T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

m. DERECEDEN GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK MATRİSİNİN BAZI DİZİ UZAYLARINDA SPEKTRUMU

SÜMEYRA ELMACI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
PROF. DR. VATAN KARAKAYA

İSTANBUL, 2015

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

m. DERECEDEN GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK MATRİSİNİN BAZI DİZİ UZAYLARINDA SPEKTRUMU

Sümeyra ELMACI tarafından hazırlanan tez çalışması 13.08.2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. İrfan ŞİAP

Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Doç. Dr. Necip ŞİMŞEK

İstanbul Ticaret Üniversitesi _____

Bu çalışma, TÜBİTAK BİDEB 2210-A Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Çalışmalarım süresince bana her türlü desteği veren, yakın ilgi ve hoşgörüsü ile bilgi ve tecrübelerini paylaşan saygıdeğer hocam Prof. Dr. Vatan KARAKAYA'ya en içten duygularımla teşekkür ederim.

Tez çalışmam boyunca her türlü sorumu yanıtlayan, beni motive eden, ilgi ve yardımını esirgemeyen değerli arkadaşım Arş. Gör. Ezgi Erdoğan'a teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca maddi ve manevi her türlü destekleriyle yanımda olan kıymetli anneme, babama ve kardeşime teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Tez hazırlık sürecinde şefkat ve ilgisiyle yanımda olan sevgili eşim Arş. Gör. Abdulkadir Çağlak'a teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimim süresince maddi destek sağlayan Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'na teşekkür ederim.

Ağustos, 2015

Sümeyra ELMACI

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ vii

ÇİZELGE LİSTESİ viii

ÖZET ix

ABSTRACT xi

BÖLÜM 1

GİRİŞ 1

1.1 Literatür Özeti 9
1.2 Tezin Amacı 11
1.3 Hipotez 11

BÖLÜM 2

TEMEL TANIM VE TEOREMLER 12

2.1 Metrik Uzaylar 12
2.2 Normlu Uzaylar ve Lineer Dönüşümler 13
2.3 Dizi Uzayları ve Matris Dönüşümleri 18
2.4 Bir Lineer Dönüşümün Spektrumu 21
2.4.1 Sonlu Boyutlu Uzaylarda Spektrum Kavramı 21
2.4.2 Sonsuz Boyutlu Uzaylarda Spektral Analiz 22

BÖLÜM 3

$B^m(r,s)$ DÖNÜŞÜMÜNÜN c_0, c ve ℓ_∞ UZAYLARINDAKİ SPEKTRAL ANALİZİ 27

3.1 m. Dereceden Genelleştirilmiş Fark Matrisi 27
3.2 $B^m(r,s)$ Dönüşümünün c_0 Uzayı Üzerindeki Spektrumu 28
3.3 $B^m(r,s)$ Dönüşümünün c ve ℓ_∞ Uzayı Üzerindeki Spektrumu 37

BÖLÜM 4

$B^m(r,s)$ DÖNÜŞÜMÜNÜN ℓ_1 UZAYINDAKİ SPEKTRUMU 41

BÖLÜM 5

$G(u,v,B^m)$ DÖNÜŞÜMÜNÜN c_0, c ve ℓ_1 UZAYLARINDAKİ SPEKTRUMU 49

5.1 m. Dereceden Genelleştirilmiş Ağırlıklı Fark Matrisi 49
5.2 $G(u,v;B^m)$ Dönüşümünün c_0 ve c Uzayı Üzerinde Spektrumu 50
5.3 $G(u,v;B^m)$ Dönüşümünün ℓ_1 Uzayı Üzerinde Spektrumu 60

