T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OPTİK FİBERDE KULLANILAN DALGA DENKLEMLERİNİN İNCELENMESİ

Seçil DEMİRKAYA

YÜKSEK LISANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

Danışman
Doç. Dr. Ayten ÖZKAN

Mart, 2026

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OPTİK FİBERDE KULLANILAN DALGA DENKLEMLERİNİN İNCELENMESİ

Seçil DEMİRKAYA tarafından hazırlanan tez çalışması 23.03.2026 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı **YÜKSEK LISANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Ayten ÖZKAN
Yildiz Technical University
Danışman

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Ayten ÖZKAN, Danışman
Yildiz Technical University _____

Prof. Dr. Özgür YILDIRIM, Üye
Yildiz Technical University _____

Doç. Dr. Seda YAMAÇ AKBIYIK, Üye
İstanbul Topkapı University _____

Danışmanım Doç. Dr. Ayten ÖZKAN sorumluluğunda tarafımca hazırlanan "Optik Fiberde Kullanılan Dalga Denklemlerinin İncelenmesi'' başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim.

Bu tez çalışması sürecinde, tez sahibinin kontrolü altında [dil ve ifade bütünlüğünü güçlendirmek, teknik süreçleri desteklemek, literatür taraması, kodlama ve veri görselleştirme] amacıyla Üretken Yapay Zekâ (ÜYZ) araçlarından [kullanılan ÜYZ aracının/araçlarının adı ve versiyonu] kullanılmıştır.

ÜYZ araçlarının yanlış veya gerçek dışı bilgi (halüsinasyon) üretebilme riski taşıdığının farkında olduğumu, bu araçlardan elde edilen tüm çıktıları doğruluk, bütünlük, güvenilirlik ve etik standartlar açısından dikkatle kontrol ettiğimi beyan ederim.

ÜYZ kullanımı hiçbir aşamada yazarın entelektüel katkısının, bilimsel muhakemesinin ve özgün fikir üretiminin yerine geçmemiştir. Tez çalışmasında yer alan tüm bilgi, veri, analiz, iddia ve referansların doğruluğu, güncelliği ve bilimsel geçerliliğine ilişkin sorumluluk tamamen tarafıma aittir.

Beyanımın aksinin tespiti hâlinde doğabilecek her türlü idari ve hukuki sorumluluğu kabul ederim.

Seçil DEMİRKAYA

İmza

Bu çalışma çok değerli aileme ithaf edilmiştir.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın tamamlanması, birçok değerli insanın desteği ve katkısı sayesinde mümkün olmuştur. Onlara minnet duygularımı ifade etmek isterim.

Her zaman yanımda olan, sabırla desteklerini esirgemeyen aileme en derin şükranlarımı sunuyorum. Hayat yolculuğumdaki en önemli dayanaklarım sizlersiniz.

Değerli arkadaşlarım Burcu BATIBAY YUMURTACI ve Esra SOSLU'ya, bu süreçteki motivasyon, anlayış ve samimi dostlukları için içten teşekkürlerimi iletiyorum. Varlığınız bu yolculuğu daha anlamlı kıldı.

Danışmanım Sayın Ayten ÖZKAN'a ve Sayın Mehmet ÖZKAN'a ise, bilgisi, rehberliği, sabrı ve değerli eleştirileri için minnettarım. Bu çalışmanın her aşamasında gösterdiği özverili yaklaşım ve akademik katkılar için kendisine şükranlarımı sunarım.

Son olarak, tez sürecimde doğrudan veya dolaylı olarak katkısı olan tüm kişi ve kurumlara teşekkür ederim.

Seçil DEMİRKAYA

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ vii

KISALTMA LİSTESİ viii

ŞEKİL LİSTESİ ix

ÖZET x

ABSTRACT xi

1 GİRİŞ 1

1.1 Literatür Özeti 1

2 KESİRLİ TÜREV TANIMLARI ve KULLANILAN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ 3

2.1 Kesirli Türev: Tanım, Tür ve Özellikler 3

2.2 Uyumlu Türev 3

2.3 M Kesikli Türev 4

2.4 Yöntemler 5

2.4.1 Düzenlenmiş w/g genişletme yaklaşımı 5

2.4.2 Sardar Alt-Denklem Yönteminin Geliştirilmiş Versiyonu . . 8

3 DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ VE MODÜLASYON KARARSIZLIĞI 11

3.1 Kesirli Pertürbe Gerdjikov-Ivanov Denkleminin Analitik Çözümleri 11

3.1.1 Düzenlenmiş w/g Yaklaşımının Uygulanması 12

3.1.2 Uyumlu Kesirli Türev ile Üretilen Çözümlerin Grafiksel İncelenmesi 16

3.1.3 M Kesikli Türev ile Elde Edilen Çözüm ve Grafiksel İnceleme 17

3.2 Chen-Lee-Liu Denkleminin Analitik Çözümleri 17

3.2.1 Sardar Alt Denklem Yönteminin Geliştirilmiş Versiyonun Uygulanması 18

3.2.2 Uyumlu Kesirli Türev ile Üretilen Çözümlerin Grafiksel İncelenmesi 20

3.2.3 M Kesikli Türevle Üretilen Çözümlerin Grafiksel İncelenmesi 22
3.3 Modülasyon Karasızlığı 23
3.3.1 Zaman Kesirli Pertürbe Gerdjikov-Ivanov Denkleminin Modülasyon Kararsızlığı 23
3.3.2 Zaman Kesirli Pertürbe Chen-Lee-Liu Denkleminin Modülasyon Kararsızlığı 24

4 SONUÇ **26**

KAYNAKÇA **27**

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR **29**

SİMGE LİSTESİ

α	alfa
β	beta
Δ	delta
ϵ	epsilon
$\Gamma(\beta)$	Gama Fonksiyonu
ξ	ksi
$\sum$	toplam sembolü
Ω	omega

KISALTMA LİSTESİ

CLL	Chen-Lee-Liu denklemi
DOSD	Doğrusal olmayan Schrödinger denklemi
GI	Gerdjikov-Ivanov denklemi
LOKDD	Lineer olmayan kısmi differansiyel denklemler
KPGI	Kesirli pertürbe Gerdjıkov-Ivanov denklemi

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 3.1 (3.13) denkleminin reel kısmı, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$, $a = -1$, $b = 1$, $c = 1$, $d_2 = -2$, $d_1 = 1$, $\alpha = 0.5$ 16
Şekil 3.2 (3.13) denkleminin sanal kısmı, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$, $a = -1$, $b = 1$, $c = 1$, $d_2 = -2$, $d_1 = 1$, $\alpha = 0.5$ 16
Şekil 3.3 (3.12) denkleminin reel kısmı, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$, $a = -1$, $b = 1$, $c = 1$, $d_2 = -2$, $d_1 = 1$, $\alpha = 0.5$ 16
Şekil 3.4 (3.12) denkleminin sanal kısmı,$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$, $a = -1$, $b = 1$, $c = 1$, $d_2 = -2$, $d_1 = 1$, $\alpha = 0.5$ 16
Şekil 3.5 (3.13) denkleminin reel kısmı 17
Şekil 3.6 (3.13) denkleminin sanal kısmı 17
Şekil 3.7 (3.12) denkleminin reel kısmı 17
Şekil 3.8 (3.12) denkleminin sanal kısmı 17
Şekil 3.9 $K_1^{\pm}(\xi)$ çözümünde α değerlerinin değişiminde grafiğin nasıl değiştiği görülmektedir. 21
Şekil 3.10 $K_2^{\pm}(\xi)$ çözümünde α değerlerinin değişiminde grafiğin nasıl değiştiği görülmektedir. 21
Şekil 3.11 $K_1^{\pm}(\xi)$ çözümünde α değerlerinin değişiminde grafiğin nasıl değiştiği görülmektedir. 22
Şekil 3.12 $K_2^{\pm}(\xi)$ çözümünde α değerlerinin değişiminde grafiğin nasıl değiştiği görülmektedir. 22

ÖZET

OPTİK FİBERDE KULLANILAN DALGA DENKLEMLERİNİN İNCELENMESİ

Seçil DEMİRKAYA

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Ayten ÖZKAN

Sunulan çalışmada kesirli pertürbe Gerdjikov-Ivanov denklemi ve kesirli pertürbe Chen-Lee-Liu denklemi ele alınmıştır. Bu denklemler uyumlu türev ve M-kesikli türev ile incelenmiştir. Denklemlerin analitik çözümleri yapılırken düzenlenmiş w/g genişletme yaklaşımı ve modifiye Sardar alt denklem metodu kullanılmıştır. Ayrıca denklemlerin modülasyon kararsızlıkları incelenmiştir. Bu çalışma optik fiberde kullanılan doğrusal olmayan kesir türevli denklemlerin analitik çözümlerinin daha iyi anlaşılmasına katkı sağlamayı ve modülasyon kararsızlığının denklemlere uygulanmasının anlaşılmasını amaçlamaktadır.

Anahtar Kelimeler: Gerdjikov-Ivanov Denklemi, Chen-Lee-Liu Denklemi, Uyumlu kesirli türev, M-kesikli türev, Düzenlenmiş w/g genişletme yaklaşımı, Sardar Alt Denklem Yönteminin Geliştirilmiş Versiyonu

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ABSTRACT

INVESTIGATION OF THE WAVE EQUATIONS IN OPTICAL FIBER

Seçil DEMİRKAYA

Department of Mathematics
Master of Science Thesis

Supervisor: Doç. Dr. Ayten ÖZKAN

These equations are examined within the frameworks of the conformable derivative and the M-truncated derivative. For constructing analytical solutions, improved w/g expansion method and the modified Sardar sub-equation method are employed. Furthermore, the modulation instability of these equations is analyzed. The aim of this work is to contribute to a deeper understanding of analytical solutions for nonlinear fractional derivative equations used in optical fibers and to clarify the application of modulation instability analysis to such equations.

Keywords: Gerdjikov-Ivanov equation, Chen-Lee-Liu equation, conformable fractional derivative, fractional derivative M, Improved w/g expansion method, Improved Version of the Sardar Sub-Equation Method

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND ENGINEERING

1
GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Nonlineer yapılı kısmi diferansiyel denklemler, fizikten mühendisliğe, biyolojiden ekonomi ve finans gibi birçok disiplinde temel bir rol oynamaktadır. DKDD'ler, karmaşık sistemlerin davranışını anlamak için gereklidir. Bu sistemler, gerçek hayattaki sorunların analizi için modellenir.Doğrusal olmayan zaman değişkenli diferansiyel denklemlere evrim denklemleri denir ve ısı, dalga ve Schrödinger denklemlerini örnek olarak gösterilebilir. Schrödinger denklemleri özellikle kuantum mekaniğinde zamanın değişimine göre kuantum durumunu modelleyen kısmi diferansiyel denklemlerdir. Fiber optik kablolarda ışık yayılımını, derin yüzey su dalgalarını, okyanuslardaki anarmal dev dalgaları veya plazmalardaki Langmuir dalgalarının davranışlarını anlamamızı sağlayan denklemleri modellemede Schrödinger denkleminden türetilen denklemler kullanılır[1]. Optik fiberlerde bilgi aktarımını tanımlamak için en yaygın şekilde kullanılan denklemlerden biri doğrusal olmayan Schrödinger denklemidir[2].

