ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR

$D \neq \emptyset$ olmak üzere, $D \subset \mathbb{R}^2$ olsun. D deki her bir (x,y) noktasına bir $z=f(x,y)$ reel sayısını eşleyen f kuralına "iki değişkenli fonksiyon" denir. D kümesine "Tanım Kümesi" (Bölgesi), $z=f(x,y)$ değerlerinin kümesine de "Değer Kümesi" denir.

İki değişkenli bir fonksiyon genel olarak $z=f(x,y)$ şeklinde gösterilir. Burada $x,y \to$ bağımsız değişkenler, z ise bu değişkenlere bağlı değişkendir. İki değişkenli fonksiyon $F(x,y,z)=0$ şeklinde kapalı olarak da ifade edilebilir.

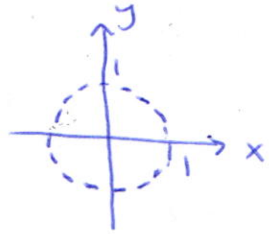
$z=f(x,y)$ fonksiyonu geometrik olarak uzayda bir yüzey üzerindeki bir noktanın z koordinatı olarak temsil edilebilir.

- Benzer şekilde $u=f(x,y,z)$; bağımsız değişkenleri x,y,z olan 3 değişkenli bir fonksiyondur.

- Genel olarak n değişkenli bir fonksiyon $u=f(x_1,\dots,x_n)$ şeklindedir.

⊗ $z = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ fonksiyonunun tanım bölgesini bulup şeklini çizin.

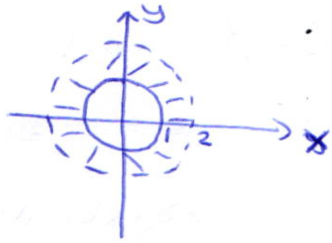
$1-x^2-y^2>0 \to x^2+y^2<1 \Rightarrow$



Ç.O.2

(*) $z = \sqrt{x^2+y^2-1} + \ln(4-x^2-y^2) \rightarrow$ T. Bölgesi?

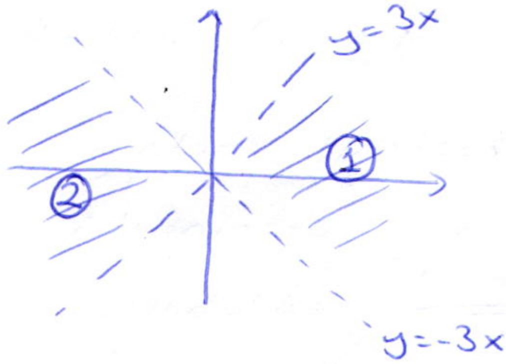
$$\left.\begin{array}{ll} x^2+y^2-1 \geq 0 & \Rightarrow x^2+y^2 \geq 1 \\ 4-x^2-y^2 > 0 & \Rightarrow 4 > x^2+y^2 \end{array}\right\} 1 \leq x^2+y^2 < 4 \Rightarrow$$



(*) $z = \dfrac{1}{\sqrt{9x^2-y^2}}$ T. Bölgesi?

$$9x^2-y^2 > 0 \Rightarrow \underset{\pm}{(3x-y)} \cdot \underset{\pm}{(3x+y)} > 0$$

$$\left.\begin{array}{l} ① \left.\begin{array}{ll} 3x-y>0 & \Rightarrow 3x>y \\ 3x+y>0 & \Rightarrow y>-3x \end{array}\right] -3x<y<3x \\ ② \left.\begin{array}{ll} 3x-y<0 & \Rightarrow 3x<y \\ 3x+y<0 & \Rightarrow y<-3x \end{array}\right] 3x<y<-3x \end{array}\right\}$$

