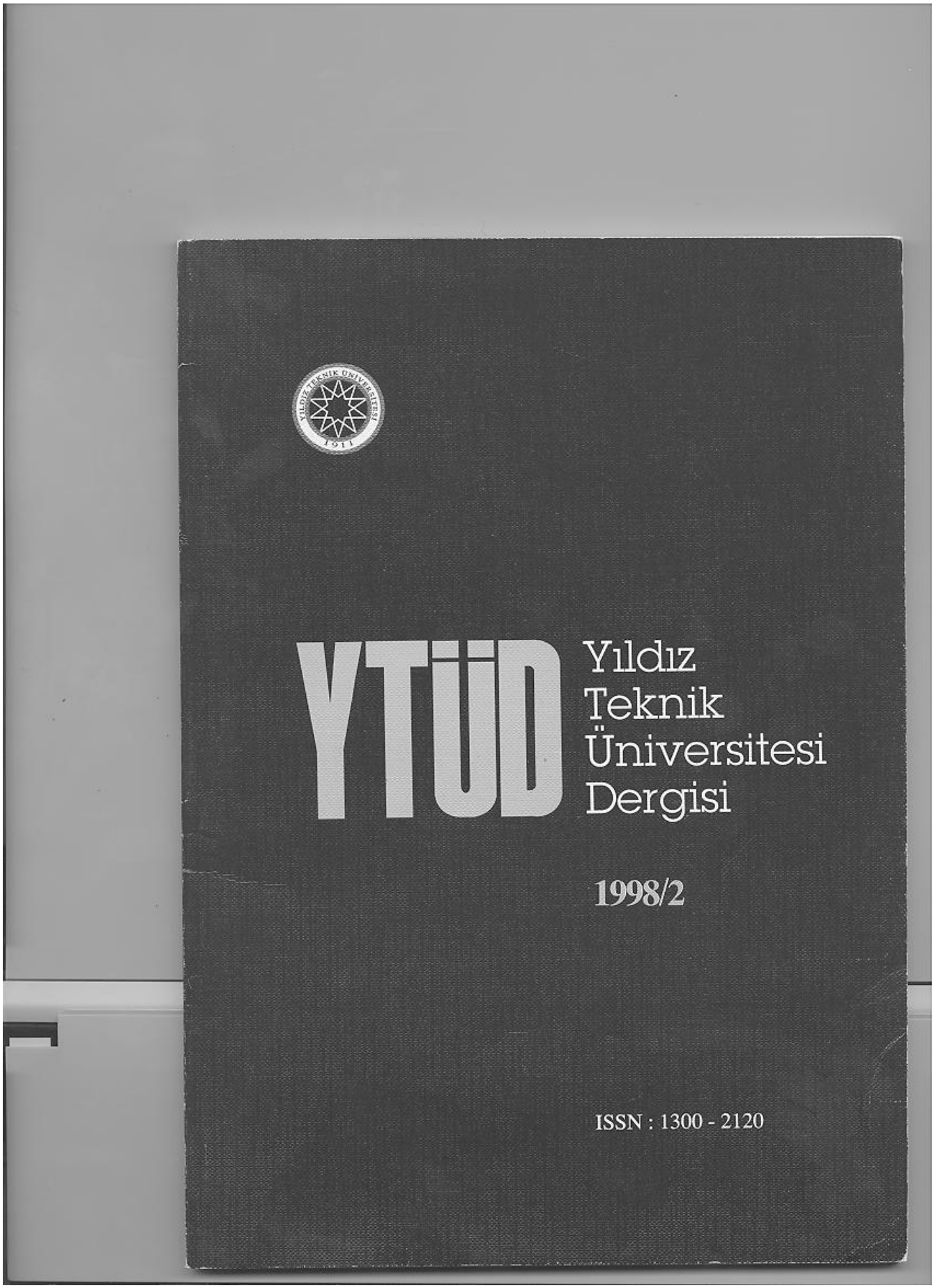

YTÜD
Yıldız
Teknik
Üniversitesi
Dergisi
1998/2
ISSN : 1300 - 2120

ARAŞTIRMA MAKALESİ

YARI EKSENDE DÖRT ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMDEN OLUŞAN SİSTEM İÇİN TERS SAÇILMA PROBLEMİ

Coşkun GÜLER

Yıldız Teknik Üniversitesi, Matematik Mühendisliği Bölümü, Beşiktaş, İstanbul

Geliş Tarihi: 20.11.1997

INVERSE SCATTERING PROBLEM FOR A SYSTEM OF FOUR ORDINARY-DIFFERENTIAL EQUATIONS ON THE HALF-AXIS

ABSTRACT

Let us consider the system of differential equations given on a half-axis

$$-i\frac{dy_k(x)}{dx}+\sum_{j=1}^{4}c_{kj}(x)y_j(x)=\lambda\xi_k y_k(x),\quad k=1,2,3,4$$

where $c_{kj}(x)$'s are complex-valued functions satisfying $c_{kk}(x)=0$ and

$$|c_{kj}(x)|\le c\exp(-\varepsilon x),\ \varepsilon>0\quad(\varepsilon \text{ and } c \text{ const.})\qquad k,j=1,2,3,4.$$

Three problems given for the above mentioned equations are considered simultaneously and matrix function $S(\lambda)$ is defined on the half-axis. It is also Scattering data are defined by means of that matrix function and the elements of its inverse.

Relationships between scattering matrix and scattering data are determined when the problem is given on the whole axis and coefficients are zero in case of $x<0$. By using analytic representation of the solution it is shown that the coefficient of the system of equations is defined uniquely under the solvability condition of Riemann Problem.

ÖZET

Yarı eksende

$$-i\frac{dy_k(x)}{dx}+\sum_{j=1}^{4}c_{kj}(x)y_j(x)=\lambda\xi_k y_k(x),\quad k=1,2,3,4$$