Doğrusal olmayan Schrödinger denklemi, optik fiberlerde soliton dinamiği için bir model olarak alınır. 1844 yılında Russel tarafından bir su yüzeyi dalgası olarak ilk soliton gösterilmiştir. Kortewege de Vries , yüzey dalgasının uzak alan özelliklerini en düşük dereceden dağılım ve doğrusal olmama terimleriyle tanımlayan model denklemini 1895 te türetti. Bu özel denklem periyodik sınır koşullarında sayısal olarak çözüldüğünde bir dizi yalnız dalganın ortaya çıktığı ve birbirini geçtiğini 1965 yılında Zabusky ve Kruskal tarafından gösterilir. Kararlılıklarından dolayı bu dalgalara "soliton" adını vermişlerdir. Solitonlar, DOSD'nin özel bir çözüm türüdür ve bir optik fiberde ışığın sabit hızda ve şekilde seyahat etmesini sağlar.Optik solitonların varlığını 1973 yılında Hasegawa ve Tappert tarafından teorik olarak gösterilmiştir[3]. Optik solitonlar fiberdeki grup hız dağılımı ile Kerr etkisinin arasındaki denge sonucu oluşur. Grup hız dağılımı yani dispersiyon dalgayı fiber boyunca yayar. Fiberdeki farklı frekanslı ışık bileşenleri farklı hızlarda ilerler ve bu durumda zamanla darbe yayılır ve genişler. Kerr etkisi ise ışık şiddetine bağlı

kırılma indisinin değişimine denir. Kerr etkisi dalgayı odaklar ve toparlar. Işığın yoğun olduğu merkezde kırılma indisi kenarlara göre daha yüksek olur. Bu da ışık darbesini kendi üzerinde toparlayıp enerjiyi merkeze toplar. Dispersiyon ışık darbesini yaymaya çalıştıkça Kerr etkisi onu aynı oranda daraltır veya tam tersi durumda Kerr etkisi darbeyi daraltmaya çalıştıkça , dispersiyon dağıtmaya çalışır. Bu durumda ışık darbesi şeklini, genişliğini ve hızını korur ve buna optik soliton denir. Solitonlar, DOSD'nin özel bir çözüm türü olup, bilimde önemli bir yer tutar. Solitonların en önemli özelliği, birbirleriyle çarpıştıklarında şekillerini ve hızlarını koruyabilmeleridir[4],[5]. Solitonlar, ışığın optik fiberda bozulmadan ve sabit hızda ilerlemesini sağlar. Solitonların dış kuvvetlere karşı tepkisini hesaplamak için perturbasyon yöntemleri geliştirilmiştir. Ginzburg Landau denklemi, Sasa-Satsuma denklemi, Laksmanan-Porsezian-Daniel modeli, Chen-Lee-Liu denklemi gibi örnekler, DOSD'den türeterek solitonların yayılmasını modellemektedir[6].

Pertürbe Gerdjikov-Ivanov denklemi ışığın doğrusal olmayan ortamlarda yayılmasını modeller. Doğrusal olmayan Schrödinger denkleminden türetilmiştir. Doğrusal olmayan Schrödinger denklemi 3. dereceden doğrusal olmayanlık içerir ve bu da çok yüksek şiddetli ışık darbelerini modellemede yetersiz kalır. Pertürbe Gerdjikov-Ivanov denklemi 5. dereceden doğrusal olmayanlık içerir. Doğrusal olmayan Schrödinger denklemine göre aşırı koşullardaki ışık darbedelerini ve etkilerini daha iyi modeller [7].

Chen-Lee-Liu Denklemi DOSD nin türevlerinden biridir. Optik fiberlede soliton dalga yayılımını incelemek için kullanılır.Ayrıca soliton soğutma, meta malzemeler , optik kuplörler ve optoelektronik cihazlarda da kullanılır [8]. Pertürbe edilmiş CLL denklemi DOSD' den farklı olarak doğrusal olmayan terimin türevsel formunu içerir ve bu da doğrusal olmayan optikte daha belirgin role sahiptir.

2
KESİRLİ TÜREV TANIMLARI ve KULLANILAN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

2.1 Kesirli Türev: Tanım, Tür ve Özellikler

Bu araştırmada kullanılan kesirli türevlerden Uyumlu türev tanımı ve M Kesikli türev tanımları verilecektir.

2.2 Uyumlu Türev

Kesirli türev L-Hospital tarafından 1695 yılındaki türev tanımındaki türevin tam sayı değil de rasyonel bir ifade olması durumunda ne anlama geleceğini sormasıyla başlayan bir serüvendir [9].Yıllar boyunca araştırmacılar bu soruya cevap vermeye çalışmış ve çeşitli kesirli türev tanımlarını ortaya koymuşlardır.Kesirli türev günümüzde fizik, ekonomi, mühendislik gibi bir çok alanda gerçek hayat problemlerini modellemede tamsayılı dereceden türevden çok daha başarılı olmuştur. Özellikle kesirli türev zaman ve uzay bakımından sürecleri çok iyi bir şekilde ifade etmiştir. [10]. Bu zamana kadar bir çok kesirli türev tanımı verilmiştir. Bunlardan bazıları Caputo,Grünwald–Letnikov ve Riemann–Liouville türevleridir [11]. 2014 yılında Khalil ve arkadaşları uyumlu türev ve integral kavramını açıklamışlardır [9]. Özellikle uyumlu türev klasik türeve çok benzer özellikler göstermekte ve doğrusal özellik, çarpım kuralı, bölüm kuralı, Rolle teoremi ve ortalama değer teoremi gibi temel özellikleri sağlamaktadır [12].

Tanım 2.1 $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonun $t > 0$ noktasındaki, $0 < \alpha \leq 1$ mertebesinden Uyumlu Kesirli Türevi aşağıdaki gibidir [13]:

$$T_\alpha f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}, \quad t > 0 \tag{2.1}$$

Bu tanımda $\alpha = 1$ olduğunda klasik türeve dönüştüğünü gösteriyor.

Teorem 2.1 : [14]$\alpha \epsilon (0, 1]$ olmak üzere f ve g fonksiyonları $\alpha > 0$ noktasında

türevlenebilir olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $T_\alpha(c_1 f + c_2 g) = c_1 T_\alpha(f) + c_2 T_\alpha(g)\ \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
2. $T_\alpha(t^n) = n t^{n-\alpha}\ \forall\ n \in \mathbb{R}$
3. $T_\alpha(c) = 0$ sabit fonksiyon $f(t) = c$
4. $T_\alpha(fg) = g T_\alpha(f) + f T_\alpha(g)$
5. $T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g T_\alpha(f) - f T_\alpha(g)}{g^2}$
6. f fonksiyonu türevlenebilir ise $T_\alpha(f)(t) = (t)^{1-\alpha} f'(t)$.

2.3 M Kesikli Türev

Katugampola 2014'te, Leibniz ve Newton kalkülüsündeki temel kuralları sağlayan ve konformable türev ile benzerlikler gösteren alternatif bir kesirli türev operatörü ortaya koymuştur [15].Daha sonra, Sousa ve Oliveira [9], 2017 yılında, bir parametreye sahip Mittag-Leffler fonksiyonunu çekirdek olarak kullanan ve tamsayı mertebeli kalkülüsün temel özelliklerini koruyan bir M-kesirli türev tanımı geliştirmişlerdir [16].Tamsayı mertebeli türevlerin aksine, kesirli diferansiyel denklemler, sistemlerin geçmiş davranışlarına bağımlılığını (hafıza) ve kalıtımsal dinamiklerini doğal bir şekilde içerdiğinden, modelleme ve analizde daha kapsamlı bir çerçeve sunar [17].

Tanım 2.2 [16] $0 < \alpha \leq 1$, $\beta > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere f, g fonksiyonları $t > 0$ noktasında α türevlenebilir olsun .

$$\mathrm{iD}^{\alpha,\beta} M f(t) = \lim \varepsilon \to 0 \frac{f(t, \mathrm{iE}_\beta(\varepsilon t^{-\alpha})) - f(t)}{\varepsilon}, \quad \forall t > 0, \tag{2.2}$$

burada $\mathrm{iE}_\beta(\cdot)$, bir parametreli truncated (budanmış) Mittag-Leffler fonksiyonudur.

$$\mathrm{iE}\beta(z) = \sum k = 0^\infty \frac{z^k}{\Gamma(\beta k + 1)}, \tag{2.3}$$

burada $\Gamma()$, Gama fonksiyonudur. Eğer f, $a > 0$ olmak üzere bir $(0, a)$ açık aralığında α-türevlenebilir ise ve
$\lim_{t \to 0^+} \mathrm{iD}^{\alpha,\beta} M f(t)$ limiti mevcut ise, o zaman:

$$\mathrm{iD}^{\alpha,\beta} M f(0) = \lim_{t \to 0^+} \mathrm{iD}_M^{\alpha,\beta} f(t). \tag{2.4}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.2 [16]$0 < \alpha \leq 1$, $\beta > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere ve f, g fonksiyonları bir

$t > 0$ noktasında α-türevlenebilir olsun. O zaman:

1. Doğrusallık:
$$\mathrm{iD}_M^{\alpha,\beta}(af + bg)(t) = a\,\mathrm{iD}_M^{\alpha,\beta} f(t) + b\,\mathrm{iD}_M^{\alpha,\beta} g(t)$$

2. Çarpım kuralı:
$$\mathrm{iD}_M^{\alpha,\beta}(f \cdot g)(t) = f(t)\,\mathrm{iD}_M^{\alpha,\beta} g(t) + g(t)\,\mathrm{iD}_M^{\alpha,\beta} f(t)$$

3. Bölüm kuralı:
$$\mathrm{iD}_M^{\alpha,\beta}\left(\frac{f}{g}\right)(t) = \frac{g(t)\,\mathrm{iD}_M^{\alpha,\beta} f(t) - f(t)\,\mathrm{iD}_M^{\alpha,\beta} g(t)}{[g(t)]^2}$$

1. Sabitin türevi:
$$\mathrm{iD}_M^{\alpha,\beta}(c)(t) = 0, \quad \text{burada } f(t) = c \text{ bir sabittir}$$

2. Zincir kuralı (eğer f türevlenebilir ise):
$$\mathrm{iD}_M^{\alpha,\beta}(f)(t) = \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(\beta+1)}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$$

2.4 Yöntemler

Bu bölümde modifiye edilmiş w/g metodunu ve Sardar alt denklem metodunu anlatılacaktır.

2.4.1 Düzenlenmiş w/g genişletme yaklaşımı

Doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinin elde edilmesi, matematiksel fizikteki birçok fenomenin anlaşılması açısından büyük önem taşımaktadır. Bu bağlamda, değiştirilmiş (w/g)-açılım yöntemi, literatürdeki birçok geleneksel yöntemi genelleştiren ve daha kapsamlı çözüm aileleri sunabilen etkili bir analitik yöntem olarak öne çıkmaktadır. Gepreel (2016) tarafından uygulanan değiştirilmiş (w/g)-açılım yöntemi, özel fonksiyon seçimleriyle birçok geleneksel yöntemi (tanh-fonksiyonu, (G'/G)-açılım, Riccati denklemi vb.) kapsaması ve hiperbolik, trigonometrik ve rasyonel çözümler gibi zengin çözüm aileleri üretmesi açısından dikkat çekicidir [18]. (w/g)-açılım yöntemi, özellikle Vakhnenko denklemleri, Kadomtsev-Petviashvili hiyerarşisi ve diğer doğrusal olmayan sistemler gibi matematiksel fizikte önemli yere sahip denklemlerin çözümünde etkili sonuçlar vermiştir. Yöntem, hiperbolik, trigonometrik ve rasyonel fonksiyonlar cinsinden

periyodik, soliton ve tekil çözümler gibi zengin bir çözüm çeşitliliği üretebilmektedir [19]. (w/g) açılım yöntemi, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin (LOKDD) tam çözümlerini bulmada kullanışlıdır. Bu yöntem, dalga dönüşümü kullanarak orijinal doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemi adi bir diferansiyel denkleme dönüştürür [20]. Yöntemi adım adım şu şekilde açıklayabiliriz:

1.adım: Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin (LOKDD) genel yapısı şu şekilde gösterilebilir:

$$F(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, \dots) = 0 \tag{2.5}$$

burada

$$u = U(\varepsilon)e^{i\gamma}, \quad \varepsilon = \frac{x^\alpha}{\alpha} - \nu\frac{t^\alpha}{\alpha}, \quad \gamma = -h\frac{x^\alpha}{\alpha} + \omega\frac{t^\alpha}{\alpha} \tag{2.6}$$

(2.6) numaralı denklemi (2.5) numaralı denklemde yerine koyduğumuzda:

$$Q(U, U', U'', \dots) = 0 \tag{2.7}$$

2. Adım: (2.7) numaralı denklemin çözümünün aşağıdaki gibi (w/g) formunda bir polinom olarak ifade edilebileceğini varsayalım:

$$U(\varepsilon) = \sum_{i=-N}^{N} a_i \left(\frac{w}{g}\right)^i \tag{2.8}$$

Yöntemde a_i $(i = 0, \pm1, \pm2, \dots, \pm N)$ belirsiz katsayılar olarak alınmaktadır. $w(\varepsilon)$ ve $g(\varepsilon)$ fonksiyonları ise aşağıdaki diferansiyel bağıntıyı sağlamaktadır:

$$\left(\frac{w}{g}\right)' = a + b\left(\frac{w}{g}\right) + c\left(\frac{w}{g}\right)^2 \tag{2.9}$$

veya

$$w'g - wg' = ag^2 + bwg + cw^2 \tag{2.10}$$

burada a, b ve c serbest katsayılardır.