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER 68

KAYNAKLAR 69

ÖZGEÇMİŞ 75

SİMGE LİSTESİ

$(Ax)_n$	x dizisinin A matrisi altındaki dönüşüm dizisi
A^t	A matrisinin transpozu
$B(X,Y)$	X uzayından Y uzayı içine tanımlı sınırlı lineer dönüşümlerin uzayı
c	Yakınsak dizilerin uzayı
c_0	Sıfıra yakınsak dizilerin uzayı
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\wp(T)$	T dönüşümünün tanım kümesi
$\mathbb{F}$	$\mathbb{C}$ veya $\mathbb{R}$ cismi
I	Birim (özdeşlik) dönüşümü
$Ker(T)$	T dönüşümünün sıfır uzayı
$L(X,Y)$	X uzayından Y uzayı içine tanımlı lineer dönüşümlerin uzayı
ℓ_1	Mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin uzayı
ℓ_p	p. kuvvetten mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin uzayı
ℓ_∞	Sınırlı dizilerin uzayı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\Re(T)$	T dönüşümünün görüntü kümesi
$\overline{\Re(T)}$	T dönüşümünün görüntü kümesinin kapanışı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
T^{-1}	T dönüşümünün tersi
T^*	T dönüşümünün adjointi
T_λ	T dönüşümünün λ özdeğerine karşılık gelen dönüşümü
X^*	X uzayının duali
w	Kompleks veya reel terimli bütün dizilerin uzayı
$\rho(T)$	T dönüşümünün regüler değerlerinin kümesi
$\sigma(T,X)$	T dönüşümünün X uzayındaki spektrumu
$\sigma_p(T,X)$	T dönüşümünün X uzayındaki nokta spektrumu
$\sigma_c(T,X)$	T dönüşümünün X uzayındaki sürekli spektrumu
$\sigma_r(T,X)$	T dönüşümünün X uzayındaki rezidü (artık) spektrumu
(X,Y)	X dizi uzayını Y dizi uzayı içine dönüştüren matrislerin sınıfı
$(X,Y;p)$	Toplamları ya da limitleri koruyan matrislerin sınıfı

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 2.1 Rezolvent ve spektrum kümelerinin şartları 24

Çizelge 2.2 Spektrumun alt kümeleri.....25

Çizelge 5.1 $G(u,v;B^m)$ matrisinin $B(c_0)$ olma şartları.....51

Çizelge 5.2 $G(u,v;B^m)$ matrisinin $B(c)$ olma şartları.....59

Çizelge 5.3 $G(u,v;B^m)$ matrisinin $B(\ell_1)$ olma şartları.....60

ÖZET

m. DERECEDEN GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK MATRİSİNİN BAZI DİZİ UZAYLARINDA SPEKTRUMU

Sümeyra ELMACI

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

Fonksiyonel analiz ve operatör teorisinin en önemli konularından biri olan spektral teori, fiziğin, mekaniğin ve matematiksel fiziğin pek çok probleminin çözümüyle yakından ilgilidir. Bu problemlerin uygulaması açısından fark operatörlerinin spektral analizi önem taşımaktadır.

m. mertebeden genelleştirilmiş fark operatörünün bazı dizi uzaylarında spektrumunun incelendiği bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, spektrum kavramının tarihsel süreci ve dizi uzaylarında spektrum ile ilgili çalışmaların literatür taraması verilmiş, bu teze esas olan araştırmanın amacı belirtilmiş ve elde edilen bulgular kısaca açıklanmıştır.

İkinci bölümde, lineer dönüşümler, matris dönüşümleri ve dizi uzaylarında spektrum kavramı ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, m. dereceden genelleştirilmiş fark matrisinin c_0, c ve ℓ_∞ dizi uzaylarındaki spektral analizi yapılmıştır.

Dördüncü bölümde, aynı matrisin ℓ_1 dizi uzayındaki spektrumu incelenmiştir.

Beşinci bölümde, bu matris ile ağırlıklı ortalama matrisinin çarpımından elde edilen matrisin c_0, c ve ℓ_1 dizi uzaylarındaki spektral değerleri araştırılmıştır.

Altıncı bölümde elde edilen sonuçlar özetlenmiş ve sonrası için yapılabilecek çalışmalara değinilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bir lineer dönüşümün spektrumu, dizi uzayı, matris dönüşümü, fark matrisi, ağırlıklı ortalama matrisi.

