\forall\, p \geq 1$ için $h^{p,\alpha} \subset h_1$ dir.

$h^{p,\alpha} \subset h_1$ olduğundan her $u \in h^{p,\alpha}$ fonksiyonu için $\partial\omega$ üzerinde hemen hemen her yerde teğet olmayan sınır değerleri vardır. Bu değerler $u^+(t) = \lim_{z \to e^{it}} u(z)$, $t \in [-\pi, \pi]$ ile gösterilir.

Teorem 3.7: $1 < p < \infty$ ve $0 \leq \alpha \leq 1$ olmak üzere $u \in h^{p,\alpha}$ olması için gerek ve yeter şart

$$u(re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u^+(s) P(r, s-t) ds \tag{3.7}$$

ifadesini sağlayan $\exists\, u^+ \in L^{p,\alpha}$ olmasıdır[5].

İspat: $\Rightarrow$: $p > 1$ ve $\alpha \in [0,1]$ için $u \in h^{p,\alpha}$ alalım. Buradan u fonksiyonunun teğet olmayan sınır değerleri $u^+(t) = \lim_{r \to 1-0} u(re^{it})$, $u^+ \in L_p$ vardır. Fatou teoremini uygularsak:

$$\int_{B \cap \gamma} |u^+(re^{it})|^p \, dt \leq \underline{\lim}_{r \to 1-0} \int_{B \cap \gamma} |u(re^{it})|^p \, dt$$

$$\leq C|B \cap \gamma|^{1-\alpha}$$

elde ederiz. C, B 'den bağımsız bir sabittir. Buradan $u^+ \in L^{p,\alpha}$ olur.

$\Leftarrow$: $u^+ \in L^{p,\alpha}$ olsun ve (3.4) ifadesi sağlansın. $u^+ \in L_p$ olduğundan $u \in h_p$ olduğu açıktır ve γ üzerinde $r \to 1-0$ iken $u(re^{it}) \to u^+(t)$ dir. Buradan $|u_r(e^{it})| \leq c(Mu^+)(t)$ yazılabilir [6]. $\|u_r\|_{L^{p,\alpha}} \leq c\|Mu^+\|_{L^{p,\alpha}}$ olduğu açıktır. Yarıçap üzerinden supremum alınırsa

$$\|u\|_{h^{p,\alpha}} \leq c\|Mu^+\|_{L^{p,\alpha}} \tag{3.8}$$

elde edilir. Maksimal operatörü $L^{p,\alpha}$ uzayında sınırlı olduğundan

$$\|u\|_{h^{p,\alpha}} \leq c\|Mu^+\|_{L^{p,\alpha}} \leq c\|M\|\|u^+\|_{L^{p,\alpha}} < +\infty \tag{3.9}$$

sonucuna ulaşılır. Sonuç olarak, $u \in h^{p,\alpha}$ olduğu görülür.

Tanım 3.8: Birim çember içinde analitik $f(z)$ fonksiyonlarının uzayına Morrey-Hardy uzayı denir ve $H_+^{p,\alpha}$ ile gösterilir. Bu uzay üzerindeki norm:

$$\|f\|_{H_+^{p,\alpha}} = \sup_{0<r<1}\left\|f\left(re^{it}\right)\right\|_{L^{p,\alpha}} \tag{3.10}$$

şeklinde tanımlıdır[5].

$f = u + iv$ olmak üzere, eğer $f \in H_+^{p,\alpha}$ ise $u, v \in h^{p,\alpha}$ olduğu açıktır ve bunun tersi de doğrudur. Eğer $u, v \in h^{p,\alpha}$ ve v, u'nun harmonik eşleniği ise $f \in H_+^{p,\alpha}$ dır.

Teorem 3.9: $f \in H_+^{p,\alpha}$ olması için gerek ve yeter koşul

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f^+(\tau)d\tau}{\tau - z} \tag{3.11}$$

ifadesini sağlayan $\exists\, f^+ \in L^{p,\alpha}$ olmasıdır.

3.3 Morrey-Smirnov Uzayları

$G \equiv int\Gamma$, Γ ile sınırlandırılmış basit bağlantılı bir küme olsun. $\{\Gamma_n\}_{n\in N} \subset G$ dizisi Γ'ya yakınsayan rektifiye eğrilerden oluşsun. G' de analitik olan fonksiyonların Morrey-tip sınıfı $E^{p,\alpha}$ ile gösterilir ve bu sınıf üzerindeki norm:

$$\|f\|_{E^{p,\alpha}} \equiv \sup_n \|f\|_{L^{p,\alpha}(\Gamma_n)} < +\infty \tag{3.12}$$

şeklinde tanımlıdır[5].

Teorem 3.10: $f \in E^{p,\alpha}(G)$ olması için gerek ve yeter şart

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f^+(\tau)d\tau}{\tau - z} \tag{3.13}$$

olacak şekilde $\exists\, f^+ \in L^{p,\alpha}(\Gamma)$ olmasıdır.

Smirnov teoreminin benzeri aşağıda ifade edilmiştir.

Teorem 3.11: f^+, Γ üzerinde f'nin tanjant olmayan sınır değeri olmak üzere

$1 \le p_1 < +\infty$, $0 < \alpha \le 1$ için $f \in E^{p_1,\alpha}(G)$ ve $p_1 < p_2 < +\infty$ için $f^+ \in L^{p_2,\alpha}(\Gamma)$ ise $f \in E^{p_2,\alpha}(G)$ dir.

BÖLÜM 4

MORREY-TİP UZAYLARDA KONVOLÜSYONLAR

Bu bölümde Morrey-tip uzaylarda integraller için Minkowski eşitsizliği, konvolüsyonlar ile yaklaşımlar verilmiştir.

4.1 Minkowski İntegral Eşitsizliği

X herhangi bir uzay ve ϑ, X üzerinde bir σ-sonlu ölçü olsun. dy, γ üzerinde bir lineer Lebesgue ölçüsü olmak üzere $F(x,y)$, $X \times \gamma$ üzerinde $\vartheta \times dy$ bir ölçülebilir fonksiyon olsun. B herhangi bir çember (ya da düzlemde bir küre) olmak üzere Minkowski eşitsizliği aşağıdaki şekildedir [7]:

$$\left(\int_{B\cap\gamma}\left|\int_X F(x,y)d\vartheta(x)\right|^p dy\right)^{1/p} \leq \int_X \left(\int_{B\cap\gamma}|F(x,y)|^p\,dy\right)^{1/p} d\vartheta(x) \qquad (4.1)$$

Buradan

$$\left(\frac{1}{|B\cap\gamma|^{1-\alpha}}\int_{B\cap\gamma}\left|\int_X F(x,y)d\vartheta(x)\right|^p dy\right)^{1/p} \leq \int_X \frac{1}{|B\cap\gamma|^{1-\alpha}}\left(\int_{B\cap\gamma}|F(x,y)|^p\,dy\right)^{1/p} d\vartheta(x)$$

$$\leq \int_X \|F(x,y)\|_{L^{p,\alpha}(dy)}\,d\vartheta(x)$$

elde edilir. Son olarak tüm B çemberleri üzerinden supremum alınırsa $L^{p,\alpha}$ uzayında Minkowski eşitsizliğine ulaşılmış olur:

$$\left\|\int_X F(x,y)d\vartheta(x)\right\|_{L^{p,\alpha}(dy)} \leq \int_X \|F(x,y)\|_{L^{p,\alpha}(dy)}\,d\vartheta(x). \qquad (4.2)$$

4.2 Konvolüsyonlar ile Yaklaşım

Teorem 4.1: $[-\pi,\pi]$ aralığında sonsuz mertebeden diferansiyellenebilir fonksiyonlar $\bar{L}^{p,\alpha}(\gamma)$ uzayında yoğundur.