3. Adım: (2.8) numaralı formüldeki pozitif N tamsayısı, doğrusal olmayan terim(ler)deki $(w/g)^i$'nin en yüksek kuvveti ile (2.7) numaralı denklemin türevindeki $(w/g)^i$'nin en yüksek kuvveti eşitlenerek belirlenir.

4. Adım: (2.8) numaralı denklem, (2.9) numaralı denklem ile birlikte (2.7) numaralı denklemde yerine konur ve aynı $(w/g)^i$ kuvvetlerine sahip terimler toplanır. $(w/g)^i$ $(i = \pm0, \pm1, \dots, \pm N)$ katsayılarının her biri sıfıra eşitlenerek, $a_i (i = \pm0, \pm1, \dots, \pm N)$, k ve ω için cebirsel denklem sistemleri elde edilir.

5. Adım: $a_i(i = \pm 0, \pm 1, \ldots, \pm N)$, k ve ω'yı belirlemek için bu aşırı belirli cebirsel denklem sistemi matematiksel programlar yardımıyla çözülür.

6. Adım: Yukarıdaki adımlarda elde edilen sonuçlar kullanılarak, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin (2.5) bir dizi temel çözümü elde edilir.

w değişkeninin farklı seçimleri, alternatif çözüm yaklaşımlarının geliştirilmesine olanak tanır.w nin gg' olarak alınması durumunda, yöntemi g' genişletme yöntemi adı verilen özel bir duruma indirgenmektedir:

$$U(\varepsilon) = \sum_{i=-N}^{N} a_i (g')^i \tag{2.11}$$

Yöntemde a_i $(i = 0, \pm 1, \ldots, \pm N)$ serbest parametreler olarak ele alınmaktadır. $g(\varepsilon)$ fonksiyonu ise aşağıdaki ikinci mertebeden nonlineer adi diferansiyel denklemi gerçekler:

$$g'' = a + bg' + c(g')^2 \tag{2.12}$$

(2.12) numaralı denklemin genel çözümüne dayanarak, gerekli tam çözümler aşağıdaki üç çözüm grubu içinde bulunur:

Çözüm Grubu 1: Eğer $\Delta = 4ac - b^2 > 0$ koşulu sağlanıyorsa, $g(\varepsilon)$ fonksiyonu ve türevi aşağıdaki gibidir:

$$g(\varepsilon) = \frac{1}{2c}\left[\ln\left(1 + \tan^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\varepsilon\right)\right) - b\varepsilon\right] \tag{2.13}$$

ve

$$g' = \frac{1}{2c}\left[\sqrt{\Delta}\tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\varepsilon\right) - b\right] \tag{2.14}$$

Çözüm Grubu 2: Eğer $\Delta = 4ac - b^2 < 0$ durumunda ise çözümler şu formu alır:

$$g(\varepsilon) = -\frac{1}{2c}\left[\ln\left(\tanh^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\Delta}\varepsilon\right) - 1\right) - b\varepsilon\right] \tag{2.15}$$

ve

$$g' = -\frac{1}{2c}\left[\sqrt{-\Delta}\tanh\left(\ln(\varepsilon) + b\right)\right] \tag{2.16}$$

Çözüm Grubu 3: Son olarak, $\Delta = 4ac - b^2 = 0$ olması halinde:

$$g(\varepsilon) = -\frac{1}{c}\left[\ln(\varepsilon) + \frac{b}{2}\varepsilon\right] \tag{2.17}$$

ve

$$g' = -\frac{1}{c}\left[\frac{1}{\varepsilon} + \frac{b}{2}\right] \tag{2.18}$$

2.4.2 Sardar Alt-Denklem Yönteminin Geliştirilmiş Versiyonu

Fizik, mühendislik, biyoloji ve finans gibi alanlarda bir çok fiziksel olguyu doğrusal olmayan kısmi türevli denklemlerle modellenir. Modifiye Sardar Alt Denklem yöntemi geleneksel analitik yöntemlere kıyasla önemli avantajlara sahiptir. Karmaşık problemleri basitleştirerek kesin çözümü daha az çabayla çözmemizi sağlar ve doğrusal olmayan denklemlerin bir çok sınıfına uygulanabilirdir. Ayrıca kullanımı kolaydır ve sade cebirsel işlemler içerir [21]. Yöntemin esnek olmasından kastettiğimiz şey önemli değişikliklere ihtiyaç duymadan çeşitli doğrusal olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlere uygulanabilmesidir. Daha katı kurallara sahip geleneksel yöntemde denklemin belirli bir biçimde olması gerekir fakat Sardar Alt Denklem yöntemi buna ihtiyaç duymaz.Geniş uygulanabilir olması optik fiberler gibi geleneksel yöntemlerin yeterli gelmediği problemlere uygulanır. Sardar Alt Denklem yönteminin geliştirilmiş versiyonu Kortege de Vries denklemi veya doğrusal olmayan Schrödinger denkleminde başarıyla uygulanmıştır [22].

$M(x,t)$ doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemini aşağıdaki formda ele alalım:

$$M_1(M, M_x, M_t, M_{xx}, M_{tt}, \dots) = 0, \tag{2.19}$$

burada M_1 bir polinomdur ve dalga dönüşümü denklemi aşağıdaki gibi verilir:

$$M(x,t) = S(\xi)e^{i\beta}, \quad \xi = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\alpha}(x^\alpha + \nu t^\alpha), \quad \beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\alpha}(-hx^\alpha + wt^\alpha) \tag{2.20}$$

M_1 argümanlarında bir polinomdur. Değiştirilmiş Sardar alt-denklemi yönteminin genel adımlarını açıklayalım. İlk olarak, M_1 denklemi, denklem (2.20)'de verilen dalga dönüşümü kullanılarak adi bir diferansiyel denkleme dönüştürülmelidir. Denklem (2.19)'i bir dalga dönüşümü kullanarak adi diferansiyel denkleme dönüştürürüz. Sonra şunu elde ederiz:

$$M_2(S, S', S'', S''', \dots) = 0, \tag{2.21}$$

burada M_2, $S(\xi)$ içinde bir polinomdur ve alt indisler $S(\xi)$'nin ξ'ye göre adi türevlerini temsil eder. Denklem (2.21)'in aşağıdaki çözüme sahip olduğunu varsayılır:

$$S(\xi) = \sum_{i=-N}^{N} r_i K^i(\xi), \tag{2.22}$$

burada r_i bulunacak reel sabitlerdir ($r_N \neq 0$), N, denklem (2.21)'e dengeleme kuralı uygulanarak belirlenecek bir dengeleme sayısıdır ve $K(\xi)$ aşağıdaki adi diferansiyel denklemi sağlar:

$$\frac{dK}{d\xi} = \sqrt{p_1 + p_2 K^2 + p_3 K^4} \tag{2.23}$$

Denklem (2.23)'in çözümleri aşağıdaki gibidir:

Durum I. Eğer $p_2 > 0$ ve $p_1 = 0$ ise, o zaman

$$K_1^{\pm}(\xi) = \pm\sqrt{-\frac{\rho\omega p_2}{p_3}}\,\mathrm{sech}_{\rho\omega}\left(\sqrt{p_2}\xi\right), \quad (p_3 < 0), \tag{2.24}$$

$$K_2^{\pm}(\xi) = \pm\sqrt{\frac{\rho\omega p_2}{p_3}}\,\mathrm{csch}_{\rho\omega}\left(\sqrt{p_2}\xi\right), \quad (p_3 > 0), \tag{2.25}$$

burada

$$\mathrm{sech}_{\rho\omega}(\xi) = \frac{2}{\rho e^{\xi} + \omega e^{-\xi}}, \quad \mathrm{csch}_{\rho\omega}(\xi) = \frac{2}{\rho e^{\xi} - \omega e^{-\xi}}. \tag{2.26}$$

Durum II. Eğer $p_2 < 0$, $p_3 > 0$ ve $p_1 = 0$ ise, o zaman

$$K_3^{\pm}(\xi) = \pm\sqrt{-\frac{\rho\omega p_2}{p_3}}\,\mathrm{sec}_{\rho\omega}\left(\sqrt{-p_2}\xi\right), \tag{2.27}$$

$$K_4^{\pm}(\xi) = \pm\sqrt{-\frac{\rho\omega p_2}{p_3}}\,\mathrm{csc}_{\rho\omega}\left(\sqrt{-p_2}\xi\right), \tag{2.28}$$

burada

$$\mathrm{sec}_{\rho\omega}(\xi) = \frac{2}{\rho e^{i\xi} + \omega e^{-i\xi}}, \quad \mathrm{csc}_{\rho\omega}(\xi) = \frac{2i}{\rho e^{i\xi} - \omega e^{-i\xi}}. \tag{2.29}$$

Durum III. Eğer $p_2 < 0$, $p_3 > 0$ ve $p_1 = \frac{p_2^2}{4p_3}$ ise, o zaman

$$K_5^{\pm}(\xi) = \pm\sqrt{\frac{-p_2}{2p_3}}\,\tanh_{\rho\omega}\left(\sqrt{\frac{-p_2}{2}}\xi\right), \tag{2.30}$$

$$K_6^{\pm}(\xi) = \pm\sqrt{\frac{-p_2}{2p_3}}\,\coth_{\rho\omega}\left(\sqrt{\frac{-p_2}{2}}\xi\right), \tag{2.31}$$

$$K_7^{\pm}(\xi) = \pm\sqrt{\frac{-p_2}{2p_3}}\left(\tanh_{\rho\omega}\left(\sqrt{-2p_2}\xi\right) \pm i\sqrt{\rho\omega}\,\mathrm{sech}_{\rho\omega}\left(\sqrt{-2p_2}\xi\right)\right), \tag{2.32}$$

$$K_8^{\pm}(\xi) = \pm\sqrt{\frac{-p_2}{2p_3}}\left(\coth_{\rho\omega}\left(\sqrt{-2p_2}\xi\right) \pm \sqrt{\rho\omega}\,\mathrm{csch}_{\rho\omega}\left(\sqrt{-2p_2}\xi\right)\right), \tag{2.33}$$

$$K_9^{\pm}(\xi) = \pm\sqrt{\frac{-p_2}{8p_3}}\left(\tanh_{\rho\omega}\left(\sqrt{\frac{-p_2}{8}}\xi\right) + \coth_{\rho\omega}\left(\sqrt{\frac{-p_2}{8}}\xi\right)\right), \tag{2.34}$$

burada

$$\tanh_{\rho\omega}(\xi) = \frac{\rho e^{\xi} - \omega e^{-\xi}}{\rho e^{\xi} + \omega e^{-\xi}}, \quad \coth_{\rho\omega}(\xi) = \frac{\rho e^{\xi} + \omega e^{-\xi}}{\rho e^{\xi} - \omega e^{-\xi}}. \tag{2.35}$$