ABSTRACT

ON THE SPECTRUM OF GENERALİZED DİFFERENCE MATRİX OF ORDER m OVER SOME SEQUENCE SPACES

Sümeyra ELMACI

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Adviser: Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

Spectral theory, one of the most important subjects of functional analysis and operator theory, is closely related to solution of many problems of physics, mechanics and mathematical physics. Spectral analysis of difference matrices is important in terms of applications of these problems.

This study in which spectrum of generalized difference matrix of order m in some sequence spaces is examined consists of six chapters.

In the first chapter, the historical process of the concept of spectrum and the literature review of studies related to the spectrum in sequence spaces were given, the purpose of research that is principal to this thesis was stated, and the obtained findings were briefly expressed.

In the second chapter, the main definitions and theorems concerned with linear operators, matrix transformations, and the spectrum in sequence spaces were given.

In the third chapter, the spectral analysis of generalized difference matrix of order m in the sequence spaces c_0, c and ℓ_∞ was made.

In the fourth chapter, the spectrum of the same matrix in the sequence space ℓ_1 was examined.

In the fifth chapter, the spectral values of the matrix which is obtained from the multiplication of generalized difference matrix of order m with weighted mean matrix were researched.

In the sixth chapter, the obtained results were summarized and the studies for later were mentioned.

Key Words: Spectrum of a linear operator, sequence space, matrix transformation, difference matrix, weighted mean matrix.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Belirli şartlara sahip ters dönüşümleri, bu ters dönüşümlerin genel özelliklerini ve esas dönüşümle olan ilişkilerini inceleyen spektral teori, lineer cebirsel denklem sistemleri, diferansiyel denklemler ve integral denklemler çözme problemlerinde fonksiyonel analiz ve uygulamalarının temel konularından biri olarak karşımıza çıkar [1].

Spektral teori, farklı bilim dallarında da geniş bir etki alanına sahip olmasından dolayı matematiğin önemli bir dalını oluşturur. Örneğin; kuantum mekaniğinde Hamilton dönüşümü, bir Hilbert uzayı üzerinde sınırsız bir self-adjoint dönüşümdür. Hamilton dönüşümünün nokta spektrumu, sistemin sınır durumundaki enerji seviyesine karşılık gelir. Diğer spektrum çeşitleri, sistemin dağılım teorisinde önemli rol oynar [2]. Nümerik analizde, spektral değerler bir diferansiyel denklemin bir ayrışımının doğru cevabı elde edip edemeyeceğini veya bir eşlenik gradyan iterasyonunun ne kadar hızla yaklaşacağını belirleyebilir. Havacılıkta, spektral değerlerle bir kanat üzerinde akımın laminar ya da türbülanslı olup olmadığı hesaplanabilir. Yapısal mekanikte, bir otomobilin çok gürültülü olup olmadığını ya da bir binanın depreme dayanıklılığını tespit edebilir. Spektral değerler ekolojide, bir besin ağının bir sabit dengeye uyum sağlayıp sağlamayacağını belirlemaye yardımcı olurken olasılık teorisinde, bir Markov sürecinin yakınsaklık oranını belirleyebilir [3].

Modern spektral teoremin esas çıkışı, bazı lineer dönüşümlerin sonsuz boyutlu uzaylar üzerinde bir köşegen formda gösterilmesidir. Spektrumun geçmişte derin kökleri bulunmasına rağmen, matematiksel teorisi 20. yüzyıl olgusudur. Spektrumun günümüze bakan yönlerini anlamak ve geçmişle olan bağlantısını kurmak için tarihsel gelişimiyle başlayabilirz:

Temel Eksen Teoremi: 20. Yüzyıla baktığımızda günümüz spektral teoreminin öncüsü sayılabilecek tek teorem analitik geometrinin Temel Eksen Teoremidir. Bu teoremin içeriği esasında, cebirsel olarak normal forma indirgemenin temel eksen üzerinde geometrik rotasyona karşılık geldiğini söyler. Temel Eksen Teoremi'nin genel formu, $\mathbb{R}^n$ üzerinde herhangi simetrik kuadratik $\langle Ax, x\rangle = \sum \alpha_{ij} x_i x_j$ formun, bir $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ortogonal dönüşümü yardımıyla $\sum \lambda_i x_i^2$ normal formunda yeniden yazılabileceğini ileri sürer. Bu genel forma 19. Yüzyılın ikinci yarısında James Joseph Sylvester ve Arthur Cayley tarafından n boyutlu uzayların cebirsel yapısını vermek için matris notasyonunu kullanmalarıyla ulaşılmıştır. Sylvester, $\langle Ax, x\rangle$ in normal formundaki λ_i katsayılarının $\det(\lambda I - A) = 0$ karakteristik polinomunun kökleri olduğunu göstermiştir [4]. Cayley, A matrisini normal forma indirgemenin A matrisi üzerinde bir köşegenleştirme işlemine karşılık geldiği matris analizine başlamıştır. Temel Eksen Teoremi, matrislerde herbir simetrik $(\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \text{ ise } A \text{ simetriktir})$ reel A matrisinin ortogonal olarak bir köşegen D matrisine denk olduğunu başka bir deyişle bazı ortogonal T matrisleri için $D = T^{-1}AT$ matrisinin köşegen formda olduğunu söyler. D nin köşegen elemanları A nın özdeğerleridir. Yani $\det(\lambda I - A) = 0$ polinomunun kökleridir.

Sonsuz Lineer Denklem Sistemleri: Spektral teorinin çıkışında ikinci adım, sonlu boyuttan sonsuz boyuta geçişin geliştirilmesidir. Bu geçiş, önce cebirde lineer denklem sistemlerinin çözümünde ve ardından geometride olmuştur. 18. ve 19. yüzyılda, sonlu lineer denklem sistemleri çoğunlukla yok etme metoduyla çözülmüştür. Sonsuz denklem sistemlerinde ise diferansiyel denklemlere düzgün çözümler bulmak için bilinmeyen katsayılar metodu kullanılmıştır.

Joseph Fourier, 1822'de her fonksiyonun trigonometrik terimlerin bir sonsuz lineer kombinasyonu olarak ifade edilebileceğini gösterme girişimiyle sonsuz denklem sistemleri üzerinde ilk önemli çalışmayı başlatmıştır [5]. Bu lineer kombinasyonlardaki bilinmeyen katsayıları çözme problemi, Fourier'e bir sonsuz lineer denklem sistemini çözmek için yol göstermiştir. Fourier, bu çözüme $n \times n$ lineer denklem sisteminin çözümü için uygulanan yöntemi $n \to \infty$ alarak yaklaşmıştır.

İntegral Denklemler: Sonsuz matris ve determinant teorisi integral denklemlere uygulanarak sayılabilir sonsuzdan sayılamaz sonsuza genişletilmiş ve sonrasında ilk spektral teori elde edilmiştir. Koch tarafından geliştirilen sonsuz matris ve determinant teorisinin, İsveçli matematikçi Ivar Fredholm'un integral denklemlere uygulmasıyla spektral teori ve integral denklemler bağlantılı hale gelmiştir. Fredholm, 1900'de Koch'un sonsuz determinant yöntemini kullanarak kendi adıyla bilinen

$$\phi(x)+\int_0^1 K(x,y)\phi(y)dy=\psi(x), \quad (0\le x\le 1) \tag{1.1}$$

integral denkleminde ϕ nin çözümüyle ilgili teorem geliştirmiştir [6]. Fredholm, bu integral denklemini

$$\phi(x_i)+\lambda\sum_{j=1}^{n} K(x_i,y_j)\phi(y_j)=\psi(x_i), \ \ (1\le i\le n) \tag{1.2}$$

lineer sisteminin limit durumu olarak düşünmüştür.