adi diferansiyel denklem sistemini gözönüne alalım.

Burada $c_{kj}(x)$ katsayıları, $c_{kk}(x)=0$ ve

$|c_{kj}(x)|\le c\exp(-\varepsilon x)\quad \varepsilon>0\quad (\varepsilon \text{ and } c \text{ const.}),\qquad k,j=1,2,3,4$

şartlarını sağlayan kompleks değerli fonksiyonlardır.

Yukarıdaki denklem sistemi için verilmiş üç problem birlikte ele alınarak, yarı eksende $S(\lambda)$ matris fonksiyonu ve tersinin elemanlarının yardımıyla ise saçılma verileri tanımlanmıştır.

Tüm eksende tanımlanmış ve $x<0$ olduğunda katsayıların sıfır olması halinde saçılma matrisi ile, saçılma verileri arasında önemli ilişkiler olduğu belirlenmiştir. Çözümün analitik temsilleri kullanılarak, Riemann Probleminin çözülebilirliği şartı dahilinde, verilen denklem sisteminin katsayılarının, bu verilerin yardımı ile tek türlü tanımlandığı gösterilmiştir.

YARI EKSENDE DÖRT ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMDEN OLUŞAN LİNEER SİSTEM İÇİN TERS SAÇILMA PROBLEMİ

Bu çalışmada yarı eksende $(x\ge 0)$

$$-i\frac{dy_k(x)}{dx}+\sum_{j=1}^{4}c_{kj}(x)y_j(x)=\lambda\xi_k y_k(x)\,,\quad k=1,2,3,4 \qquad (1)$$

şeklinde dört adi lineer birinci mertebe diferansiyel denklemden oluşan sistem için ters saçılma problemi incelenmiştir. Burada $c_{kj}(x)$ $(k,j=1,2,3,4)$ fonksiyonları kompleks değerli ve

$c_{kk}(x)=0\qquad k=1,2,3,4\qquad$ ve

$$|c_{ij}(x)| \le c\exp(-\varepsilon x) \ , \quad \varepsilon > 0 \quad (\varepsilon \text{ ve } c \text{ sabittir}) \qquad (2)$$

şartlarını sağlıyorlar. ξ_k *lar ise* $\xi_1 > \xi_2 > \xi_3 > 0 > \xi_4$ şartlarını sağlayan sabitlerdir.