Durum IV. Eğer $p_2 > 0$, $p_3 > 0$ ve $p_1 = \frac{p_2^2}{4p_3}$ ise, o zaman

$$K_{10}^{\pm}(\xi) = \pm\sqrt{\frac{p_2}{2p_3}}\tan_{\rho\omega}\left(\sqrt{\frac{p_2}{2}}\xi\right), \tag{2.36}$$

$$K_{11}^{\pm}(\xi) = \pm\sqrt{\frac{p_2}{2p_3}}\cot_{\rho\omega}\left(\sqrt{\frac{p_2}{2}}\xi\right), \tag{2.37}$$

$$K_{12}^{\pm}(\xi) = \pm\sqrt{\frac{p_2}{2p_3}}\left(\tan_{\rho\omega}\left(\sqrt{2p_2}\xi\right) \pm \sqrt{\rho\omega}\sec_{\rho\omega}\left(\sqrt{2p_2}\xi\right)\right), \tag{2.38}$$

$$K_{13}^{\pm}(\xi) = \pm\sqrt{\frac{p_2}{2p_3}}\left(\cot_{\rho\omega}\left(\sqrt{2p_2}\xi\right) \pm \sqrt{\rho\omega}\csc_{\rho\omega}\left(\sqrt{2p_2}\xi\right)\right), \tag{2.39}$$

$$K_{14}^{\pm}(\xi) = \pm\sqrt{\frac{p_2}{8p_3}}\left(\tan_{\rho\omega}\left(\sqrt{\frac{p_2}{8}}\xi\right) + \cot_{\rho\omega}\left(\sqrt{\frac{p_2}{8}}\xi\right)\right), \tag{2.40}$$

burada

$$\tan_{\rho\omega}(\xi) = -i\frac{\rho e^{i\xi} - \omega e^{-i\xi}}{\rho e^{i\xi} + \omega e^{-i\xi}}, \quad \cot_{\rho\omega}(\xi) = i\frac{\rho e^{i\xi} + \omega e^{-i\xi}}{\rho e^{i\xi} - \omega e^{-i\xi}}. \tag{2.41}$$

Denklem (2.22), denklem (2.21) kullanılarak denklem (2.23)'te yerine konulduğunda polinom denklemler elde edilir. Daha sonra,

$$p_i, \nu, h, w$$

katsayılarını bulmak için K^i denklem sistemleri sıfıra eşitlenir.

3
DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ VE MODÜLASYON KARARSIZLIĞI

3.1 Kesirli Pertürbe Gerdjikov-Ivanov Denkleminin Analitik Çözümleri

Bu bölümde kesirli pertürbe Gerdjikov-Ivanov denklemine uyumlu türev uygulanıp w/g yöntemi ile çözülmüştür ve M- kesikli türevi alınıp Sardar alt denklem yönteminin geliştirilmiş versiyonu ile çözülüp çözümler karşılaştırılmıştır. Kesirli pertürbe Gerdjikov-Ivanov denklemini G' genişletme yöntemini kullanarak nasıl çözeceğimizi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$iT_t^{\alpha}M+aT_x^{2\alpha}M+b|M|^4M = i\left[cM^2T_x^{\alpha}\bar{M}+d_1T_x^{\alpha}M+d_2T_x^{\alpha}(|M|^2M)+\theta T_x^{\alpha}|M|^2M\right] \tag{3.1}$$

$0<\alpha<1$ denklemine

$$M(x,t)=S(\varepsilon)e^{i\gamma},\quad \varepsilon=h\frac{x^{\rho}}{\alpha}-\nu\frac{t^{\rho}}{\alpha},\gamma=-k\frac{x^{\rho}}{\alpha}+\omega\frac{t^{\rho}}{\alpha}\quad , \tag{3.2}$$

dönüşümü (3.1) de uygulanıp aşağıdaki kısmi diferansiyel denklemin reel ve imajiner kısımları ayrı ayrı elde edilir. Denklemin imajiner kısmı:

$$-vS'-2ahS'=cS^2S'+d_1S'+3d_2S^2S'+2\theta S^2S' \tag{3.3}$$

Denklemin reel kısmı:

$$-\omega S+S''-ah^2S+bS^5=-chS^3+d_1hS+d_2hS^3 \tag{3.4}$$

(3.4) numaralı Denklemdeki S^5 doğrusal olmayan terimi ile S'' doğrusal teriminin dengelemesi yapıldığında, denge teriminin kesirli olduğunu elde ederiz. Bu nedenle, denge terimi için bir doğal sayı elde etmek üzere denklemi dönüştürebiliriz.

$$S=E^{\frac{1}{2}} \tag{3.5}$$

Burada (3.5) deki dönüşümü (3.4) denkleminde yerine yazdığımızda aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$2aEE' - a(E')^2 + 4bE^4 + 4(ch - d_2h)E^3 + 4(-\omega - ah^2 - d_1h)E^2 = 0 \qquad (3.6)$$

(3.6) denkleminde denge terimini $N = 1$ olarak elde ederiz.

3.1.1 Düzenlenmiş w/g Yaklaşımının Uygulanması

Denklemin analitik çözümlerini elde etmek için modifiye w/g yöntemini uygularız. Denklem (3.6) da

$$E(\varepsilon) = z_0 + z_1(G') + z_2(G')^{-1} \qquad (3.7)$$

denklemini yazdığımızda çözüm formuna ulaşırız. $G'(\varepsilon)$'nin tüm kuvvetleri için katsayıların sıfıra eşitlenmesiyle elde edilir. Burada z_0, z_1, z_2 keyfi sabitlerdir.

$$\begin{aligned}
(G')^4 :&\quad 4a(z_1)^2(\lambda_3)^2 - a(z_1)^2(\lambda_3)^2 + 4b(z_1)^2 = 0\\
(G')^3 :&\quad 4az_0z_1(\lambda_3)^2 + 6a(z_1)^2\lambda_2\lambda_3 - 2a(z_1)^2\lambda_2\lambda_3 + 16bz_0(z_1)^3\\
&\quad + 4(ch - d_2h)(z_1)^3 = 0\\
(G')^2 :&\quad 10az_0z_1\lambda_2\lambda_3 + 2a(z_1)^2(\lambda_2)^2 + 4a(z_1)^2\lambda_1\lambda_3 + 4az_1z_2(\lambda_3)^2\\
&\quad - 2a(z_1)^2\lambda_1\lambda_3 - a(z_1)^2(\lambda_2)^2 + 2az_1z_2(\lambda_3)^2 + 24b(z_0)^2(z_1)^2\\
&\quad + 16b(z_1)^3z_2 + 12(ch - d_2h)z_0(z_1)^2 + 4(-\omega - ah^2 - d_1h)(z_1)^2 = 0\\
(G')^1 :&\quad 2az_0z_1(\lambda_2)^2 + 4az_0z_1\lambda_1\lambda_3 + 2a(z_1)^2\lambda_1\lambda_2 + 8az_1z_2\lambda_2\lambda_3\\
&\quad - 2a(z_1)^2\lambda_1\lambda_2 + 4az_1z_2\lambda_2\lambda_3 + 16b(z_0)^3z_1 + 48bz_0(z_1)^2z_2\\
&\quad + 4(ch - d_2h)(3(z_0)^2z_1 + 3(z_1)^2z_2) + 8(\omega - ah^2 - d_1h)z_0z_1 = 0\\
(G')^0 :&\quad 2a(z_0z_1\lambda_1\lambda_2 + z_0z_2\lambda_2\lambda_3 + 4z_1z_2\lambda_1\lambda_3 + z_1z_2\lambda_1\lambda_2 + z_1z_2(\lambda_2)^2)\\
&\quad - a((z_1)^2(\lambda_1)^2 - 4z_1z_2\lambda_1\lambda_3 - 2z_1z_2(\lambda_2)^2 + (z_2)^2(\lambda_3)^2)\\
&\quad + 4b((z_0)^4 + 12(z_0)^2z_1z_2 + 6(z_1)^2(z_2)^2) + 4(ch - d_2h)((z_0)^3 + 6z_0z_1z_2)\\
&\quad + 4(-\omega - ah^2 - d_1h)((z_0)^2 + 2z_1z_2) = 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left(G'\right)^{-1}: \quad & 2a(z_0z_2\lambda_1\lambda_2 + 2z_0z_2\lambda_1\lambda_3 + 4z_1z_2\lambda_1\lambda_2 + (z_2)^2\lambda_2\lambda_3) \\
& - a(-4z_1z_2\lambda_1\lambda_2 + 2(z_2)^2\lambda_2\lambda_3) + 4b(4(z_0)^3z_2 + 12z_0z_1(z_2)^2) \\
& + 4(ch - d_2h)(3(z_0)^2z_2 + 3z_1(z_2)^2) + 4(-\omega - ah^2 - d_1h)(2z_0z_2) = 0 \\
\left(G'\right)^{-2}: \quad & 2a(3z_0z_2\lambda_1\lambda_2 + 2z_1z_2(\lambda_1)^2 + 2(z_2)^2\lambda_1\lambda_3 + (z_2)^2\lambda_1\lambda_2) \\
& - a(-2z_1z_2(\lambda_1)^2 + 2(z_2)^2\lambda_1\lambda_3 + (z_2)^2(\lambda_2)^2) \\
& + 4b(6(z_0)^2(z_2)^2 + 4z_1(z_2)^3) + 4(ch - d_2h)(3z_0(z_2)^2) \\
& + 4(-\omega - ah^2 - d_1h)(z_2)^2 = 0 \\
\left(G'\right)^{-3}: \quad & 2a(2z_0z_2(\lambda_1)^2 + 3(z_2)^2\lambda_1\lambda_2) - 2a(z_2)^2\lambda_1\lambda_2 + 16bz_0(z_2)^3 \\
& + 4(ch - d_2h)(z_2)^3 = 0 \\
\left(G'\right)^{-4}: \quad & 4a(z_2)^2(\lambda_1)^2 - a(z_2)^2(\lambda_1)^2 + 4b(z_2)^4 = 0
\end{aligned}
$$

Maple kullanarak bu cebirsel sistemi çözdüğümüzde iki durum ortaya çıkar.