David Hilbert: Hilbert, 1904-1910 yılları arasında yaptığı çalışmalarda spektral teorinin temel tanım ve teoremlerini ve Hilbert uzay teorisini ana hatlarıyla oluşturmuştur. Hilbert, öncelikle

$$\phi(x)-\lambda\int_0^1 K(x,y)\phi(y)dy=\psi(x) \tag{1.3}$$

integral denklemi ile birlikte sonlu ya da sonsuz denklemlere benzeyen

$$\phi(x_i)-\lambda\sum_{j} K(x_i,y_j)\phi(y_j)=\psi(x_i) \tag{1.4}$$

matris denklemi ile çalışmıştır. Bu denklemleri çözmek için gerekli mekanizmayı oluşturma sürecinde, Hilbert kuadratik formdaki K nın spektrumunu tanımlamış, nokta spektrumu sürekli spektrumdan ayırmış ve spektrumun tarihsel gelişimine bakan yönüyle en önemlisi de sadece tam sürekli formlar için değil aynı zamanda sınırlı formlar için de spektral teoremi formülleştirmiş ve ispatlamıştır. Hilbert integral denklemlerin çözümüyle ilgilendiğinden, elde ettiği sonuçları matrislere veya

dönüşümlere uygulamamıştır. Ayrıca, (1.3) eşitliğindeki λ parametresinden dolayı, Hilbert'in özdeğerler ve spektral noktalarının tamamı günümüzde kullanılanların tersidir.

Hilbert'in doktora öğrencisi Erhard Schmidt, Öklid geometrisi ile Hilbert'in çalışmasını genelleştirmiş ve basitleştirmiş, 2. dereceden toplanabilir dizilerin uzayı olan ℓ_2 Hilbert uzayı teorisini normlar, lineerlik, altuzaylar ve ortogonal projeksiyonlar tanımlarıyla birlikte vermiştir [7],[8]. Ernst Hellinger kuadratik form teorisini yeniden formüle etmiş [9] ve Hermann Weyl, sınırlı formlar ve onların spektrumları ile ilgili geniş bir çalışma yayınlamıştır [10]. Sonuç olarak, Hilbert ve öğrencileri 20. yüzyılın ilk on yılında ℓ_2 Hilbert uzayı üzerinde sınırlı lineer dönüşümler için spektral teorinin önemli bölümünü oluşturmuşlardır.

Hilbert-Schmidt Spektral Teorisi: Hilbert'in sonlu boyutlu uzaylar için Temel Eksen Teoremi'ni genişletmede ilk adımı, özdeğer kavramını sonsuz simetrik formdaki K durumuna genelleştirmek olmuştur. Hilbert artık $\lambda I - K$ dönüşümünün terslenmesine engel olan λ değerlerinden oluşan, $\sigma(K)$ ile gösterilen K'nın spektrumu kavramı üzerinde durmaya başlamıştır. Sonlu boyutta özdeğerler kümesiyle aynı olan nokta spektrum, $\sigma(K)$ kümesi içinde onun tümleyeni olan sürekli spektrum kavramlarını tanımlamış, bir K dönüşümü ve spektrumu arasındaki bağlantılarla ilgili çalışmalar yapmıştır [11]. Hilbert'in bulduğu bu ilişkilerden biri, K sınırlı bir lineer dönüşüm olduğunda K nın spektrumunun da sınırlı bir küme olmasıdır. Aslında bugün spektral yarıçap teoremi olarak bilinen bu durum, K simetrik $\left(K = K^T\right)$ olduğunda K nın ℓ_2 normunun $\left\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(K)\right\}$ kümesinin en küçük üst sınırıyla aynı olmasıdır. Hilbert'e göre ℓ_2 uzayı üzerindeki sınırlı lineer dönüşümler güçlü yakınsaklığı korumaları bakımından önemlidirler.