(1) denklem sistemi için yarı eksende aşağıdaki üç problem gözönüne alınmıştır.

Birinci problemde

$$y_4^1(0) = y_1^1(0) \ ,$$

sınır şartı ve $x \to +\infty$ için,

$$y_k^1(x,\lambda) = A_k \exp(i\xi_k \lambda x) + o(1), \quad k = 1, 2, 3 \quad x \to +\infty \ ,$$

asimtotik ifadesi veriliyor.

İkinci problemde

$$y_2^2(0) = y_3^2(0) \ ,$$

sınır şartı ve $x \to +\infty$ için,

$$y_k^2(x,\lambda) = A_k \exp(i\xi_k \lambda x) + o(1), \quad k = 1, 2, 3 \quad x \to +\infty \ ,$$

asimtotik ifadesi veriliyor.

üçüncü problemde

$$y_4^3(0) = y_3^3(0),$$

sınır şartı ve $x \to +\infty$ için,

$$y_k^3(x,\lambda) = A_k \exp(i\xi_k \lambda x) + o(1), \quad k = 1, 2, 3 \quad x \to +\infty \ ,$$

asimtotik ifadesi veriliyor. Burada A_k ' lar sabitdir.

Bu üç problem aynı zamanda ele alındığında dört denkemden oluşan sistem için ters saçılma problemi tanımlanmıştır diyeceğiz.

Bu üç problemin aşağıdaki integral denklem sistemine eşdeğer olduğunu kolayca gösterebiliriz.

$$y_k^p(x) = A_k \exp(i\xi_k \lambda x) + i\int_x^\infty \sum_{j=1}^4 c_{kj}(x') y_j^p(x') \exp(i\xi_k \lambda (x - x'))dx', \quad k = 1, 2,$$

$$y_4^p(x) = B_p \exp(i\xi_4 \lambda x) + i\int_x^\infty \sum_{j=1}^4 c_{4j}(x') y_j^p(x') \exp(i\xi_4 \lambda (x - x'))dx', \qquad (3)$$

Burada

$$B_p = A_p + i\int_0^\infty \sum_{j=1}^4 [c_{pj}(x') \exp(-i\xi_p \lambda x') - c_{4j}(x') \exp(-i\xi_4 \lambda x')] y_j^p(x')dx', \quad p=1, 2, 3 \qquad (4)$$

olmaktadır.

Teorem 1. (1) denklem sisteminin katsayıları (2) şartını sağlıyorsa, o zaman reel λ lar ve keyfi verilmiş A_1, A_2, A_3 sabitleri için yarı eksende birinci, ikinci ve üçüncü problemlerin tek bir çözümü vardır ve

$$y_4^p(x) = B_p \exp(i\xi_4 \lambda x) + o(1), \qquad x \to +\infty, \quad p = 1, 2, \qquad (5)$$

olur.

Teorem 1 ve (5) ifadesinden görüldüğü gibi $A = (A_1, A_2, A_3)^T$ vektörünü $B = (B_1, B_2, B_3)^T$ vektörüne dönüştüren $S(\lambda)$ matris fonksiyonu vardır. Bu matris fonksiyonuna yarı eksende saçılma matrisi denir.

$$S(\lambda)=\begin{pmatrix} S_{11}(\lambda) & S_{12}(\lambda) & S_{13}(\lambda) \\ S_{21}(\lambda) & S_{22}(\lambda) & S_{23}(\lambda) \\ S_{31}(\lambda) & S_{32}(\lambda) & S_{33}(\lambda) \end{pmatrix}$$

şeklindedir. (1) denklem sisteminin katsayıları sıfır olduğunda $B_k = A_k \quad k = 1, 2, 3$ olduğundan $S(\lambda)$ birim matris olur.