İspat: Öncelikle bize ispatımızda yardımcı olacak çekirdek fonksiyonunu tanıtalım:

$$\omega_\varepsilon(t)=\begin{cases} c_\varepsilon exp\left(\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-|t|^2}\right), & |t|<\varepsilon \\ 0, & |t|\geq\varepsilon \end{cases} \tag{4.3}$$

Ayrıca $\int_{-\infty}^{+\infty}\omega_\varepsilon(t)dt=1$ dır.

γ , üzerinde tanımlı $f(\xi)$ fonksiyonlarını $[-\pi,\pi]$ aralığında periyodik olacak şekilde $f(t)$: $f(t)\equiv f\left(e^{it}\right)$ olarak belirleyelim. İspata başlarken tanıttığımız çekirdek fonksiyonu ω_ε ile aşağıdaki konvolüsyonu kuralım:

$$f_\varepsilon(t)=(\omega_\varepsilon * f)(t)=(f*\omega_\varepsilon)(t) \tag{4.4}$$

Konvolüsyon sonucu elde ettiğimiz f_ε fonksiyonunun sonsuz mertebeden diferansiyellenebilir olduğu açıktır. Keyfi bir $f\in\bar{L}^{p,\alpha}$ alalım:

$$\|f_\varepsilon-f\|_{L^{p,\alpha}}=\left\|\int_{-\infty}^{+\infty}\omega_\varepsilon(s)f(t-s)ds-f(t)\right\|_{L^{p,\alpha}}$$

$$=\left\|\int_{-\infty}^{+\infty}\omega_\varepsilon(s)[f(t-s)-f(t)]ds\right\|_{L^{p,\alpha}}$$

elde edilir. Minkowski eşitsizliğini (4.2) uygularsak:

$$\|f_\varepsilon-f\|_{L^{p,\alpha}}\leq\int_{-\infty}^{+\infty}\|\omega_\varepsilon(s)[f(\cdot-s)-f(\cdot)]\|_{L^{p,\alpha}}\,ds$$

$$\leq\sup_{|s|\leq\varepsilon}\|f(\cdot-s)-f(\cdot)\|_{L^{p,\alpha}}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\omega_\varepsilon(s)ds$$

$$=\sup_{|s|\leq\varepsilon}\|f(\cdot-s)-f(\cdot)\|_{L^{p,\alpha}}\to 0,\ \varepsilon\to 0$$

Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2: Eğer $1 \leq \mathrm{p} < +\infty, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$ için $f \in \bar{L}^{p,\alpha}$ ise $|z| \to 1$ iken $\|P_z * f - f\|_{L^{p,\alpha}} \to 0$olur.

İspat: $1 \leq \mathrm{p} < +\infty$, $0 \leq \alpha \leq 1$ için

$$\|(P_z * f)(\cdot) - f(\cdot)\|_{L^{p,\alpha}} = \left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_z(t) f(t-s)dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_z(t) f(s)dt \right\|_{L^{p,\alpha}}$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_z(t) \|f(t-\cdot) - f(\cdot)\|_{L^{p,\alpha}} \, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{|t|>\delta} P_z(t) \|f(t-\cdot) - f(\cdot)\|_{L^{p,\alpha}} dt + \int_{|t|<\delta} P_z(t) \|f(t-\cdot) - f(\cdot)\|_{L^{p,\alpha}} dt \right]$$

Bu noktada aşağıdaki durumlar göz önüne alınırsa:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|t|<\delta} P_z(t) \|f(t-\cdot) - f(\cdot)\|_{L^{p,\alpha}} dt \leq \sup_{|t|<\delta} \|f(t-\cdot) - f(\cdot)\|_{L^{p,\alpha}}, \delta \to 0$$

ve

$$\|f(t-\cdot) - f(\cdot)\|_{L^{p,\alpha}} \leq \|f\|_{L^{p,\alpha}} + \|f(t-\cdot)\|_{L^{p,\alpha}} = 2\|f\|_{L^{p,\alpha}}$$

$$\|f(t-\cdot)\|_{L^{p,\alpha}}^{p} = \sup_{B} \frac{1}{|B \cap \gamma|^{1-\alpha}} \int_{B \cap \gamma} |f(t-s)|^{p} ds$$

$$= \sup_{B} \frac{1}{|B \cap \gamma|^{1-\alpha}} \int_{(B \cap \gamma)_t} |f(s)|^{p} ds$$

Burada $|B \cap \gamma| = |(B \cap \gamma)_t|$ ve $(B \cap \gamma)_t \equiv \{s : t - s \in B \cap \gamma\}$ dır. Dolayısıyla $\|f(t-\cdot)\|_{L^{p,\alpha}} = \|f\|_{L^{p,\alpha}}$ olur.

Sonuç olarak

$$\int_{|t|>\delta} P_z(t) \|f(t-\cdot) - f(\cdot)\|_{L^{p,\alpha}} dt \leq 2\|f\|_{L^{p,\alpha}} \int_{|t|>\delta} P_z(t) dt \to 0, |z| \to 1$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3: Singüler operatör S, $0 < \alpha \leq 1$ ve $1 < p < +\infty$ olmak üzere, $\bar{L}^{p,\alpha}$ uzayında sınırlıdır[5].

İspat: Öncelikle S operatörünün $\bar{L}^{p,\alpha}$ uzayında invariant olduğunu gösterelim. Bunun için S operatörünün sürekli ötelemeye sahip olduğunu göstermek yeterli olacaktır:

$(Sf)(\tau e^{i\delta}) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - \tau e^{i\delta}}$ singüler operatörü için aşağıdaki dönüşümleri göz önüne alırsak;

$$(Sf)(\tau e^{i\delta}) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)d\xi e^{-i\delta}}{\xi e^{-i\delta} - \tau}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi e^{-i\delta}e^{i\delta})d\xi e^{-i\delta}}{\xi e^{-i\delta} - \tau}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi e^{i\delta})d\xi}{\xi - \tau}$$

elde ederiz. Dolayısıyla

$$(Sf)(\tau e^{i\delta}) - (Sf)(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi e^{i\delta}) - f(\xi)}{\xi - \tau}d\xi$$

$$= \left(S\left(f(\cdot\, e^{i\delta}) - (f)(\cdot)\right)\right)(\tau)$$

ulaşmış oluruz. $f \in \bar{L}^{p,\alpha}(\gamma)$ için teorem 3.4 gereğince

$$\left\|(Sf)(\tau e^{i\delta}) - (Sf)(\tau)\right\|_{L^{p,\alpha}} \leq C\left\|\left(f(\cdot\, e^{i\delta}) - f(\cdot)\right)\right\|_{L^{p,\alpha}} \to 0\,,\ \delta \to 0$$

elde edilir ve böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Yardımcı Teorem 4.4: $1 \leq p < \infty$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere $f(\cdot) \in L_\infty$ ve $g(\cdot) \in \bar{L}^{p,\alpha}$ ise $f(\cdot)g(\cdot) \in \bar{L}^{p,\alpha}$ olur[15].