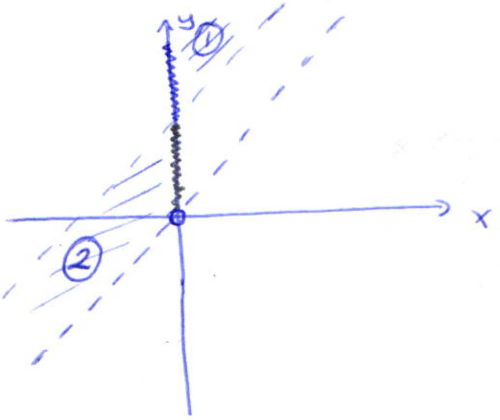


(*) $f(x,y) = \ln[x.\ln(y-x)]$ T. Bölgesi?

$\underset{\pm}{x}.\underset{\pm}{\ln(y-x)} > 0$, $y-x>0$, $y-x \neq 1$, $x \neq 0$

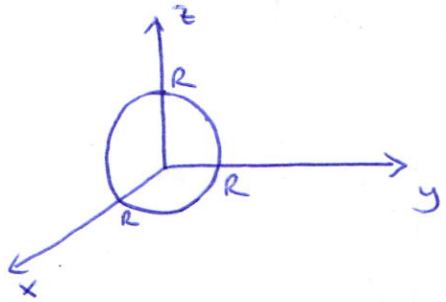
① $x>0$, $\ln(y-x)>0$, $y>x \Rightarrow x>0$, $y-x>1$, $y>x \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x>0 \\ y>x+1 \end{array}}$

② $x<0$, $\ln(y-x)<0$, $y>x \Rightarrow x<0$, $0<y-x<1$, $y>x \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} x<0 \\ x<y<x+1 \end{array}}$



TEMEL YÜZEYLER

Küre: $x^2+y^2+z^2=R^2$ ⇒ Yarıçapı R olan, orjin merkezli küre

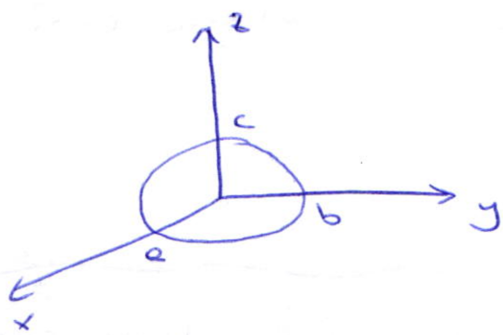


$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ ⇒ Merkezi $M(a,b,c)$ noktası olan R yarıçaplı küre

---

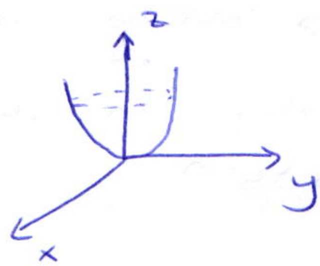
Elipsoid:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ → Orjin merkezli elipsoid

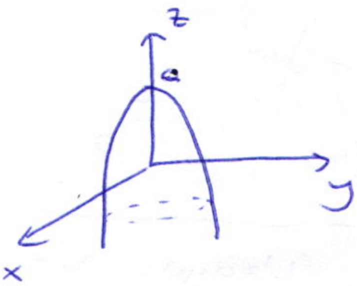


Paraboloid:

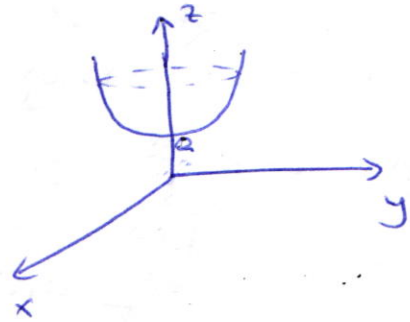
① $z=ax^2+by^2$ $(a,b>0)$
⇓
Orjin tepe noktalı, kolları yukarı paraboloid ⇒