Yarı eksende ters saçılma problemi denildiğinde verilmiş $S(\lambda)$ matris fonksiyonuna ve bazı verilere göre (1) denklem sisteminin katsayılarının bulunması anlaşılır.

Yarı eksende ters saçılma problemi aşağıdaki gibi çözülür.

1- (1) denklem sistemi için , katsayıları $x < 0$ olduğunda sıfır olan halde tüm eksende ters saçılma problemi incelenir.

$x \in (-\infty, \infty)$ olduğunda üç denklemden oluşan sistem için ters saçılma problemiyle ilgili çalışmalar V.E. Zakharov [4], A.B. Shabat [3], D.J. Kaup [2], R. Beals [1], R.R. Coifman vs. tarafından yapılmıştır. İki denklemden oluşan sistem için (özel halde Dirac sistemi) B.M. Levitan, M.G. Gasymov, L.P. Nizhnik, M.G. Maksudov vs. tarafından çalışmalar yapılmıştır.

Zakharov ve Shabat 1971 yılında "Ters Saçılma" yöntemini

$$iq_t = q_{xx} + \chi q|q|^2 \quad \chi > 0,$$

Shöridinger denklemine uygulanmıştır (Zakharov et.al, 1971). Burada yardımcı lineer denklem olarak Dirac denklem sistemi

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ y(x,\lambda)=\begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) \\ y_2(x,\lambda) \end{pmatrix},\ \Omega(x)=\begin{pmatrix} P(x) & Q(x) \\ Q(x) & -P(x) \end{pmatrix}$$

gözönüne alınmıştır.

M.j. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell ve H. Segur ise ayni Dirac Denklem Sistemi' nin yardımıyla Ters saçılma yöntemini

$$u_{xt} = \sin u$$

Sin-Gordon Denklemine uygulamıştır. (Ablowitz et.al, 1973)

1973 yılında V.E. Zakharov ve S.V. Manakov üç denklemden oluşan birinci mertebeden adi lineer diferansiyel denklem sistemi ile

$$-i\frac{dy_k(x)}{dx} + \sum_{j=1}^{3} c_{kj}(x)y_j(x) = \lambda\xi_{kj}y_k(x), \quad k=1, 2, 3$$

nonlineer yansıyan ve birbirini etkilemeyen üç dalga

$$Q_{1t} + c_1Q_{1x} = i\gamma_1Q_2^*Q_3^*,$$

$$Q_{2t} + c_2Q_{2x} = i\gamma_2Q_1^*Q_3^*,$$

$$Q_{3t} + c_3Q_{3x} = i\gamma_3Q_1^*Q_2^*,$$

denklemi arasında yoğun ilişki olduğunu göstermiştir (Zakharov et.al, 1973).
(*Burada* $\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = -1$ *ve* $\gamma_i = \pm 1$ *dir.*)

Tüm eksendeki saçılma matrisi, $+\infty$ daki çözümü $-\infty$ daki çözüme dönüştüren matris olarak tanımlanır. Bu matrisi $S^{f_1}(\lambda)$ ile gösterelim.

Katsayıları $x < 0$ için sıfır olan halde, genel halden farklı olarak, $S^{f_1}(\lambda)$ için yeni bir takım özellikler ortaya çıkmaktadır. Bu özellikler yarı eksende tanımladığımız $S(\lambda)$ matrisi ile $S^{f_1}(\lambda)$ matrisi arasında bir ilişki kurmaya imkan vermektedir.