İspat: $\alpha = 1$ için durum açıktır. $0 < \alpha < 1$ için $\Delta_\delta = \|f(\cdot + \delta)g(\cdot + \delta) - f(\cdot)g(\cdot)\|_{L^{p,\alpha}}$ olarak tanımlayalım.

Keyfi $\varepsilon > 0$ ve $m > 0$ için bir $\varphi(\cdot) \in C[-\pi, \pi]$ vardır öyle ki $g \in L^{p,\alpha}$ için $\|g(\cdot) - \varphi(\cdot)\|_{L^{p,\alpha}} < \varepsilon/m$ kalır.

$\Delta_\delta = \|f(\cdot+\delta)[g(\cdot+\delta)-\varphi(\cdot+\delta)+\varphi(\cdot+\delta)]-f(\cdot)[g(\cdot)-\varphi(\cdot)+\varphi(\cdot)]\|_{L^{p,\alpha}} \leq$

$\leq c_f\|g(\cdot+\delta)-\varphi(\cdot+\delta)\|_{L^{p,\alpha}} + \|f(\cdot+\delta)\varphi(\cdot+\delta)-f(\cdot)\varphi(\cdot)\|_{L^{p,\alpha}} +$

$+c_f\|g(\cdot)-\varphi(\cdot)\|_{L^{p,\alpha}}$

Burada $c_f = \|f(\cdot)\|_{L_\infty}$ olarak alınmıştır. Ayrıca $\forall\ \delta \in R$ için

$\|g(\cdot+\delta)-\varphi(\cdot+\delta)\|_{L^{p,\alpha}} = \|g(\cdot)-\varphi(\cdot)\|_{L^{p,\alpha}} < {}^{\varepsilon}/_{m}$

olduğu açıktır. Böylece eşitsizliğin son hali

$\Delta_\delta \leq \frac{2c_f}{m}\varepsilon + \|f(\cdot+\delta)\varphi(\cdot+\delta)-f(\cdot)\varphi(\cdot)\|_{L^{p,\alpha}}$

halini alır. İspata $\varphi(\cdot) \in C[-\pi,\pi]$ için

$\lim_{\delta\to 0}\|f(\cdot+\delta)\varphi(\cdot+\delta)-f(\cdot)\varphi(\cdot)\|_{L^{p,\alpha}} = 0$

olduğunu göstererek devam edeceğiz . $I_\pi = I \cap [-\pi,\pi]$ olsun. Buradan

$\|f(\cdot+\delta)\varphi(\cdot+\delta)-f(\cdot)\varphi(\cdot)\|_{L^{p,\alpha}} \leq$

$\leq \|f(\cdot+\delta)[\varphi(\cdot+\delta)-\varphi(\cdot)]\|_{L^{p,\alpha}} +$

$+\|[f(\cdot+\delta)-f(\cdot)]\varphi(\cdot)\|_{L^{p,\alpha}}$

$\leq c_f\|\varphi(\cdot+\delta)-\varphi(\cdot)\|_{L^{p,\alpha}} +$

$+\|[f(\cdot+\delta)-f(\cdot)]\varphi(\cdot)\|_{L^{p,\alpha}}$

elde edilir. $\lim_{\delta\to 0}\|\varphi(\cdot+\delta)-\varphi(\cdot)\|_{L^{p,\alpha}} = 0$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $\exists\ \delta_1 > 0$ vardır öyle ki $|\delta| < \delta_1$ olacak şekilde her δ için $\|\varphi(\cdot+\delta)-\varphi(\cdot)\|_{L^{p,\alpha}} < \frac{\varepsilon}{m}$ kalır. Eşitsizliğin son hali

$\Delta_\delta \leq \frac{3c_f}{m}\varepsilon + \Delta_\delta(\varphi), \forall\ \delta\ \in (-\delta_1,\delta_1)$

halini alır. Burada $\Delta_\delta(\varphi) = \|[f(\cdot+\delta)-f(\cdot)]\varphi(\cdot)\|_{L^{p,\alpha}}$ olarak alınmıştır.

Keyfi bir $\nu > 0$ sayısı için $\Delta_\delta(\varphi) = max\left\{\Delta_\delta^{(1)}(\nu); \Delta_\delta^{(2)}(\nu)\right\}$ olarak belirleyelim; öyle ki

$$\Delta_\delta^{(1)}(\nu) = \sup_{I:|I|\geq\nu}\left(\frac{1}{|I|^{1-\alpha}}\int_I \left|\big(f(t+\delta)-f(t)\big)\varphi(t)\right|^p dt\right)^{1/p},$$

$$\Delta_\delta^{(2)}(\nu) = \sup_{I:|I|\leq\nu}\left(\frac{1}{|I|^{1-\alpha}}\int_I \left|\big(f(t+\delta)-f(t)\big)\varphi(t)\right|^p dt\right)^{1/p}$$

olsun. $\Delta_\delta^{(1)}(\nu)$ için gerekli düzenlemeler yapılınca

$$\Delta_\delta^{(1)}(\nu) \leq \nu^{\frac{\alpha-1}{p}} \sup_{I:|I|\geq\nu}\left(\int_I \left|\big(f(t+\delta)-f(t)\big)\varphi(t)\right|^p dt\right)^{1/p}$$

$$\leq \nu^{\frac{\alpha-1}{p}}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|\big(f(t+\delta)-f(t)\big)\varphi(t)\right|^p dt\right)^{1/p}$$

$$\leq c_\varphi \nu^{\frac{\alpha-1}{p}} \|f(\cdot+\delta)-f(\cdot)\|_{L^p}$$

elde edilir. Burada $c_\varphi = \|\varphi(\cdot)\|_{L_\infty}$ ve $\|f\|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi}|f|^p\,dt\right)^{1/p}$ olarak alınmıştır.

$\lim_{\delta\to 0}\|f(\cdot+\delta)-f(\cdot)\|_{L^p} = 0$ olduğundan $\exists\ \delta_2 > 0$ vardır öyle ki $\forall\ \delta \in (-\delta_2, \delta_2)$ için $\|f(\cdot+\delta)-f(\cdot)\|_{L^p} < \nu^{\frac{1}{p}}$ olur.