Hilbert, sürekli spektrumun katkısını açıklamak için Stieltjes tipi $\int_{s(K)} \lambda dE_\lambda$ integralini kullanmıştır. Bu durumda ℓ_2 üzerinde her simetrik, sınırlı lineer dönüşümün

$$\sum_{\rho(K)} \lambda P_\lambda + \int_{s(K)} \lambda dE_\lambda \qquad (1.5)$$

köşegen formda gösterilebileceğini ifade etmiştir. Burada P_λ özdeğerlerle üretilen uzay üzerindeki projeksiyonlardır. Ayrıca $E_{\lambda_i} = \sum_{j=1}^{i} P_{\lambda_j}$ olmak üzere toplam nokta spektrum, integral sürekli spektrum üzerindendir.

Hilbert, sürekli spektrumları boş küme olan tam sürekli dönüşümleri tanımlayarak spektral teori çalışmalarını tamamlamıştır. Schmidt, bu dönüşümleri zayıf yakınsak dizileri güçlü yakınsak dizilere taşıma özelliğiyle karakterize etmiştir. Tam sürekli dönüşümlerin spektrumları sadece sıfır özdeğerlerinden oluştuğundan sonlu boyutlu dönüşümlere en çok benzeyen sonsuz boyutlu lineer dönüşümlerdir.

Lebesgue İntegral: Hilbert'in ℓ_2 dizi uzayı üzerinde spektral teoriyi oluşturduğu sıralarda Henri Lebesgue, bugün kendi adıyla anılan yeni bir integral geliştirmiştir [12], [13]. Daha sonra Friedrich Riesz ve Ernst Fischer, ℓ_2 Hilbert uzayının L_2 (kareleri Lebesgue integrallenebilen fonksiyonlar) uzayına izomorfik olduğunu göstermişlerdir ve ardından Riesz, Hilbert ve Schmidt tarafından ℓ_2 uzayı için geliştirilen spektral teoriye benzer bir teoriyi L_2 uzayı için elde etmiştir [14].

Kuantum Mekaniği: 1925-1926 yıllarında Werner Heisenberg ve Erwin Schrödinger tarafından oluşturulan kuantum mekaniği, spektral teorinin tarihsel gelişimi açısından önemli bir adımdır. Heisenberg teorisi, bazı atomik gözlemlerin aynı zamanda matematiksel yorumlarının yapılamayacağını yani bu gözlemleri temsil eden işlemlerin değişmeli olmayacağı fiziksel gerçeğini ifade eder. Matrislerin cebirleri değişmeli olmadığından Heisenberg, Max Born ve Pascual Jordan ile birlikte her fiziksel niceliği dönüşüm olarak adlandırılan bir uygun sonlu ya da sonsuz matrisle temsil etmişlerdir ve fiziksel niceliğin olası değerlerinin kümesini dönüşümün spektrumu olarak adlandırmışlardır [15], [16]. Böylece bir atomun enerjisini temsil eden dönüşümün spektrumu, atomun spektrumu olmuştur.

Schrödinger, kendi kısmi türevli dalga denklemine dayalı alışılmışın dışında bir teori geliştirmiştir. Schrödinger dalga mekaniği, Heisenberg ise matris mekaniği kullanarak

aynı sonucu elde etmişlerdir. Schrödinger, aslında dalga denklemindeki diferansiyel operatörün özdeğerlerinin (genel olarak spektrumunun) buna karşılık gelen Heisenberg matrisini belirlediğini göstererek bu iki yaklaşımı birleştirmiştir.

Hilbert, kuadratik formlarının atomik spektra olarak yorumlanabilir hale gelmesine şaşırmıştır. Ancak daha sonra, Hilbert'in spektral teorisinin yeni mekanikler için uygun matematiksel baz olduğu ortaya çıkmıştır. Sonlu ve sonsuz matrisler bir Hilbert uzayı (ℓ_2 veya L_2) üzerinde dönüşümler olarak yorumlanmış ve fiziksel nicelikler bu dönüşümler tarafından temsil edilmişlerdir.