2- $S^{f_1}(\lambda)$ ile tek türlü tanımlanan yeni $S^{f_2}(\lambda)$ matris fonksiyonu tanımlanır. Bu matris fonksiyonu $S^{f_1}(\lambda)$ dan farklı olarak aşağıdaki özelliğe

$$S^{I_2}(\lambda) = \exp(-i\lambda Jx)(I + W_+(x,\lambda))^{-1}(I + W_-(x,\lambda))\exp(i\lambda Jx) \qquad (6)$$

sahiptir. Burada

$$J = diag(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) ,$$

$$W_-(x,\lambda) = \int_{-\infty}^{0} \tilde{W}_-(x,\tau,\lambda)\exp(i\lambda\tau)d\tau ,$$

$$W_+(x,\lambda) = \int_{0}^{\infty} \tilde{W}_+(x,\tau,\lambda)\exp(i\lambda\tau)d\tau ,$$

$$\tilde{W}_-(x,\tau,\lambda) = (\tilde{W}_{ij-}(x,\tau,\lambda))_{i,j=1}^{4} ,$$

$$\tilde{W}_+(x,\tau,\lambda) = (\tilde{W}_{ij-}(x,\tau,\lambda))_{i,j=1}^{4} ,$$

olmaktadır.

3- Denklemin katsayıları ile $\tilde{W}_-(x,0,\lambda)$, $\tilde{W}_+(x,0,\lambda)$ fonksiyonları arasında aşağıdaki ilişki vardır.

$$\begin{aligned} i\,[\,J, \tilde{W}_-(x,0,\lambda)\,] &= -c(x) , \\ i\,[\,J, \tilde{W}_+(x,0,\lambda)\,] &= c(x) , \end{aligned} \qquad (7)$$

Burada A ve B herhangi iki kare matris olmak üzere, [A , B] = AB - BA dır.

4- $S(\lambda)$ matris fonksiyonunun ve tersinin özellikleri aşağıdaki teoremde verilmiştir.

dir.

Buradaki " - " indisleri aşağı yarı düzlemde analitik fonksiyonları " + " indisleri ise yukarı yarı düzlemde analitik fonksiyonları göstermektedir.

Aşağıda vereceğimiz teorem yarı eksendeki ters saçılma problemini bütün eksende $x < 0$ için katsayıları sıfır olan probleme indirger.

Teorem 3. Katsayıları (2) şartını sağlayan (1) denklem sisteminin saçılma matrisi $S(\lambda) = \|S_{ij}(\lambda)\|_{i,j=1}^{3}$ olsun. O zaman $S^{(1)}(\lambda)$ matris fonksiyonu, $S(\lambda)$ matris fonksiyonunun ve baş köşegen minörlerinin yardımı ile (8), (9), (10), (11) formüllerinden (Riemann probleminin çözülmesi ile) elde edilen $R_{1-}(\lambda)$, $R_{2-}(\lambda)$, $R_{3-}(\lambda)$, $N_{1+}(\lambda)$ analitik fonksiyonları ile aşağıdaki şekilde -

$$S^{(1)}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1+m_+(\lambda) & n_+(\lambda) & r_+(\lambda) & 1+N_{1+}(\lambda) \\ m_+(\lambda) & 1+n_+(\lambda) & r_+(\lambda) & 1+N_{1+}(\lambda) \\ m_+(\lambda) & n_+(\lambda) & 1+r_+(\lambda) & 1+N_{1+}(\lambda) \\ m_+(\lambda) & n_+(\lambda) & r_+(\lambda) & 1+N_{1+}(\lambda) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1+R_{2-}(\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+R_{1-}(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+R_{3-}(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11}(\lambda) & S_{12}(\lambda) & S_{13}(\lambda) & -1 \\ S_{21}(\lambda) & S_{22}(\lambda) & S_{23}(\lambda) & -1 \\ S_{31}(\lambda) & S_{32}(\lambda) & S_{33}(\lambda) & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

ifade edilir.