Durum 1:

$$
\begin{aligned}
h &= \frac{2 \pm \sqrt{-\frac{1}{3}(\lambda_2)^2ab + \frac{4}{3}\lambda_3\lambda_1ab}}{c - d_2} \\
\omega &= -\frac{1}{12(c^2 - 2cd_2 + (d_2)^2)}\Bigg(- 16(\lambda_2)^2a^2b - 3(\lambda_2)^2ac^2 + 6(\lambda_2)^2acd_2 \\
&\quad - 3(\lambda_2)^2a(d_2)^2 + 64\lambda_3\lambda_1a^2b + 12\lambda_3\lambda_1ac^2 - 24\lambda_3\lambda_1acd_2 \\
&\quad + 12\lambda_3\lambda_1a(d_2)^2 + 24\left(\pm\sqrt{\frac{-1}{3}(\lambda_2)^2ab + \frac{4}{3}\lambda_3\lambda_1ab}\right)d_1d_2\Bigg) \\
d_1 &= d_1 \\
d_2 &= d_2 \\
z_0 &= -\frac{-2 \pm \sqrt{\frac{3a}{4b}}\lambda_2b + 3\left(\pm\sqrt{\frac{-1}{3}(\lambda_2)^2ab + \frac{4}{3}\lambda_1\lambda_3ab}\right)d_1d_2}{4b} \\
z_1 &= 0 \\
z_2 &= \pm\sqrt{\frac{3a}{4b}}\lambda_1
\end{aligned}
$$

Durum 2:

$$
\begin{aligned}
h &= \frac{2\left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}(\lambda_2)^2ab+\frac{4}{3}\lambda_3\lambda_1ab}\right)}{c-d_2},\\
\omega &= -\frac{1}{12(c^2-2cd_2+(d_2)^2)}\Bigg(-16(\lambda_2)^2a^2b-3(\lambda_2)^2ac^2+6(\lambda_2)^2acd_2\\
&\quad -3(\lambda_2)^2a(d_2)^2+64\lambda_3\lambda_1a^2b+12\lambda_3\lambda_1a^2b+12\lambda_3\lambda_1ac^2\\
&\quad -24\lambda_3\lambda_1acd_2+12\lambda_3\lambda_1a(d_2)^2+24\left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}(\lambda_2)^2ab+\frac{4}{3}\lambda_3\lambda_1ab}\right)cd_1\\
&\quad -24\left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}(\lambda_2)^2ab+\frac{4}{3}\lambda_3ab}\right)d_1d_2\Bigg),\\
d_1 &= d_1,\\
d_2 &= d_2,\\
z_0 &= \frac{-2\pm\sqrt{\frac{3a}{4b}}\lambda_2b-3\left(\pm\sqrt{\frac{-1}{3}(\lambda_2)^2ab+\frac{4}{3}\lambda_1\lambda_3ab}\right)}{4b},\\
z_1 &= \pm\sqrt{\frac{-3a}{4b}}\lambda_3,\\
z_2 &= 0
\end{aligned}
$$

$M(x,t)=S(\varepsilon)e^{i\gamma}$ dönüşümü uyguladık. Ardından denklemimizi çözebilmek için $S^2=E$ dönüşümü uygulayarak denklemimizi çözdük. Şimdi bu dönüşümleri tersine uygularsak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

Çözüm Grubu 1, Durum 1 için:

$$
\begin{aligned}
M(x,t) &= S(\varepsilon)e^{i\gamma}=E(\varepsilon)^{\frac{1}{2}}e^{i\gamma}\\
&= \Bigg(-\frac{-2\left(\pm\sqrt{\frac{-3a}{4b}}\right)\lambda_2b+3\left(\pm\sqrt{\frac{-1}{3}(\lambda_2)^2ab+\frac{4}{3}\lambda_3\lambda_1ab}\right)}{4b}\\
&\quad \pm\sqrt{\frac{3a}{4b}}\lambda_1\Big(\frac{1}{2\lambda_3}\Big(\sqrt{\delta}\tan\Big(\frac{1}{2}\sqrt{\delta}\varepsilon\Big)-\lambda_2\Big)^{-1}\Bigg)^{\frac{1}{2}}e^{i\gamma}
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Çözüm Grubu 1, Durum 2 için:

$$
\begin{aligned}
M(x,t) &= S(\varepsilon)e^{i\gamma}=E(\varepsilon)^{\frac{1}{2}}e^{i\gamma}\\
&= \Bigg(-\Bigg\{\frac{2\left(\pm\sqrt{\frac{-3a}{4b}}\right)\lambda_2b-3\left(\pm\sqrt{\frac{-1}{3}(\lambda_2)^2ab+\frac{4}{3}\lambda_3\lambda_1ab}\right)}{4b}\\
&\quad \pm\sqrt{\frac{-3a}{4b}}\lambda_3\Big(\frac{1}{2\lambda_3}\sqrt{\delta}\tan\Big(\frac{1}{2}\sqrt{\delta}\varepsilon\Big)-\lambda_2\Big)\Bigg\}^{-1}\Bigg)^{\frac{1}{2}}e^{i\gamma}
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Çözüm Grubu 2, Durum 1 için:

$$M(x,t) = S(\varepsilon)e^{i\gamma} = E(\varepsilon)^{\frac{1}{2}}e^{i\gamma}$$
$$= \left(-\frac{-2\left(\pm\sqrt{\frac{-3a}{4b}}\right)\lambda_2 b + 3\left(\pm\sqrt{\frac{-1}{3}(\lambda_2)^2 ab + \frac{4}{3}\lambda_3\lambda_1 ab}\right)}{4b} \right. \tag{3.10}$$
$$\left. \pm\sqrt{\frac{3a}{4b}}\lambda_1\left(\frac{-1}{2\lambda_3}\sqrt{-\delta}\tanh\left(ln(\varepsilon)+\lambda_2\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\gamma} \right)$$

Çözüm Grubu 2, Durum 2 için:

$$M(x,t) = S(\varepsilon)e^{i\gamma} = E(\varepsilon)^{\frac{1}{2}}e^{i\gamma}$$
$$= \left(-\frac{2\left(\pm\sqrt{\frac{-3a}{4b}}\right)\lambda_2 b - 3\left(\pm\sqrt{\frac{-1}{3}(\lambda_2)^2 ab + \frac{4}{3}\lambda_3\lambda_1 ab}\right)}{4b} \right. \tag{3.11}$$
$$\left. \pm\sqrt{\frac{-3a}{4b}}\lambda_3\left(\frac{-1}{2\lambda_3}\sqrt{-\delta}\tanh\left(ln(\varepsilon)+\lambda_2\right)\right)\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\gamma}$$

Çözüm Grubu 3, Durum 1 için:

$$M(x,t) = S(\varepsilon)e^{i\gamma} = E(\varepsilon)^{\frac{1}{2}}e^{i\gamma}$$
$$= \left(-\frac{-2\left(\pm\sqrt{\frac{-3a}{4b}}\right)\lambda_2 b + 3\left(\pm\sqrt{\frac{-1}{3}(\lambda_2)^2 ab + \frac{4}{3}\lambda_3\lambda_1 ab}\right)}{4b} \right. \tag{3.12}$$
$$\left. \pm\sqrt{\frac{3a}{4b}}\lambda_1\left(\frac{-1}{\lambda_3}\left[\frac{1}{\varepsilon}+\frac{\lambda_2}{2}\right]\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\gamma}$$

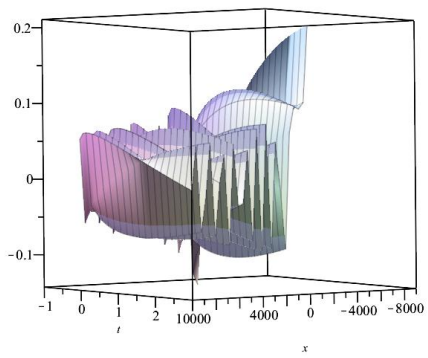
Çözüm Grubu 3, Durum 2 için:

$$M(x,t) = S(\varepsilon)e^{i\gamma} = E(\varepsilon)^{\frac{1}{2}}e^{i\gamma}$$
$$= \left(\left\{ \frac{2\left(\pm\sqrt{\frac{-3a}{4b}}\right)\lambda_2 b - 3\left(\pm\sqrt{\frac{-1}{3}(\lambda_2)^2 ab + \frac{4}{3}\lambda_3\lambda_1 ab}\right)}{4b} \right. \tag{3.13}$$
$$\left. \pm\sqrt{\frac{-3a}{4b}}\lambda_3\left(\frac{-1}{\lambda_3}\left[\frac{1}{\varepsilon}+\frac{\lambda_2}{2}\right]\right)\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\gamma}$$

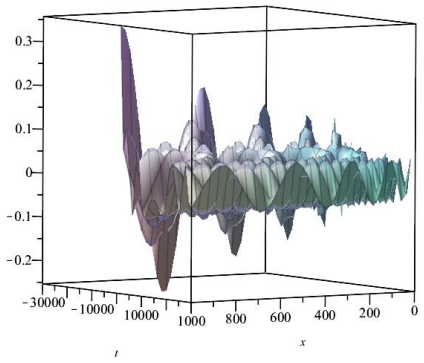
Bu bölümde, ε değişkenine bağlı olarak kapalı formda sunulan analitik çözümler türetilmiştir. Söz konusu çözümler, uyumlu türev ve M-kesikli türev gibi farklı kesirli türev tanımları altında karşılaştırmalı bir analize imkân tanımaktadır. Ayrıca, gezici dalga (traveling wave) çözümlerinin yapısal özellikleri de bu çerçevede karşılaştırılabilir ve farklı türev operatörlerinin dalga dinamikleri üzerindeki etkisi irdelenebilir.

3.1.2 Uyumlu Kesirli Türev ile Üretilen Çözümlerin Grafiksel İncelenmesi

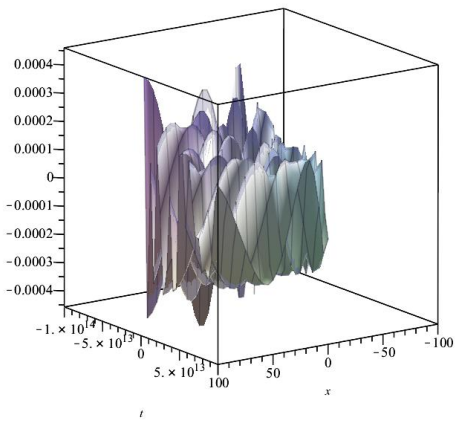
Bu alt bölümde uyumlu kesirli türev yardımıyla analitik çözümleri elde edilen denklemimizin tüm çözümlerinin yerine aile 3 teki durum 1 ve durum 2 nin grafikleri çizilmiştir.Durum 1 de verilen değerlere göre denklemin reel ve sanal kısımlarının nasıl değiştiği gösterilmiştir. Durum 2 de aynı değerlere karşılık denklemin durumunun değişmesi denklemin reel ve sanal kısımlarının değiştiğini göstermektedir.