② $z=a-x^2-y^2$ ⇒ $(0,0,a)$ tepe noktalı, kolları aşağı paraboloid ⇒

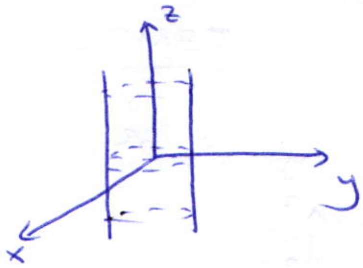


③ $z=a+x^2+y^2$ ⇒ $(0,0,a)$ tepe noktalı, kolları yukarı



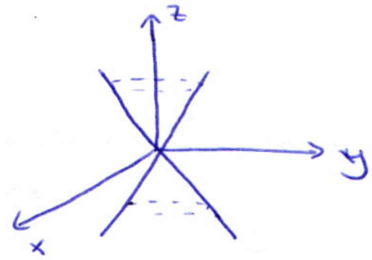
Silindir:

$x^2+y^2=r^2 \Rightarrow z$ boyunca uzanan silindir $\Rightarrow$

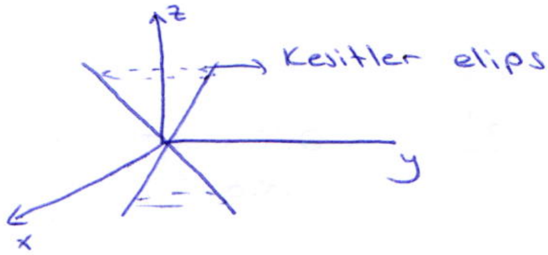


Koni:

* $x^2+y^2=z^2 \Rightarrow$ Dairesel Koni $\Rightarrow$

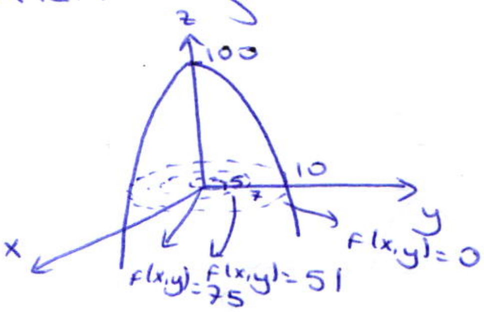


* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2 \Rightarrow$ Eliptik Koni $\Rightarrow$



Seviye Eğrisi: Bir $f(x,y)$ fonksiyonunun bir $f(x,y)=c$ sabit değerine sahip olduğu noktaların kümesi f in seviye eğrisidir.

⊛ $f(x,y)=100-x^2-y^2$ nin şeklini çizip $f(x,y)=0, 75, 51$ seviye eğrilerini gösterin.



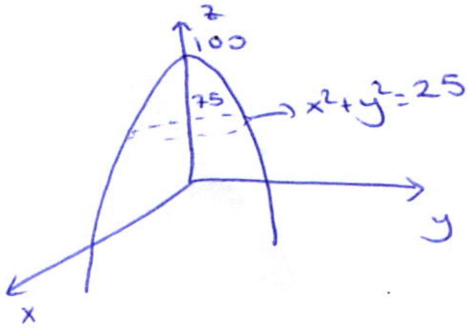
$f(x,y)=0 \Rightarrow x^2+y^2=100$ çemberi

$f(x,y)=51 \Rightarrow x^2+y^2=49$ "

$f(x,y)=75 \Rightarrow x^2+y^2=25$ "

Kontür Eğrisi: Uzayda bir $z=c$ düzleminin bir $z=f(x,y)$ yüzeyini kestiği eğri $f(x,y)=c$ değerini temsil eden noktalardan oluşur. Buna $f(x,y)=c$ kontür eğrisi denir.

⊛ $f(x,y)=100-x^2-y^2$ yüzeyinin $f(x,y)=75$ kontür eğrisi?



$\Rightarrow z=75$ düzleminde, $x^2+y^2=25$ çemberi