Burada $m_+(\lambda)$, $n_+(\lambda)$ ve $r_+(\lambda)$ fonksiyonları

$$m_+(\lambda) - n_-(\lambda) = (1+N_{1-}(\lambda))(1+R_{2-}(\lambda))^{-1}\gamma_{11}(\lambda) \quad (16)$$

$$n_+(\lambda) - h_-(\lambda) = (1+N_{1-}(\lambda))(1+R_{1-}(\lambda))^{-1}\gamma_{12}(\lambda) \quad (17)$$

$$r_-(\lambda) - k_-(\lambda) = (1+N_{1-}(\lambda))(1+R_{3-}(\lambda))^{-1}\gamma_{13}(\lambda \quad (18)$$

Riemann probleminin çözümünden bulunur.

$S^{(1)}(\lambda)$ matris fonksiyonunun determinantı

$$\det S^{(1)}(\lambda) = \det S(\lambda)\,(1+R_{1-}(\lambda))\,(1+R_{2-}(\lambda))\,(1+R_{3-}(\lambda))(1+N_{1-}(\lambda)) \qquad (19)$$

olur. Buradan görüldüğü gibi $S^{(1)}(\lambda)$ matris fonksiyonunun sıfırları ve kutup noktaları, $S(\lambda)$ matris fonksiyonu $(1+R_{1-}(\lambda))$, $(1+R_{2-}(\lambda))$, $(1+R_{3-}(\lambda))$ *ve* $(1+N_{1-}(\lambda))$ fonksiyonlarının sıfırlarından ve kutup noktalarından oluşur.

Böylece yarı eksende tanımlanmış olan problem bütün eksende tanımlanmış probleme indirgenmiş olur.

Teorem 4. Eğer (1) denklem sisteminin katsayıları (2) şartını sağlıyorsa, o zaman tüm eksende verilmiş $S^{(1)}(\lambda)$ matrisi, bu matrisin sıfırları ve kutup noktalarına göre (1) denklem sisteminin katsayıları tek türlü tanımlanır.

Bu teorem ve (15), (19) ifadelerinden aşağıdaki temel teoremi elde etmiş oluruz.

Teorem 5. (1) denklem sisteminin katsayıları (2) şartını sağlıyorsa, o zaman $S(\lambda)$ matrisine, bu matrisin ve $1+R_{1-}(\lambda)$, $1+R_{2-}(\lambda)$, $1+R_{3-}(\lambda)$, $1+N_{1-}(\lambda)$ fonksiyonlarının sıfırlarına ve kutup noktalarına göre (1) denklem sisteminin katsayıları tek türlü tanımlanır.

KAYNAKLAR

1- Ablowitz M.J., Kaup D.J., Newell A.C. and Segur H. (1973a), Method for solving the Sin-Gordon equation, Phys. Rev. Lett., 30, pp. 1262-1264.

2- Beals R. and Coifman R.R., Scattering and Inverse Scattering for first order systems, Communications on Pure and Applied Mathematics. Vol. XXXVII. 39-90 (1984).

3- Kaup D.J., The three-wave interaction - A jondisper sive, Studies in Applied Mathematics 55, 9-44 (1976).

4- Shabat A.B., An Inverse Scattering Problem. Diff. Uravn. 15. 1978. pp. 1824-1834, Diff. Equations 15. 1980. pp. 1299-1307.

5- Zakharov V.E., Manakov S.V. Soviet Phys. JEPT Lett. (1973), 18, 243.

6- Zakharov V.E., Shabat A.B., Ah. Eksp. Teor. Fiz. 61, 118(1971). [Sov. Phys.-JETP 34, 62 (1972)].

7- Güler C., Yarı eksende üç adi diferansiyel denklemden oluşan sistem için ters saçılma problemi, (Doktora tezi), YTÜ, İstanbul, 1996.