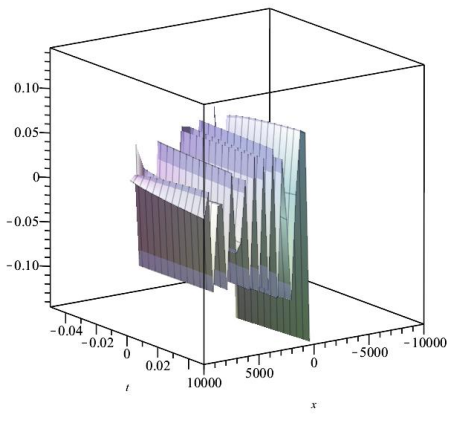
Şekil 3.1 (3.13) denkleminin reel kısmı, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$, $a = -1$, $b = 1$, $c = 1$, $d_2 = -2$, $d_1 = 1$, $\alpha = 0.5$



Şekil 3.2 (3.13) denkleminin sanal kısmı, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$, $a = -1$, $b = 1$, $c = 1$, $d_2 = -2$, $d_1 = 1$, $\alpha = 0.5$

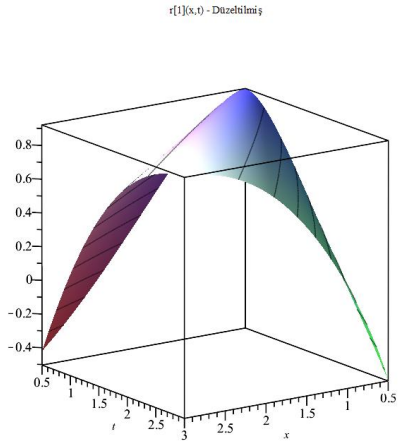


Şekil 3.3 (3.12) denkleminin reel kısmı, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$, $a = -1$, $b = 1$, $c = 1$, $d_2 = -2$, $d_1 = 1$, $\alpha = 0.5$

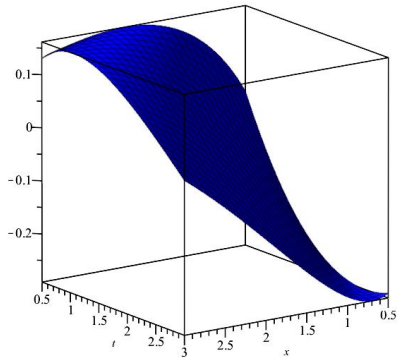


Şekil 3.4 (3.12) denkleminin sanal kısmı,$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$, $a = -1$, $b = 1$, $c = 1$, $d_2 = -2$, $d_1 = 1$, $\alpha = 0.5$

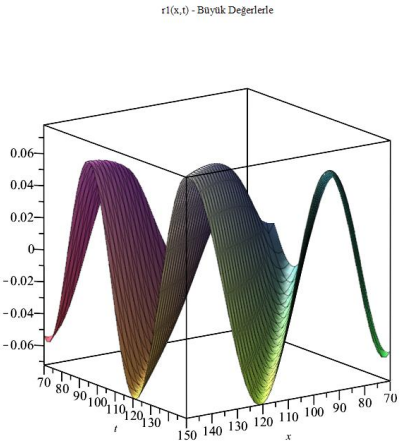
3.1.3 M Kesikli Türev ile Elde Edilen Çözüm ve Grafiksel İnceleme



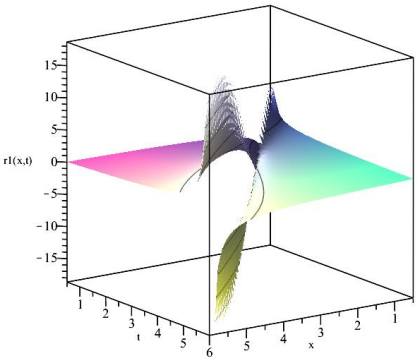
Şekil 3.5 (3.13) denkleminin reel kısmı



Şekil 3.6 (3.13) denkleminin sanal kısmı



Şekil 3.7 (3.12) denkleminin reel kısmı



Şekil 3.8 (3.12) denkleminin sanal kısmı

Tüm grafikler için parametreler: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1, a = -1, b = 1, c = 1, d_2 = -2, d_1 = 1, \alpha = 0.5, \beta = 0.5$

Bu alt bölümde M kesikli türevle elde edilen denklemimizin tüm çözümleri yerine aile 3 teki durum ve durum 2 nin grafikleri çizilmiştir. Durum 1 de verilen değerlere göre denklemin reel ve sanal kısımlarının nasıl değiştiği görülmektedir. Ayrıca tüm grafiklerde aynı değer vererek uyumlu türev ile M kesikli türev arasındaki türevin farkının grafiğe yansıması net bir şekilde görülmektedir.

3.2 Chen-Lee-Liu Denkleminin Analitik Çözümleri

Bu bölümde zaman kesirli Chen-Lee-Liu Modelinin analitik çözümlerini incelenecektir. Burada M kesikli Türev ve uyumlu türev altında çözümlerini karşılaştırılacaktır.

$$iU_t + a_0 D^{\alpha}_{xx} U + 2ia_1 |U|^2 D^{\alpha}_x U = i[a_2 D^{\alpha}_x U + a_3 D^{\alpha}_x (|U|^{2n} U) + a_4 U D^{\alpha}_t (|U|^{2n})] \quad (3.14)$$

modelinde $n = 1$ alınarak denklem kübik doğrusal olmayanlık türünde analitik çözümleri elde edilmiştir. $n > 1$ alındığında doğrusal olmayanlık derecesi artar ve denklem yüksek dereceli doğrusal olmayan terimler içerir. Bu durum analitik çözüm bulmayı zorlaştırır ve fiziksel yorumu güçleştirir.

$$U(x,t) = S(\xi)e^{i\beta} \tag{3.15}$$

dönüşümünde uyumlu türev için gezici dalga dönüşümü

$$\xi = \frac{x^\alpha}{\alpha} - v\frac{t^\alpha}{\alpha}, \quad \beta = -h\frac{x^\alpha}{\alpha} + w\frac{t^\alpha}{\alpha} \tag{3.16}$$

ve M kesikli türev için gezici dalga dönüşümü

$$\xi = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\alpha}(x^\alpha - vt^\alpha), \quad \beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\alpha}(-hx^\alpha + wt^\alpha) \tag{3.17}$$

uygulanarak denklem çözülür. Her iki türevde çözümün yapısını değiştirmemektedir. Sadece sonuç fonksiyonlarının yapısında farklılıkları sağlarlar. Gezici dalga denklemleri (3.14) te uygulandığında denklemin reel kısmı:

$$a_0 S'' + (-w - a_0h^2 - a_2h)S + (a_1h - a_3h)S^3 = 0 \tag{3.18}$$

imajiner kısmı:

$$(-v - 2a_0h - a_2)S' + (a_1 - 3a_3 + 2a_4v)S^2S' = 0 \tag{3.19}$$

şeklindedir.

3.2.1 Sardar Alt Denklem Yönteminin Geliştirilmiş Versiyonun Uygulanması

Sardar alt denklem yönteminin geliştirilmiş versiyonun denklem (3.18) in analitik çözümlerinin bulunması için kullanılmıştır. Doğrusal olmayan denklemdeki S^3 ve S'' eşitleyerek denge sabitini $N = 1$ olarak hesaplanır. Denklem (3.18) in çözümü aşağıdaki gibidir.

$$S(\xi) = r_0 + r_1K + r_2K^{-1} \tag{3.20}$$

burada r_0, r_1 ve r_2 keyfi sabitlerdir. Denklem sisteminde (3.20) deki denklem (3.18) de yerine yazılarak K değerinin tüm kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenerek aşağıdaki

denklem sistemi ortaya çıkar.

$$(K^0) = (-a_0h^2 - a_2h - w)r_0 + (a_1h - a_3h)(r_0^3 + 6r_0r_1r_2)$$
$$(K^1) = a_0r_1p_2 + (-a_0h^2 - a_2h - w)r_1 + (a_1h - a_3h)(3r_0^2r_1 + 3r_1^2r_2)$$
$$(K^2) = 3(a_1h - a_3h)r_0r_1^2$$
$$(K^3) = 2a_0r_1p_3 + (a_1h - a_3h)r_1^3$$
$$(K^{-1}) = a_0r_2p_2 + (-a_0h^2 - a_2h - w)r_2 + (a_1h - a_3h)(3r_0^2r_2 + 3r_1r_2^2)$$
$$(K^{-2}) = 3(a_1h - a_3h)r_0r_2^2$$
$$(K^{-3}) = 2a_0r_2p_1 + (a_1h - a_3h)r_2^3$$

Maple yardımıyla yukarıdaki cebirsel sistem 0 a eşitlenerek çözüldüğünde aşağıdaki çözüm elde edilir.

$$h = h \tag{3.21}$$
$$w = w \tag{3.22}$$
$$a_0 = a_0 \tag{3.23}$$
$$a_1 = \frac{ha_3r_2^2 - 2a_0p_1}{hr_2^2} \tag{3.24}$$
$$a_2 = -\frac{\sqrt{\frac{p_3}{p_1}}h^2a_0 - \sqrt{\frac{p_3}{p_1}}a_0p_2 + \sqrt{\frac{p_3}{p_1}}w + 6a_0p_3}{\sqrt{\frac{p_3}{p_1}}h} \tag{3.25}$$
$$r_0 = 0 \tag{3.26}$$
$$r_1 = \sqrt{\frac{p_3}{p_1}}r_2 \tag{3.27}$$
$$r_2 = r_2 \tag{3.28}$$

Burada elde edilen çözüme göre $r_0 = 0$ bulunduğundan Sardar Alt Denklem Yöntemindeki çözüm durumlarından $K_1^{\pm}(\xi)$ ve $K_2^{\pm}(\xi)$ kullanılmıştır. Bu durumla denklemin dalga yapısını grafiksel olarak görmemize de olanak sağlamıştır.

$$S_1(\xi) = \sqrt{p_3/p_2}r_2(\pm\sqrt{-\frac{\rho\omega p_2}{p_3}}\,\mathrm{sech}_{\rho\omega}\,(\sqrt{p_2}\xi)) + r_2(\pm\sqrt{-\frac{\rho\omega p_2}{p_3}}\,\mathrm{sech}_{\rho\omega}\,(\sqrt{p_2}\xi)) \tag{3.29}$$

ve

$$S_2(\xi) = \sqrt{p_3/p_2}r_2(\pm\sqrt{-\frac{\rho\omega p_2}{p_3}}\,\mathrm{cosech}_{\rho\omega}\,(\sqrt{p_2}\xi)) + r_2(\pm\sqrt{-\frac{\rho\omega p_2}{p_3}}\,\mathrm{cosech}_{\rho\omega}\,(\sqrt{p_2}\xi)) \tag{3.30}$$

Daha önce denklemimizde $u(x,t) = S(\xi)e^{i\beta}$ dönüşümünü yaparak denklemimizi adi diferansiyel denkleme indirgemişti, dönüşümlerin ters yönde uygulanmasıyla aşağıdaki çözümlere ulaşılır.

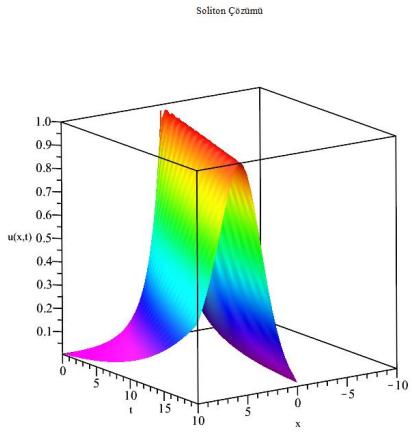
$$\begin{aligned} u(x,t) &= S(\xi)e^{i\beta} \\ &= \left[\sqrt{\frac{p_3}{p_1}}\,r_1\left(\pm\sqrt{-\frac{\rho\omega p_2}{p_3}}\;\rho\omega(\sqrt{p_2}\,\xi)\right)\right. \\ &\quad \left. + r_2\left(\pm\sqrt{-\frac{\rho\omega p_2}{p_3}}\;\rho\omega(\sqrt{p_2}\,\xi)\right)^{-1}\right]e^{i\beta} \end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= S(\xi)e^{i\beta} \\ &= \left[\sqrt{\frac{p_3}{p_1}}\,r_1\left(\pm\sqrt{-\frac{\rho\omega p_2}{p_3}}\;\rho\omega(\sqrt{p_2}\,\xi)\right)\right. \\ &\quad \left. + r_2\left(\pm\sqrt{-\frac{\rho\omega p_2}{p_3}}\;\rho\omega(\sqrt{p_2}\,\xi)\right)^{-1}\right]e^{i\beta} \end{aligned} \tag{3.32}$$

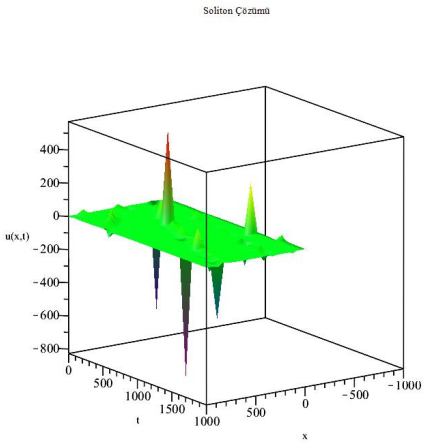
3.2.2 Uyumlu Kesirli Türev ile Üretilen Çözümlerin Grafiksel İncelenmesi

Bu alt bölümde, uyumlu kesirli türev ile modellenen sistemin gezici dalga çözümlerinin grafiksel temsili ve davranış analizi sunulmaktadır. Çözümler, gezici dalga dönüşümü uygulanarak elde edilmiş ve grafikler aracılığıyla niteliksel olarak incelenmiştir. Farklı α değerlerinde çözümün grafiğinin nasıl değiştiği gösterilmektedir.