Şimdi ise $\Delta_\delta^{(2)}(\nu)$ için gerekli düzenlemeler yapılınca

$$\Delta_\delta^{(2)}(\nu) \leq 2c_f c_\varphi \sup_{I:|I|\leq\nu}\left(\frac{1}{|I|^{1-\alpha}}\int_I 1dt\right)^{1/p}$$

$$\leq 2c_f c_\varphi \nu^{\frac{\alpha}{p}}$$

elde edilir. $c_{f_\alpha} = max\{c_\varphi; 2c_f c_\varphi\}$ olsun. Dolayısıyla $\Delta_\delta(\varphi) \leq c_{f_\alpha}\nu^{\frac{\alpha}{p}}$ olur. Burada not olarak c_{f_α} sabitinin ν'ye bağlı olmadığı söylenebilir.

Şimdi ν: $\nu < \left(\frac{\varepsilon}{c_{f_\alpha} m}\right)^{\frac{p}{\alpha}}$ olarak seçelim. Dolayısıyla $\Delta_\delta(\varphi) \leq \frac{\varepsilon}{m}$ olur ve

$$\Delta_\delta(\varphi) \leq \frac{3c_f}{m}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{m} = \frac{3c_f+1}{m}\varepsilon\,, \forall\ \delta\ \in (-\delta_3, \delta_3)$$

elde edilir. Burada $\delta_3 = min\{\delta_1; \delta_2\}$ olarak alınmıştır. $m = 3c_f + 1$ seçerek, $\forall\ \delta \in (-\delta_3, \delta_3)$ için $\Delta_\delta \leq \varepsilon$ elde edilir. Sonuç olarak, $\delta \to 0$ iken $\Delta_\delta \to 0$ olduğu görülür ve lemma ispatlanmış olur[15].

BÖLÜM 5

MORREY-LEBESGUE TİP UZAYLARDA İKİ BAZ ARASI İZOMORFİZM

Bu bölümde katsayıları kompleks değerli fonksiyonlardan oluşan üstlerin ikili sistemi incelenmiştir. Bu katsayılar üzerine bazı şartlar getirilerek, eğer bu üstlü sistem $[-\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}]$ üzerinde tanımlanan Morrey-Lebesgue tip uzaylar için bir baz oluşturursa bu uzaydaki klasik üslü sisteme izomorf olduğu gösterilmiştir[15].

5.1 Tanım ve Teoremler

$A(t) = |A(t)|e^{i\alpha(t)}$ ve $B(t) = |B(t)|e^{i\beta(t)}$, $[-\pi, \pi]$ üzerinde tanımlı kompleks değerli katsayılar olmak üzere

$$\left\{A(t)e^{int}, B(t)e^{-ikt}\right\}_{n\in Z_+, k\in N} \tag{5.1}$$

sistemi ikili üstlü sistemdir. (5.1) sisteminin genel hali ise $\gamma : [-\pi, \pi] \to C$ kompleks değerli bir fonksiyon olmak üzere

$$1 \cup \left\{\cos\big(nt + \gamma(t)\big)\,; \sin(nt + \gamma(t))\right\}_{n\in Z} \tag{5.2}$$

şeklindedir. (5.1) ve (5.2) sistemlerinin $L_p(-\pi, \pi)$ uzayında, $1 \le p < +\infty$ baz özellikleri (tamlık, minimallik, tamlık gibi) Paley-Wiener [16] ve N. Levinson[15] çalışmalarında incelenmiştir. O zamandan günümüze kadar bu alanda pek çok çalışmalar yapılmıştır. Ünlü Kadets 1-4 teoremleri [18] yine bu konuya değinmektedir.

Üslü sistemlerin

$$\left\{e^{i(n+\alpha sign n)t}\right\}_{n\in Z} \tag{5.3}$$

$L_p(-\pi,\pi)$ uzayında, $1 \le p < +\infty$ baz olması için kriter ilk olarak A. M. Sedletsky [19] tarafından bulunmuştur. Benzer sonuçları sınır değer problemleri metodunu kullanan E, I. Moiseyev [20] de elde etmiştir.

Bu sistemlerin tekli versiyonları olan cosinüs sistemi

$$1 \cup \{cos(n+\alpha)t\}_{n\in N} \tag{5.4}$$

ve sinüs sistemi

$$\{sin(n+\alpha)t\}_{n\in N} \tag{5.5}$$

Fourier metodu yardımıyla karışık tip eşitlikler çözülürken ortaya çıkmıştır. $L_p(0,\pi)$ uzayında (5.4) ve (5.5) sisteminin bazlık özellikleri $a \in R$ bir reel parametre olması durumu E, I. Moiseyev [21] tarafından çalışılmıştır. (5.1)-(5.5) sistemlerinin bazlık özelliklerini geliştirmek için kullanılan metod analitik fonksiyonlar teorisinin sınır değer problemleri metodudur. Bu metod birçok yazar tarafından başarılı bir şekilde çalışılmıştır [5-20]. B. T. Bilalov tarafından en genel durum düşünülmüştür, öyle ki (5.1) sisteminin bazlık özelliklerinin sonuçlarından yararlanarak $L_p(0,\pi), 1 < p < +\infty$ uzayında

$$\{sin(nt+\gamma(t))\}_{n\in N} \tag{5.6}$$

sinüs sisteminin minimalliği ve tamlığı için bir bazlık kriteri bulmuştur. Burada $\gamma\colon [0,\pi] \to C$ bir parçalı sürekli fonksiyondur. (5.1)-(5.6) sistemlerinin bazlık özellikleri çalışmaları farklı uzaylar için hala devam etmektedir. L_p uzayının ağırlıklı formunda da bu çalışmalar yapılmaktadır[21-22].

Ayrıca Morrey-tip uzaylarda (5.1)-(5.6) sistemlerinin yaklaşım özellikleri de çalışılmaktadır[4]. Aynı zamanda Morrey-Lebesgue tip uzaylarda klasik üslü sistemlerin bazlığı geliştirilmiştir[5].

Bu bölümde, eğer (5.1) sistemi Morrey-Lebesgue tip $M_{p,\alpha} = M_{p,\alpha}(-\pi,\pi)$ uzayı için bir baz oluşturuyorsa bunun klasik üslü sisteme izomorf olduğu ispatlanmıştır. Bunun için sınır değer problemi metodu kullanılmıştır.

Tanım 5.1: (X,d) ve (Y,ρ) iki metrik uzay ve $f:X\to Y$ bir dönüşüm olsun. Eğer f dönüşümü uzaklıkları koruyorsa yani $\forall x,y\in X$ için $\rho\big(f(x),f(y)\big)=d(x,y)$ oluyorsa f dönüşümüne bir izometrik dönüşüm veya izometri denir. Eğer bu izometri aynı zamanda örten ise f ye izometrik izomorfizm, (X,d) ve (Y,ρ) uzaylarına da izometrik ya da eş yapılı uzaylar denir[13].