Schmidt ve diğerleri, Hilbert'in spektral teoremini, 1855'te Fransız matematikçi Charles Hermite tarafından tanıtılan ve reel özdeğerlere sahip olduğu ispatlanan $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$ formundaki Hermit matrislerine genişletmişlerdir. Yeni mekaniklerde bir fiziksel niceliği temsil eden Hermit dönüşümlerdir. Fiziksel nicelikler reel sayılarla ölçüldüğünden, onları reel sayılar gibi davranan Hermit dönüşümlerle temsil etmek doğal bir sonuçtur. Matematiksel fiziğin dönüşümlerinin Hermit olmasının başka bir makul nedeni de klasik mekaniğin temel kurallarından olan enerjinin korunması gibi fiziğin bazı temel kural ve kabullerinin bu hipotezle sağlanmasıdır.

Kuantum mekaniğinin birçok dönüşümü Hermit olmasına rağmen Hilbert'in sınırlı olma hipotezini sağlamıyordu. Türev dönüşümünde olduğu gibi sınırsız ve sadece L_2'nin yoğun bir alt kümesinde tanımlıydılar.

John von Neumann: Hilbert'ten sonra, spektral teori alanında en büyük buluş 1927-1929 yıllarında John von Neumann, Hilbert uzayı üzerinde bir lineer operatörün soyut kavramını tanıttığında gerçekleşmiştir. Neumann, bir Hilbert uzayı üzerindeki operatörlere dayanarak kuantum mekaniğinin dönüşüm teorisini açıklamış ve Hermit operatörleri spektral teorisini sınırlı durumdan sınırsız duruma genişletmiştir [17], [18].

Neumann'ın spektral teoremi sınırsız, kendine eş, yoğun ama her yerde tanımlı olmayan simetrik dönüşümleri kapsarken, Hilbert'in orijinal teorisi sınırlı, kendine eş ve her yerde tanımlı simetrik dönüşümlere uygulanmıştır.

Von Neumann-Stone Spektral Theory: Hilbert'in genel spektral teoremi, her sınırlı, simetrik T lineer dönüşümünün

$$\sum_{\rho(T)} \lambda P_\lambda + \int_{s(T)} \lambda dE_\lambda \qquad (1.6)$$

şeklinde yazılabileceğini söyler. Bu formdaki ilk toplamın bir Stieltjes tipi integral olarak yeniden yazarak ve bu integrali ikinci integralle birleştirerek, Hilbert'in spektral teoremini tüm sınırlı spektrum üzerinden

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda dE_\lambda \qquad (1.7)$$

kısa formunda ifade edebiliriz. Burada E_λ operatörleri

(i) Eğer $\lambda < \mu$ ise E_μ nün görüntü kümesi E_λ nın görüntü kümesini kapsar.

(ii) Eğer $\varepsilon > 0$ ise $\varepsilon \to 0$ iken $E_{\lambda+\varepsilon} \to E_\lambda$

(iii) $\lambda \to -\infty$ iken $E_\lambda \to 0$

(iv) $\lambda \to +\infty$ iken $E_\lambda \to I$

özelliklerini sağlayan projeksiyonlardır.

Kendine eş operatörler için sınırlı durumdan sınırsız duruma spektral teoremin von Neumann-Stone genişlemesi, (1.7) eşitliğindeki $\sigma(T)$ sınırlı spektrumunun sınırsıza genişlemesine karşılık gelir. Özel olarak, von Neumann-Stone spektral teorisi, herbir kendine eş T operatörüne $\{E_\lambda\}$ biriminin tek bir ayrışımının karşılık geldiğini söyler. Bu güçlü bir teorem olmasına rağmen diferansiyel operatörler genellikle kendine eş olmadığından çoğu için geçerli değildir. Neumann, bu teoremini simetrik operatörlere uygulamak için kendine eş genişlemesi olan yarı sınırlı operatörleri tanımlamıştır. Stone [19] ve Kurt O. Friedrichs [20] e göre bu sonucun en iyi ifadesi her yarı sınırlı simetrik operatörün aynı sınırla bir yarı sınırlı kendine eş operatöre genişletilebilir olmasıdır.