Şekil 3.9 çizilen grafikler denklem 3.29 un uyumlu türev altındaki değişkenlere verilen değerler ile elde edilen üç boyutlu grafiğidir. Şekil 3.10 çizilen grafikler denklem 3.30 un uyumlu türev altında değişkenlere verilen değerler ile elde edilen üç boyutlu grafiğidir.



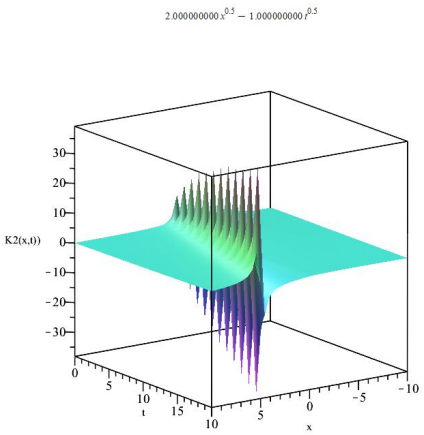
$K_1^{\pm}(\xi)$ çözümü, $\alpha = 0.55$



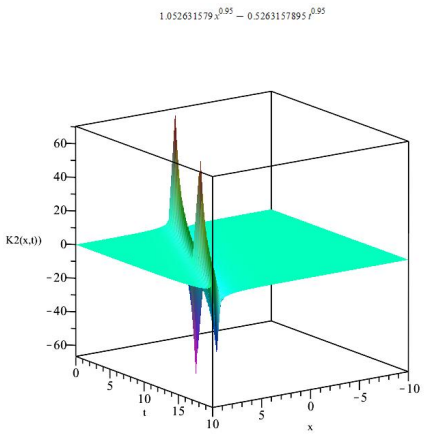
$K_1^{\pm}(\xi)$ çözümü, $\alpha = 0.2$

Şekil 3.9 $K_1^{\pm}(\xi)$ çözümünde α değerlerinin değişiminde grafiğin nasıl değiştiği görülmektedir.

Soldaki grafik için $\rho = 1, \omega = -1, p_2 = 1, p_3 = 1, w = 0.5$ parametreleri kullanılmıştır. Sağdaki grafik için ise $\rho = 1, \omega = -1, p_2 = -1, p_3 = -1, w = 0.5$ parametreleri alınmıştır.



$K_2^{\pm}(\xi)$ çözümü $\alpha = 0.5$



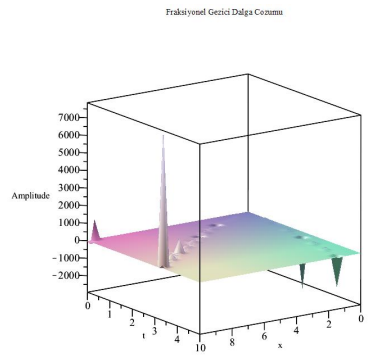
$K_2^{\pm}(\xi)$ Çözümü $\alpha = 0.95$

Şekil 3.10 $K_2^{\pm}(\xi)$ çözümünde α değerlerinin değişiminde grafiğin nasıl değiştiği görülmektedir.

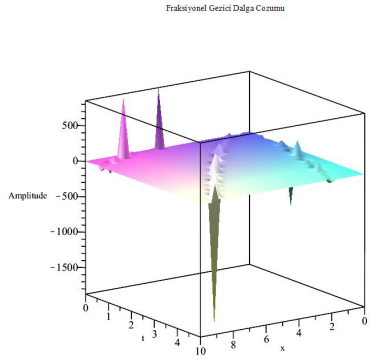
Her iki grafik için de $\rho = 1, \omega = -1, p_2 = 0.5, p_3 = 1, w = 0.5$ parametreleri kullanılmıştır. Burada değiştireilen tek şey $alpha$ değerleridir. Burada bir soliton çözümü elde edilememiştir.

3.2.3 M Kesikli Türevle Üretilen Çözümlerin Grafiksel İncelenmesi

M-kesikli türev tanımına dayalı analitik çözümler, bu kısımda gösterilmiştir. Değişen α değerlerine göre grafikte oluşan değişimler gösterilmiştir.



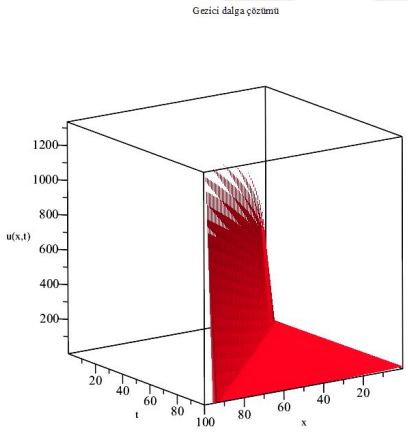
$K_1^{\pm}(\xi)$ çözümü, $\alpha = 0.2$



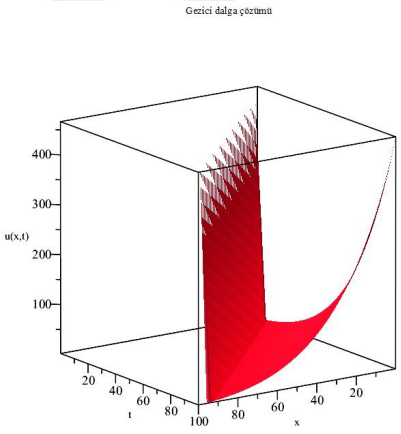
$K_1^{\pm}(\xi)$ çözümü, $\alpha = 0.5$

Şekil 3.11 $K_1^{\pm}(\xi)$ çözümünde α değerlerinin değişiminde grafiğin nasıl değiştiği görülmektedir.

Her iki grafikte de $\rho = 1, \omega = 1, p_1 = 1, p_3 = 2, w = 1$ parametreleri alınmıştır.



$K_2^{\pm}(\xi)$ çözümü, $\alpha = 0.5$



$K_2^{\pm}(\xi)$ çözümü, $\alpha = 0.96$

Şekil 3.12 $K_2^{\pm}(\xi)$ çözümünde α değerlerinin değişiminde grafiğin nasıl değiştiği görülmektedir.

Her iki grafikte de $\rho = 1, \omega = 1, p_1 = 1, p_2 = 0.5, w = 1$ parametreleri alınmıştır.

Şekil 3.11 de gösterilen grafikler denklem (3.29) un M- Kesikli türev altındaki değişkenlere göre üç boyutlu grafiğidir. Şekil 3.12 de gösterilen grafikler denklem (3.30) un M-Kesikli türev altındaki değişkenlere verilen değerler ile oluşturulan üç boyutlu grafiğidir.

3.3 Modülasyon Karasızlığı

3.3.1 Zaman Kesirli Pertürbe Gerdjikov-Ivanov Denkleminin Modülasyon Kararsızlığı

Bu alt bölümde GI denkleminin modülasyon kararsızlığı incelenmiştir.

$$M(x,t) = a_0 e^{i\phi t^\alpha} \tag{3.33}$$

burada a_0 keyfi bir reel sabittir. (3.33)'ü (3.1)'ye yerleştirdiğimizde $\phi = (a_0)^4 b$ elde ederiz. Bozulmuş durağan çözümü alıyoruz:

$$M(x,t) = (a_0 + \epsilon E(x,t))e^{i(a_0)^4 b t^\alpha} \tag{3.34}$$

burada $E(x,t)$ karmaşık kesirli fonksiyondur. (3.34) numaralı denklemi (3.1) numaralı denkleme yerleştirdiğimizde aşağıdaki lineer denklemi elde ederiz:

$$\begin{aligned} &iD_t^\alpha E + aD_x^{2\alpha} E + {a_0}^4 b(2\overline{E} + 3E) - ica_0{}^2 D_x^\alpha \overline{E} \\ &\quad - id_1 D_x^\alpha E - id_2 a_0{}^2 (D_x^\alpha \overline{E} + 2D_x^\alpha E) - i\theta a_0{}^2 (D_x^\alpha \overline{E} + D_x^\alpha E) = 0 \end{aligned} \tag{3.35}$$

burada (3.35) numaralı denklem şu şekilde tanımlanabilir:

$$E(x,t) = u_1 e^{i(Nx^\alpha - Wt^\alpha)} + u_2 e^{-i(Nx^\alpha - Wt^\alpha)} \tag{3.36}$$

burada N karmaşık frekansı, W reel bozulma dalga sayısını, ve u_1, u_2 lineer kombinasyonun katsayılarını temsil eder. (3.36)'yi (3.35) numaralı denkleme yerleştirdiğimizde aşağıdaki denklem sistemini elde ederiz:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned} &W - aN^2 + a_0^4 b + d_1 N + a_0^2 \theta N + a_0^2 d_2 N = 0, \\ &a_0^4 b - a_0^2 cN - a_0^2 \theta N - a_0^2 d_2 N = 0, \\ &a_0^4 b + a_0^2 cN + a_0^2 \theta N + a_0^2 d_2 N = 0, \\ &-W - aN^2 + a_0^4 b - d_1 N - a_0^2 \theta N - a_0^2 d_2 N = 0 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Determinantı hesapladığımızda aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$a^2 N^4 + N^2 a_0^4 (-2ab + c^2 + 2c\theta + 2cd_2) - (W + d_1 N)^2 - 2a_0^2 N[(W + Nd_1)(\theta + d_2)] = 0 \tag{3.39}$$

(3.39) numaralı denklemi göz önünde bulundurarak (3.1) numaralı denklemde aşağıdaki ilişkiyi kullanabiliriz:

$$W = -N(d_1 + a_0^2(d_2 + \theta)) \pm \sqrt{a^2N^4 + a_0^4N^2(-2ab + c^2 + (d_2 + \theta)(2c + \theta + d_2))} \tag{3.40}$$

(3.40) numaralı denklemden, aşağıdaki durumda (3.1) numaralı denklemin durağan durum kararlılığını görebiliriz:

$$a^2N^4 + a_0^4N^2(c^2 + (d_2 + \theta)(2c + \theta + d_2)) < 2abN^2a_0^4. \tag{3.41}$$

$$G(M) = 2\,\mathrm{Im}(W) = 2\,\mathrm{Im}\left(\sqrt{a^2N^4 + a_0^4N^2(c^2 - 2ab + (d_2 + \theta)(2c + \theta + d_2))}\right) \tag{3.42}$$

3.3.2 Zaman Kesirli Pertürbe Chen-Lee-Liu Denkleminin Modülasyon Kararsızlığı

Bu alt bölümde doğrusal olmayan kesirli pertürbe CLL denkleminin modülasyon kararsızlığı araştırılmaktadır. Pertürbe edilmiş sürekli dalga çözümü aşağıdaki gibi alınır:

$$q(x,t) = \left[\sqrt{P_0} + \epsilon B(x,t)\right] e^{i\left(\frac{kx^\alpha}{\alpha} - \frac{wt^\alpha}{\alpha}\right)} \tag{3.43}$$