X ve Y aynı cisim üzerinde iki lineer uzay olmak üzere eğer birebir ve örten $i:X\to Y$ dönüşümü lineer uzay yapısını koruyorsa i dönüşümü X ten Y ye bir lineer izomorfizmdir denir. $(X,\|.\|_X)$ ve $(Y,\|.\|_Y)$ birer normlu uzay olduğunda bu i dönüşümü normu koruyorsa yani $\forall x\in X$ için $\|i(x)\|_Y=\|x\|_X$ oluyorsa i dönüşümüne lineer izometri denir[13].

Tanım 5.2: $(X;\langle,\rangle)$ bir iç çarpım uzayı ve $x,y\in X$ olsun. $\langle x,y\rangle=0$ ise x vektörü y vektörüne ortogonaldir(diktir) denir. $A,B\subset X$ alt kümeleri verildiğinde $\forall a\in A$ ve $\forall b\in B$ için $\langle a,b\rangle=0$ ise A ve B kümelerine ortogonal kümeler denir. Bir A ortogonal kümesinde $\forall a\in A$ için $\|a\|=1$ ise A ya ortonormal bir küme denir[13].

Bir iç çarpım uzayındaki bir kümenin her vektörüne ortogonal vektör sadece sıfır vektörü ise o kümeye tam küme denir.

Bir H Hilbert uzayında bir (x_n) dizisi ortonormal ve tam ise (x_n) dizisine H uzayının bir ortonormal tabanı adı verilir[13].

Bir X vektör uzayı ve bunun L_1 ve L_2 uzayı gibi iki alt uzayı verilmiş olsun. Eğer $\forall x\in X$ vektörü $y\in L_1$ için $z\in L_2$ olmak üzere $x=y+z$ şeklinde tek bir gösterime sahipse X vektör uzayı L_1 ve L_2 alt uzaylarının direkt toplamıdır denir.

Tanım 5.3: X bir vektör uzayı ve M,X in boş olmayan bir alt kümesi için

1. M lineer bağımsızdır;

2. $X=SpanM$ ise

M ye X in bir tabanı veya bir bazı denir[13].

Tanım 5.4: Γ bir rektifiye Jordan eğrisi olsun. $M \subset \Gamma$ olmak üzere $x \in M$ için $f(x) \sim g(x)$ ifadesi

$$\delta \leq \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq \delta^{-1}, \forall\, x \in M$$

olacak şekilde en az bir $\delta > 0$ olduğunu gösterir[15].

$H_+^{p,\alpha}$ uzayını göz önüne alalım. $L_+^{p,\alpha}$ ile $L^{p,\alpha}$ uzayının bir alt uzayı olan ve $H_+^{p,\alpha}$ uzayından γ eğrisine kısıtlanmış fonksiyonlar ile üretilen uzayı gösteriyoruz. $H_+^{p,\alpha}$ ile $L_+^{p,\alpha}$ uzayları izomorftur ve $f \in H_+^{p,\alpha}$ için $f^+(\cdot) = (Jf)(\cdot)$ dir. Burada f^+, γ üzerinde f fonksiyonunun tanjant olmayan sınır değerleridir ve J de karşılık gelen izomorfizm fonksiyonudur. $M_+^{p,\alpha} = M^{p,\alpha} \cap L_+^{p,\alpha}$ ile $\|\cdot\|_{L^{p,\alpha}}$ normuna göre $M^{p,\alpha}$ nın bir alt uzayını gösteriyoruz. $MH_+^{p,\alpha} = J^{-1}\left(M_+^{p,\alpha}\right)$ ile de $H_+^{p,\alpha}$ uzayının bir alt uzayını gösteriyoruz. $f \in H_+^{p,\alpha}$ ve sınır değeri f^+ için $\|f\|_{H_+^{p,\alpha}} = \|f^+\|_{L^{p,\alpha}}$ dır.

Benzer şekilde ω nın dışında da Morrey-Hardy uzayı tanımlanabilir. Bir $D^- = C\backslash\overline{\omega}$ $(\overline{\omega} = \omega \cup \gamma)$ bölgesinde alınan bir analitik f fonksiyonu için Laurent serisi sonsuzda noktanın komşuluğundaysa sonlu k mertebesine sahiptir denir ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{k} a_n z^n\,, k < +\infty, a_k \neq 0. \tag{5.7}$$

Burada; $k > 0$ için $f(z)$ fonksiyonu k mertebesinde bir kutuba sahiptir, $k = 0$ için sınırlıdır; $k < 0$ için ise $(-k)$ mertebesinde sıfıra sahiptir.

Şimdi ise $f(z)$ için ayrışım tanımını yapalım. $f(z) = f_0(z) + f_1(z)$ olmak üzere, $f_0(z)$ kısmına esas kısım, $f_1(z)$ kısmına da düzenli kısım denir. Dolayısıyla, $k \leq 0$ iken $f_0(z) = 0$, $k > 0$ iken $f_0(z)$ k dereceli bir polinomdur. Eğer $f(z)$ sonsuzda $k \leq m$ olacak şekilde bir mertebeye sahipse ${}_mH_-^{p,\alpha}$ sınıfındandır denir.

${}_mMH_-^{p,\alpha}$ sınıfı, $MH_+^{p,\alpha}$ sınıfına benzer şekilde, birim çemberin çevresi üzerinde $\|\cdot\|_{L^{p,\alpha}(\gamma)}$ normuna göre sürekli ötelemeye sahip fonksiyonların ${}_mH_-^{p,\alpha}$ uzayında oluşturduğu uzaydır[15].

Teorem 5.5: $\{e^{int}\}_{n\in Z}$ üslü sistemi $M^{p,\alpha}$, $1 < p < +\infty$, $0 < \alpha \leq 1$, uzayı için bir baz oluşturur[5]. ($M^{p,\alpha}$ uzayı ile önceki bölümlerde tanıttığımız $\bar{L}^{p,\alpha}$ uzayı kastedilmektedir.)

İspat: $\|e^{int}\|_{L^{p,\alpha}} = \left[\sup_{I\subset[-\pi,\pi]} \frac{1}{|I|^{1-\alpha}} \int_I |e^{int}|^p dt\right]^{1/p} = (2\pi)^{\alpha/p}$ olduğunu söyleyebiliriz. Varsayalım ki

$$v_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}, n \in Z.$$

Buradan

$$|v_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi}\|f\|_{L_p}\|e^{-int}\|_{L_q} = \frac{(2\pi)^{1-\alpha/p}}{(2\pi)^{1/p}}\left(\frac{1}{(2\pi)^{1-\alpha}}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^p dt\right)^{1/p}$$

