Alıştırmalar 3.1

(1) $c=\{c_n\}\in l^\infty$ olsun.

$T_c : l^2 \to l^2$, $T_c(\{x_n\})=\{c_n x_n\}$ $\Rightarrow T_c^* = ?$

(2) $T: l^2 \to l^2$

$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4, \dots)$

$\Rightarrow T^* = ?$

(3) H bir Hilbert uzayı ve $y, z \in H$ olsun.

Eğer $T(x) = (x, y)z$ sınırlı lineer operatör ise

$T^*(w) = (w, z)y$ olduğunu gösteriniz.

Çözümler

(1) $\{x_n\}, \{y_n\} \in l^2$ ve $\{z_n\} = T_c^*\{y_n\}$ olsun.

$$(\{c_n x_n\}, \{y_n\}) = (T_c\{x_n\}, \{y_n\}) = (\{x_n\}, \{z_n\})$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \overline{y_n} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{z_n}$$

Eğer tüm $n\in\mathbb{N}$ için $\overline{z_n} = c_n \overline{y_n}$ (yada $z_n = \overline{c_n} y_n$) ise bu eşitlik tüm $\{x_n\}\in l^2$ için sağlanır.

$\overline{c} = \{\overline{c_n}\}$ alınırsa $(T_c)^* = T_{\overline{c}}$ bulunur.

adjoint tek olduğundan

Alıştırmalar 3.2

1) $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ matrisi normal midir?

2) Alıştırma 3.1 de (1) ve (2) deki operatörler normal midir? (T_c normal, T normal değil)

3) T_c operatörü verilsin.

(a) $\forall n\in\mathbb{N}$ için $c_n\in\mathbb{R}$ ise T_c kendine-eştir

(b) $\forall n\in\mathbb{N}$ için $|c_n|=1$ ise T_c üniterdir.

4) $S,T\in B(H)$ ve S kendine-eş ise T^*ST de kendine eş?

5) $A\in B(H)$ tersinir ve kendine-eş ise A^{-1} de kendine-eş

(A^* da tersinirdir ve $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$ dir $\longrightarrow A=A^* \Rightarrow$)

6) $S,T\in B(H)$ kendine-eş op.ler olsun.

ST kendine-eş $\Longleftrightarrow$ $ST=TS$ gösteriniz.

2. (25 points) Let

$$S=\operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}0\\2\\8\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-3\\4\\5\end{pmatrix}\right\}$$

be a subspace of R^4. Find a basis for $S^\perp$, the orthogonal complement of S in R^4.