Burada $\sqrt{P_0}$ ifadesi dalganın sabit genliğini ifade eder. ϵ çok küçük bir reel parametredir ve $B(x,t)$ ise pertürbasyon fonksiyonunu ifade eder. Burada sürekli dalga çözümüne çok küçük bir dalga bozulması eklenerek denklemin bu pertürbasyon sonucunda nasıl hareket ettiği gösterilir. Denklem (3.43) ü denklem (3.14) te yerine yazıp denklemi lineerleştirdiğimizde aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} &i\epsilon B_t + a_0\epsilon B_{xx} + (2ia_0k\epsilon - ia_2\epsilon + ia_1P_0\epsilon - ia_4P_0\epsilon - 2ia_3P_0\epsilon)B_x \\ &\quad + (-2a_1P_0k\epsilon - a_0k^2\epsilon + w\epsilon + a_2k\epsilon + 2a_3kP_0\epsilon)B \\ &\quad + (a_3kP_0\epsilon - a_1P_0k\epsilon)\bar{B} = 0 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Denklem lineerleştiği için burada $B(x,t)$ fonksiyonun çözüm formu aşağıdaki gibi alınır:

$$B(x,t) = u_1e^{i(Mx - \Omega t)} + u_2e^{-i(Mx - \Omega)t} \tag{3.45}$$

Denklem (3.45) te u_1 ve u_2 sabit, M reel sayısı dalga sayısı ve Ω frekanstır. Denklem (3.45) i denklem (3.44) yerine yazılınca aşağıdaki denklem sistemini elde ederiz:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.46}$$

Burada determinantı sıfıra eşitlediğimizde aşağıdaki denklemi elde edilir:

$$\begin{aligned}
&-\Omega^2\epsilon^2 + \epsilon^2\Big[w^2 + k^4a_0^2 - 2k^2wa_0 + k^2a_2^2 - M^2a_2^2 - 2M^2wa_0 + M^4a_0^2\Big] \\
&\quad + \epsilon^2\Big[2kwa_2 + 4kwP_0(a_3 - a_1) + 4k^2P_0a_2(a_3 - a_1) - 2k^3a_0a_2\Big] \\
&\quad + \epsilon^2\Big[3k^2P_0^2(a_3^2 - 2a_1a_3 + a_1^2) + 4k^3P_0a_0(a_1 - a_3)\Big] \\
&\quad + \epsilon^2\Big[-2M^2P_0a_2a_4 - 4M^2P_0a_2a_3 + 2M^2P_0a_1a_2 + 2M^2ka_0a_2\Big] \\
&\quad + \epsilon^2\Big[-M^2P_0^2(a_4^2 + 4a_3a_4 + 4a_3^2) + 2M^2P_0^2a_1(a_4 + 2a_3) - M^2P_0^2a_1^2\Big] \\
&\quad + \epsilon^2\Big[4M^2kP_0a_0(a_4 + a_3) - 2M^2k^2a_0^2\Big] \\
&\quad + \Omega\epsilon^2\Big[4Mka_0 + 2MP_0(a_1 - 2a_3 - a_4)\Big] = 0
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Denklem (3.47) Ω kök olacak şekilde çözüldüğünde modülasyon kararsızlığının durumunu oluşturur.

$$\Omega = M(2ka_0 + P_0a_1 - 2P_0a_3 - a_2) \pm \sqrt{\Delta} \tag{3.48}$$

$$\begin{aligned}
\Delta =& M^4a_0^2 + (2M^2k^2 + k^4)a_0^2 + 4kP_0a_0(M^2 + k^2)(a_1 - a_3) \\
&+ 3k^2P_0^2(a_1 - a_3)^2 - 2ka_0a_2(M^2 + k^2) \\
&- 4k^2P_0a_2(a_1 - a_3) - 2wa_0(M^2 + k^2) \\
&+ k^2a_2^2 - 4kwP_0(a_1 - a_3) + 2kwa_2
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Burada $\Delta \geq 0$ ise denklem kararlı yapıdadır, $\Delta < 0$ ise modülasyon kararsızlığı vardır.

4
SONUÇ

Bu çalışmada kesirli pertürbe Gerdjikov-Ivanov denklemi ile kesirli türevli Chen-Lee-Liu denkleminin analitik çözümleri incelenmiştir. Her iki denklemde uyumlu türev ve M-Kesikli türev altındaki analitik çözümlerinde çözümü değiştirmeseler bile denklemin grafiğinde değişikliklere neden oldukları gösterilmiştir. KPGI denklemini modifiye w/g metodu ile analitik çözümlerine ulaşılmıştır. Kesirli türevli pertürbe Chen-Lee-Liu modelinde $n = 1$ alınarak modifiye Sardar Alt Denklem methodu ile analitik çözümleri gösterilmiştir. Bu sonuçlarda elde edilen değerler uyumlu türev ve M kesikli türevin doğrusal olmayan ifadeleri modellemek için etkili bir araç olarak kullanılabilmektedir. Bu çalışmanın ayrıca diğer odak noktası ise modülasyon kararsızlığının denklemlere uygulanmasıdır. Her iki denklem için de modülasyon kararsızlığı yapılmış, lineer kararlılık yaklaşımı ile kararsızlık koşulları belirlenmiştir.GI denklemi için pertürbasyon altında kararlılık kriterleri türetilmiş, CLL denklemi içinse modülasyon kararsızlığının varlığı Δ diskriminantı üzerinden matematiksel olarak ifade edilmiştir.

Sonuç olarak, bu çalışma optik fiberlerdeki doğrusal olmayan dalga dinamiklerinin kesirli türevlerle modellenmesine yönelik analitik ve sayısal bir çerçeve sunmuş; uyumlu ve M-kesikli türevlerin, geleneksel tamsayılı türevlere kıyasla sistemin geçmişe bağımlılığını ve bellek etkilerini daha iyi yansıttığını göstermiştir. Elde edilen çözümler ve kararlılık analizleri, yüksek hızlı optik iletişim sistemlerinde sinyal bütünlüğünün korunması ve optik solitonların kontrolü gibi uygulamalara teorik katkı sağlayabilecek niteliktedir. Gelecekteki çalışmalarda, bu yöntemlerin daha karmaşık perturbeli modellere ve yüksek boyutlu sistemlere uygulanması önerilmektedir.

KAYNAKÇA

[1] M. Arshad, A. R. Seadawy D. Lu, "Optical soliton solutions of the generalized higher-order nonlinear Schrödinger equations and their applications," *Optical and Quantum Electronics*, c. 50, no. 11, s. 421, 2018.

[2] A. Hasegawa, "Soliton-based optical communications: an overview," *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, c. 6, no. 6, ss. 1161–1172, 2002.

[3] A. Hasegawa, "An historical review of application of optical solitons for high speed communications," *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, c. 10, no. 3, ss. 475–485, 2000.

[4] P. S. Lomdahl, "What is a soliton," *Los Alamos Science*, c. 10, ss. 27–31, 1984.

[5] M. Helal, "Soliton solution of some nonlinear partial differential equations and its applications in fluid mechanics," *Chaos, Solitons & Fractals*, c. 13, no. 9, ss. 1917–1929, 2002.

[6] L. Kaur A.-M. Wazwaz, "Optical solitons for perturbed Gerdjikov–Ivanov equation," *Optik*, c. 174, ss. 447–451, 2018.

[7] I. Onder, A. Secer, M. Ozisik M. Bayram, "Investigation of optical soliton solutions for the perturbed Gerdjikov-Ivanov equation with full-nonlinearity," *Heliyon*, c. 9, no. 2, 2023.

[8] H. M. Baskonus, M. Osman, H. u. Rehman, M. Ramzan, M. Tahir S. Ashraf, "On pulse propagation of soliton wave solutions related to the perturbed Chen–Lee–Liu equation in an optical fiber," *Optical and Quantum Electronics*, c. 53, no. 10, s. 556, 2021.

[9] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef M. Sababheh, "A new definition of fractional derivative," *Journal of computational and applied mathematics*, c. 264, ss. 65–70, 2014.

[10] A. Fleitas, J. E. Napoles Valdes, J. M. Rodríguez García J. M. Sigarreta Almira, "Note on the generalized conformable derivative," 2021.

[11] C. Li W. Deng, "Remarks on fractional derivatives," *Applied mathematics and computation*, c. 187, no. 2, ss. 777–784, 2007.

[12] A. Has, B. Yılmaz D. Baleanu, "On the geometric and physical properties of conformable derivative," *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, c. 12, no. 2, ss. 60–70, 2024.

[13] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef M. Sababheh, "A new definition of fractional derivative," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, c. 264, ss. 65–70, 2014, issn: 0377-0427. doi: https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.01.002. erişim adresi: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042714000065.

[14] F. Alabau-Boussouira, "Comments on the highly cited article:" A new definition of fractional derivative", J. of Comp. Appl. Math. 264, DOI: 10.1016/j. cam. 2014.01. 002 [1] and four citing articles in the light of quality in peer-review, scientific publishing and citations practices," 2025.

[15] U. N. Katugampola, "A new fractional derivative with classical properties," *arXiv preprint arXiv:1410.6535*, 2014.

[16] J. Sousa E. C. de Oliveira, "A new truncated M-fractional derivative type unifying some fractional derivative types with classical properties," *arXiv preprint arXiv:1704.08187*, 2017.

[17] S. Salahshour, A. Ahmadian, S. Abbasbandy D. Baleanu, "M-fractional derivative under interval uncertainty: Theory, properties and applications," *Chaos, Solitons Fractals*, c. 117, ss. 84–93, 2018, issn: 0960-0779. doi: https://doi.org/10.1016/j.chaos.2018.10.002. erişim adresi: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077918309998.

[18] K. A. Gepreel, "Exact solutions for nonlinear integral member of Kadomtsev–Petviashvili hierarchy differential equations using the modified (w/g)-expansion method," *Computers Mathematics with Applications*, c. 72, no. 9, ss. 2072–2083, 2016, issn: 0898-1221. doi: https://doi.org/10.1016/j.camwa.2016.08.005. erişim adresi: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S089812211630459X.

[19] E. M. Zayed A. H. Arnous, "The modified wg-expansion method and its applications for solving the modified generalized Vakhnenko equation," *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, c. 32, ss. 477–492, 2014.

[20] K. A. Gepreel, "Exact solutions for nonlinear integral member of Kadomtsev–Petviashvili hierarchy differential equations using the modified (w/g)-expansion method," *Computers & Mathematics with Applications*, c. 72, no. 9, ss. 2072–2083, 2016.

[21] M. M. Tariq, M. B. Riaz M. Aziz-ur-Rehman, "Investigation of space-time dynamics of Akbota equation using Sardar sub-equation and Khater methods: unveiling bifurcation and chaotic structure," *International Journal of Theoretical Physics*, c. 63, no. 8, s. 210, 2024.

[22] A. Refaie Ali, M. Nur Alam, M. Fayz-Al-Asad, M. Iqbal M. Hassan, "Precise soliton solutions of the Landau-Ginzburg-Higgs equation via the Sardar sub-equation method," *Discover Applied Sciences*, c. 7, no. 9, s. 950, 2025.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Konferans Bildirisi

1. S.Demirkaya, A. Özkan, ”An Optical Soliton Solutions of the Time Fractional Perturbed Gerdjikov-Ivanov Equation”, ICMASE 2024: International Conference on Mathematics and Its Applications in Science and Engineering, Polytechnic Institute of Coimbra, Coimbra, Portugal

2. S.Demirkaya, A. Özkan,”The Investigation of Perturbed Gerdjikov-Ivanov Equation with M-fractional Derivative in Optical Fiber”, ICOMAA 2025: 8th International Hybrid Conference on Mathematical Advances and Applications, ˙ Istanbul, Türkiye.

Proje

1. A. Özkan, S. Demirkaya, "Optik Fiberde Kullanılan Dalga Denklemlerinin İncelenmesi", Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Ara¸stırma Projesi (Tez Projesi, Yüksek Lisans), FYL-2024-6557, 2024-2026.