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^{1/p}}\left(\sup_I \frac{1}{|I|^{1-\alpha}}\int_I |f(t)|^p\, dt\right)^{1/p} = (2\pi)^{-(\alpha/p)}\|f\|_{L^{p,\alpha}}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\{v_n\}_{n\in Z} \subset (M^{p,\alpha})^*$ dır. $(M^{p,\alpha})^*$, $M^{p,\alpha}$ uzayının dual uzayıdır. $\forall n,k \in Z$ olmak üzere $v_n(e^{ikt}) = \delta_{nk}$ Kronecker deltası olduğu açıktır. Sonuç olarak $\{e^{int}\}_{n\in Z}$ sistemi $M^{p,\alpha}$ uzayında minimaldir. $\forall f \in M^{p,\alpha}$ için sonsuz mertebeden differansiyellenebilir ve sonlu fonksiyonlar uzayı $C_0^\infty[-\pi,\pi]$, $M^{p,\alpha}$ uzayında yoğun olduğundan $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, f_\varepsilon \in C_0^\infty[-\pi,\pi]$ olur, öyle ki $\|f - f_\varepsilon\|_{L^{p,\alpha}} < \varepsilon$ sağlanır. f_ε fonksiyonunun Fourier serisi $[-\pi,\pi]$ üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsar. $S = \sum_{n=-m}^{m} v_n(f_\varepsilon)e^{int}$ olsun. Buradan $\forall m \geq m_0$ için $\exists m_0 \in N$ vardır öyle ki $\forall t \in [-\pi,\pi]$ için $|f_\varepsilon(t) - S_m(t)| < \varepsilon$ olur. Dolayısıyla

$$\|f_\varepsilon - S_m\|_{L^{p,\alpha}} = \left(\sup_I \frac{1}{|I|^{1-\alpha}}\int_I |f_\varepsilon - S_m|^p\, dt\right)^{1/p} \leq \varepsilon(2\pi)^{\alpha/p}$$

yazılabilir. Buradan

$$\|f - S_m\|_{L^{p,\alpha}} \leq \|f - f_\varepsilon\|_{L^{p,\alpha}} + \|f_\varepsilon - S_m\|_{L^{p,\alpha}} \leq \left(1 + (2\pi)^{\alpha/p}\right)\varepsilon\,,\ \forall m \geq m_0$$

elde edilir. ε keyfi seçildiğinden $M^{p,\alpha}$ uzayında $\{e^{int}\}_{n\in Z}$ sistemi tam olur.

Şimdi de $\{P_m\}$ projeksiyon operatörlerinin düzgün sınırlılığını gösterelim:

$$P_m f = \sum_{n=-m}^{m} v_n(f_\varepsilon) e^{int}, m \in Z.$$

Eğer $\forall t \in [-\pi, \pi]$ için h.h.y $|f(t)| \leq |g(t)|$ ise $\|f\|_{L^{p,\alpha}} \leq \|g\|_{L^{p,\alpha}}$ olur. Klasik duruma benzer olarak

$$P_m f = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-m}^{m} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{i(x-t)n} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_m(x-t)\, dt$$

yazılabilir. Burada

$$K_m(t) = \frac{e^{-imt} - e^{-i(m+1)t}}{1 - e^{it}}$$

dir.

Sonuç olarak S singüler operatörü γ'da tanımlı olmak üzere

$$P_m f = e^{-imx} S\left(e^{i(2m-1)t} f(t)\right) - e^{i(m+1)x} S\left(e^{-i(m+1)t} f(t)\right) \tag{5.8}$$

elde edilir. [10,11] çalışmalarında alınan sonuçlarda S singüler operatörünün $L^{p,\alpha}$, $1 < p < +\infty, 0 < \alpha \leq 1$, uzayında sınırlı olduğu gösterilmiştir. (5.8) den teorem 4.5 gereği

$\|P_m f\|_{L^{p,\alpha}} \leq C \|f\|_{L^{p,\alpha}}$, $\forall f \in \bar{L}^{p,\alpha}$

elde edilir. Burada C sabiti m ve f den bağımsızdır. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.6: S singüler operatörü $M^{p,\alpha}$, $1 < p < +\infty$, $0 < \alpha \leq 1$ uzayında sınırlıdır[5].

5.2 İzomorfizm Teoremleri

Teorem 5.7: $A^{\pm 1}$; $B^{\pm 1} \in L_\infty(-\pi, \pi)$ olsun. (5.1) ile verilen sistem sadece $Tf = g$, $g \in M^{p,\alpha}$ ile verilen eşitlik $M^{p,\alpha}$ uzayında çözülebilir olduğunda bu uzay için bir baz oluşturur[15].

İspat: İspata bazı gerekli bilgileri vererek başlayalım. Daha önce bahsettiğimiz teorem 5.2 den yararlanacağız. Ayrıca Cauchy tip integrallerin sınır değerleri için

$$\Phi^{\pm}(\tau) = \pm \frac{1}{2} f(\tau) + (Sf)(\tau), \qquad \text{h.h.h } \tau \in \gamma \tag{5.9}$$

ile verilen Sokhotski-Plemelj formülüne ihtiyaç duyacağız. Burada

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\tau)d\tau}{\tau - z}, f\left(e^{it}\right) \in L_1(-\pi, \pi) \tag{5.10}$$

dır ve $S(\cdot)$ ile gösterilen

$$(Sf)(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - \tau}\,, \tau \in \gamma \tag{5.11}$$

singüler operatörüdür.

Şimdi de $1 < p < +\infty$ ve $0 < \alpha < 1$ için aşağıdaki direkt ayrışımın doğruluğunu gösterelim.

$$L^{p,\alpha} = H_{+}^{p,\alpha} + {}_{-1}H_{-}^{p,\alpha} \tag{5.12}$$

$f \in L^{p,\alpha}$ için $f \in L_p$ olduğunu biliyoruz. (5.10) ile verilen Cauchy tip integrali ele aldığımızda teorem 3.5 gereği $|z| < 1$ için $\Phi(z) \in H_{+}^{p,\alpha}$ ve $|z| > 1$ için $\Phi(z) \in {}_{-1}H_{-}^{p,\alpha}$ olur. Sokhotski-Plemelj formülünden(5.9) :

$$f(\tau) = \Phi^{+}(\tau) - \Phi^{-}(\tau)\,, \quad \text{h.h.h } \tau \in \gamma \tag{5.13}$$

dır.

${}_{-1}L_{-}^{p,\alpha}$ uzayı ${}_{-1}H_{-}^{p,\alpha}$ dan γ ya kısıtlanmış fonksiyonlar ile üretilen uzayı belirtir. Bu uzayın $L^{p,\alpha}$ nin bir alt uzayı olduğu açıktır. $L_{+}^{p,\alpha} \cap {}_{-1}L_{-}^{p,\alpha} = \{0\}$ olduğundan (5.12) ifadesinden aşağıdaki direkt ayrışımı elde ederiz:

$$L^{p,\alpha} = L_{+}^{p,\alpha} + {}_{-1}L_{-}^{p,\alpha} \tag{5.14}$$

$H_{+}^{p,\alpha} \leftrightarrow L_{+}^{p,\alpha}$ ve ${}_{-1}H_{-}^{p,\alpha} \leftrightarrow {}_{-1}L_{-}^{p,\alpha}$ olarak belirlediğimizde (5.12) ifadesini elde etmiş oluruz.

Teo 5.6 ü (5.12) ifadesine uygularsak benzer yolla $M^{p,\alpha} = MH_{+}^{p,\alpha} + {}_{-1}MH_{-}^{p,\alpha}$ ifadesinin sağlandığını görürüz.

$P^{+}: M^{p,\alpha} \to M_{+}^{p,\alpha} \wedge P^{-}: M^{p,\alpha} \to {}_{-1}M_{-}^{p,\alpha}$

ile (5.11) ayrışımı üzerinde üretilmiş $P^{\pm}$ projeksiyon operatörleri olsunlar. Yine aynı uzay üzerinde $T^{\pm}$: $M^{p,\alpha} \to M^{p,\alpha}$ tanımı ile

$$T^{+}f = Af \ \wedge T^{-}f = Bf\ ,\ \ \forall\, f\ \in\ L^{p,\alpha}$$

şeklinde çarpım operatörlerini tanımlayarak asıl ispatımıza geçebiliriz.

$A^{\pm 1}$; $B^{\pm 1} \in L_{\infty}(-\pi,\pi)$ olsun. (5.1) ile verilen sistemin $M^{p,\alpha}$ uzayı için bir baz oluşturduğunu kabul edelim. $\forall\, g\ \in M^{p,\alpha}$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi açalım.

$$g(t) = A(t)\sum_{n=0}^{\infty} g_n e^{int} + B(t)\sum_{n=1}^{\infty} g_{-n}e^{-int}$$

$A^{\pm}$ ve $B^{\pm} \in L_{\infty}$ olduğundan lemma 4.4 den dolayı $f^{+}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n e^{int}$ ve $f^{-}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_{-n}e^{-int}$ serileri $M^{p,\alpha}$ uzayındaki bazı fonksiyonları temsil eder. Varsayalım ki

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{int}\,, t \in [-\pi,\pi]$$

olsun. $f \in M^{p,\alpha}$ olduğu açıktır. $f^{+} \in M_{+}^{p,\alpha}$ ve $f^{-} \in {}_{-1}M_{-}^{p,\alpha}$ olduğunu gösterelim.

$$\int_{\gamma} f^{+}(arg\xi)\,\xi^{n}d\xi = i\int_{-\pi}^{\pi} f^{+}(t)e^{i(n+1)t}\,dt$$

$$= i\sum_{n=0}^{\infty} g_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k+n+1)t}dt$$

$$= 0, \forall\, n\ \in\ Z_{+}$$

ifadesine sahibiz. Privalov teoreminden [23] $f^{+}(t)$ nin $F^{+} \in H_1^{+}$ fonksiyonu için sınır değeri olduğunu biliyoruz, öyle ki

$$F^{+}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(arg\xi)}{\xi - z}d\xi\,, |z| < 1 \qquad (5.15)$$

Buradan

$$F^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} g_n \frac{e^{int}}{e^{it}-z} de^{it}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty} g_n \int_\gamma \frac{\xi^n d\xi}{\xi - z}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n, \qquad |z| < 1$$

elde ederiz. $f \in M^{p,\alpha}$ olduğundan (5.14) gereği $F^+ \in MH_+^{p,\alpha}$ olur. Benzer şekilde

$$F^-(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_{-n} z^{-n}, |z| > 1$$

ile $F^- \in {}_{-1}MH_-^{p,\alpha}$ olduğu gösterilebilir.

$T = T^+P^+ + T^-P^-$ operatörünü göz önüne alalım.

$$Tf = T^+P^+f + T^-P^-f = T = T^+f^+ + T^-f^- = A(\cdot)f^+ + B(\cdot)f^+ = g$$

Son durumda eşitlik

$$Tf = g\,, \quad g \in M^{p,\alpha} \tag{5.16}$$

halini alır ve bu eşitlik $\forall\, g \in M^{p,\alpha}$ için yine bu uzayda bir çözüme sahiptir. $f \in KerT$ olsun. f elemanını $\{e^{int}\}_{n\in Z}$ bazı ile ifade edelim.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{int}.$$

Buradan

$$0 = Tf = A(t)\sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{int} + B(t)\sum_{n=1}^{\infty} f_{-n} e^{-int}$$

yazılabilir. (5.1) sistemi $M^{p,\alpha}$ için bir baz oluşturduğun $\forall\, n \in Z$ için $f_n = 0$ dır. Yani $KerT = \{0\}$ dır. Banach teoreminden, $T \in L(M^{p,\alpha})$ için $T^{-1} \in L(M^{p,\alpha})$ vardır ve bu da bize (5.16) eşitliğinin çözülebilirliğini sağlar.

Aksine (5.16) eşitliği $M^{p,\alpha}$ uzayında çözülebilir olsun. $\forall\, g \in M^{p,\alpha}$ için $f = T^{-1}g$ olsun. f elemanını $\{e^{int}\}_{n\in Z}$ bazı ile yazalım.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{int}\,, t \in [-\pi, \pi].$$

Projeksiyon operatörü altında görüntüsünü aldığımızda

$$P^+ f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{int}; P^- f = \sum_{n=1}^{\infty} f_{-n} e^{-int}$$

olur. Dolayısıyla

$$Tf = A(t)\sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{int} + B(t)\sum_{n=1}^{\infty} f_{-n} e^{-int} = g(t)$$

yazılabilir. Görüldüğü üzere $M^{p,\alpha}$ uzayındaki her eleman (5.1) sistemi ile ifade edilebilir. Bu yazılışın tek türlü olduğunu gösterelim.

$$A(t)\sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{int} + B(t)\sum_{n=1}^{\infty} f_{-n} e^{-int} = 0$$

olsun. Varsayalım ki

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{int}$$

olsun. $f \in M^{p,\alpha}$ olduğu açıktır. Buradan

$$Tf = A(t)\sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{int} + B(t)\sum_{n=1}^{\infty} f_{-n} e^{-int} = 0$$

ise $f = T^{-1}0 = 0$ dir. Dolayısıyla $\forall n \in Z$ için $f_n = 0$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.8: $A^{\pm}$; $B^{\pm} \in L_{\infty}(-\pi, \pi)$ olsun. Eğer (5.1) sistemi $M^{p,\alpha}$,$1 < p < +\infty, 0 < \alpha \leq 1$, uzayı için bir baz oluşturuyorsa o zaman bu uzaydaki $\{e^{int}\}_{n\in Z}$ klasik üslü sistemine izomorftur. Burada izomorfluk T_0 operatörü anlamındadır. Yani

$$(f; g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$$

olmak üzere

$$(T_0 f)(t) = A(t)\sum_{n=0}^{\infty}\left(f; e^{inx}\right)e^{int} + B(t)\sum_{n=1}^{\infty}\left(f; e^{-inx}\right)e^{-int} \tag{5.17}$$

[15].

İspat: (5.1) sistemi $M^{p,\alpha}$ uzayı için bir baz oluştursun. $\forall f \in M^{p,\alpha}$ için

$$f^{+}(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(f; e^{inx}\right)e^{int}$$

ve

$$f^{-}(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(f; e^{-inx}\right)e^{-int}$$

serilerinin $M^{p,\alpha}$ uzayında yakınsadığı açıktır. $\|f^{\pm}\|_{p,\alpha} \leq c\|f\|_{p,\alpha}$ olduğundan (5.17) ifadesinden $T_0 \in L(M^{p,\alpha})$ olur. $KerT_0 = \{0\}$ olduğunu gösterelim. $f \in KerT_0$ için

$$(T_0 f)(t) = A(t)\sum_{n=0}^{\infty}\left(f; e^{inx}\right)e^{int} + B(t)\sum_{n=1}^{\infty}\left(f; e^{-inx}\right)e^{-int} = 0$$

dır. (5.1) sistemi $M^{p,\alpha}$ uzayının bazı olduğu için $\left(f; e^{inx}\right) = 0$ dır ve yine $\{e^{inx}\}_{n\in Z}$ sistemi $M^{p,\alpha}$ nin bir bazı olduğundan $\forall n \in Z$ için $f = 0$ dır. Dolayısıyla $KerT_0 = \{0\}$ elde edilir. Şimdi $R_{T_0} = M^{p,\alpha}$ olduğunu gösterelim. $g \in M^{p,\alpha}$ keyfi bir eleman olmak üzere teorem 3.9 dan $Tf = g$ için en az bir $f \in M^{p,\alpha}$ vardır. $T_0 = T$ olduğu açıktır ve buradan $R_T = M^{p,\alpha}$ olduğu görülür. Banach teoreminden T_0, $M^{p,\alpha}$ uzayında bir

otomorfizmdir. $\forall n \in Z$ için $T_0\left[e^{inx}\right] = A(t)e^{int}$ ve $\forall n \in N$ $T_0\left[e^{-inx}\right] = B(t)e^{-int}$ olduğu açıktır ve böylece ispat tamamlanmış olur[15].

Bu teoremle birlikte aşağıdaki sonuç ortaya çıkar.

Sonuç 5.9: Eğer perturbe üslü sistemi

$\left\{e^{i(n+\alpha signn)t}\right\}_{n\in Z}$

$M^{p,\alpha}, 1 < p < +\infty, 0 < \alpha \leq 1,$ için bir baz oluşturuyorsa yine bu uzaydaki $\left\{e^{int}\right\}_{n\in Z}$ klasik üslü sistemine izomorftur[15].

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER

C. Morrey tarafından tanıtılan Morrey uzaylarındaki çalışmalar Morrey-tip uzaylara da taşınmıştır. Yaklaşım teorisinin bazı problemleri, Maksimal ve Singüler operatörlerin uygulamaları ve sistemlerin baz olma kriterleri bu uzaylarda da araştırılmıştır.

Bu ve benzeri araştırmalar [5], [6], [15] çalışmalarında ayrıntılı incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] Morrey C. B., (1938). “On the Solutions of-quasi-linear Elliptic Partial Differential Equations”, Tnas. Amer. Math. Soc., 43: 207-226.

[2] Brezis H.,2011. Func. Anal. Sobolev Sp. And Partial Differentail Equations, Springer, New York.

[3] Israfilov D. M. ve Tozman N.P., (2008). “Approxiamtion by Polynomials in Morrey-Smirnov Classes”, East J. Approx., 3: 255-269.

[4] Israfilov D.M. ve Tozman N.P., (2011). “ Approxiamtion in Morrey-Smirnov Classes”, East Azerbaijan J. Math. 1: 99-113.

[5] Bilalov B.T. ve Quliyeva A.A., (2014). “On Basicity of Exponential Systems in Morrey type Spaces, International Journal of Mathematics, 25: 6: 1-10.

[6] Bilalov B.T., Gasymov T. ve Guliyeva A.,(2014). “On Solvability of Riemann Boundary Value Problem in Morrey-Hardy classes”.

[7] J. Garnett, (2007). Bounded Analytic Functions, Springer, University of California.

[8] V.S. Guliev, N.N. Garakhanova ve Zeren Y., (2008). “Pointwise and Integral Estimates for the B-Riesz Potential in terms of B-maximal and B-fractional Maximal Functions”, Sibirsk. Mat., 6: 49.

[9] V.S. Guliev, J.J. Hasanov ve Zeren Y., (2013). “Necessary and Sufficient Conditions fort he Boundedness of the Riesz Potential in Modified Morrey Spaces”, reposity.enu.kz.

[10] V. Kokilashvili ve A. Meskhi, (2008). “Boundedness of Maximal and Singular Operator in Morrey Spaces with Variable Exponent”, Govern College Univ. 72: 1-11.

[11] Samko N., (2009). “Weight Hardy and Singular Operators in Morrey spaces”, Journal of Mathematical Analysis and Application, 1: 183-188.

[12] Milman V. ve Eidelman Y., (2004). Functional Analysis, American Mathematical Society, Rhode Island.

[13] Musayev B. ve Alp M., (2000). Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları, Ankara.

[14] Mısırlıoğlu T., Reel Analiz, http://udes.ikü.edu.tr , 09 Ocak 2016.

[15] Guliyeva F.A. ve Abdullayeva R.H. “On isomorphism of two Bases in Morrey-Lebesgue type spaces”, Sahand Communications in Math. Analysis, 4: 79-90.

[16] Paley R. ve Wiener N., (1934). Fourier Transforms in the Complex Domain, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 19.

[17] Levinson N., (1956). Distribution of the Roots of Entire Functions, M., GITL 1956.

[18] Kadets M. I., (1964). “On Exact Value of Paley-Wiener Constant”, DAN SSSR.

[19] Sedletskiy A.M., (1982). “Biorthogonal Expansions in Series of the Exponents on the Intervals of a Real Axis”, Usp. Mat. Nauk, 5: 51-95.

[20] Moiseev E.I., (1984). “On Basicity of the System of Sines and Cosines”, DAN SSSR, 4: 794-798.

[21] Moiseev E. I., (1998). “On Basicity of a System of Sines, Cosines in weight Space”, Diff. Funct., 19: 40-44.

[22] Pukhov S.S. ve Sedletskiy A. M.,(2009). “Bases of Exponents, Sines and Cosines in weighs Spces on a Finite Interval”, Dokl. RAN, 4: 452-455.

[23] Goluzin G. M., (1966). “Geometrical Theory of a Complex Variable Functions”, M., Nauka, 626.

[24] Zorko C.T., (1986). “Morrey space”, Proc. of the Amer. Math. Society, 98: 4, USA.

[25] Peetre J., (1964). “On the theory of $L^{p,\lambda}$ spaces”, J. Funct. Anal., 4: 71-87.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Şeyma ÇETİN

Doğum Tarihi ve Yeri : 12.01.1989/Tokat

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : seyymacetin@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üni.	2016
Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üni.	2014
Lise	Sayısal	Yenibosna Y.D.A Lisesi	2008

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2016	Sınav Kursu	Matematik Öğretmeni

YAYINLARI

Bildiri

1. Zeren Y. ve Çetin Ş., (2016). “On Some Properties of Poisson and Cauchy type Integrals in weighted Morrey type Spaces”, ICAA Kongresi, 12-15 Temmuz 2016 Kırşehir.

2. Bilalov B.T. ve Çetin Ş., (2015). “On Weighted Morrey Type Spaces”, MADEA-7, 8-13 Eylül 2015, Bakü.