Von Neumann-Stone ve Hilbert spektral teorisi, reel spekrumlu operatörler üzerinde durmasına rağmen spektral teorem en azından iki durumda daha genel spektrumlu operatörlere uygulanır. En basit durumu Hilbert uzayı üzerinde iç çarpımı değişmez bırakan izometrik operatörlerle ilgilidir. Bir izometrik operatörün spektrumu birim

çemberin bir alt kümesidir. Toeplitz, tam sürekli normal kuadratik bir formun bütünüyle bir köşegen forma denk olduğunu göstererek Hilbert'in spektral teoremini bu forma genişletmiştir. Daha genel olarak, (1.7) spektral ayrışımı sınırlı normal operatörlere genişler. Burada integral, $\|T\|$ yarıçaplı diskin kapsadığı kompleks düzlemin bir altkümesi olan T nin spektrumu üzerindendir. Von Neumann [21] ve Stone [19], aynı zamanda normal operatörlerin tanımını ve spektral teorisini sınırsız duruma genişletmişlerdir. Neumann, Hilbert uzaylarının bir direkt integralini tanımlayarak geometrik spektral teoremi yeniden ortaya çıkarmıştır [22].

Gelfand-Naimark Teoremi: Bir Hilbert uzayı üzerindeki tüm operatörlerin ailesi bir halka oluşturur. Bu halkalar çeşitli topolojilerle Neumann ve Francis J. Murray tarafından 1936-1940 yıllarında kapsamlı bir şekilde incelenmiştir [23], [24], [25]. Daha sonra 1941-1943 yıllarında Israel M. Gelfand, Mark A. Naimark ve Georgii E. Silov sadece operatörleri içeren değil aynı zamanda Fourier dönüşümleri ve harmonik analiz çalışması için güzel bir genel ortam sağlayan normlu halkaların bir teorisini oluşturmuşlardır [26], [27], [28]. Charles E. Rickart, halkanın cebirsel anlamıyla karışmaması için Gelfand normlu halkalara Banach cebiri ismini vermiştir. Bir Banach cebirinin özellikleri, kompleks bir C cismi üzerinde tanımlı ve $\|x\|\cdot\|y\| \le \|xy\|$ çarpımsal üçgen eşitsizliğini sağlayan tam normlu cebirin özellikleriyle aynıdır. Herbir Banach cebiri $\|e\| = 1$ olacak şekilde bir birim eleman içerir. Bir kompakt, topolojik X uzayı üzerindeki tüm sürekli kompleks değerli fonksiyonların kümesi gibi bir Hilbert uzayı üzerindeki tüm sınırlı lineer operatörlerin kümesi de bir Banach cebiridir. Banach cebirinin spektral teoriyle ilgisi bu iki örnek arasındaki ilişkidir.

Gelfand, B bir Banach cebiri olmak üzere $x \in B$ için bir Hilbert uzayı üzerindeki operatörlerin spektral teorisiyle tam benzerlik içinde olan yeni bir spektrum tanımlamıştır. Gelfand'ın Banach cebirleri teorisi, spektral teoremin bazı temel durumlarda fonksiyonlar teorisindeki en basit bir gerçeğe karşılık geldiğini göstermiştir ve şimdiye kadar anlatılanlardan daha güçlü bir spektral teoremi verir.

Tarihsel sürecini kısaca vermeye çalıştığımız spektral teori hakkında daha geniş bilgi almak için N. Dunford ve J. T. Schwartz'ın [29], [30], [31] eserlerine bakılabilir.

1.1 Literatür Özeti

Fonksiyonel analizde geniş yer tutan dizi uzaylarında sınırlı lineer dönüşümlerin spektrumu ile ilgili çalışmalar 1965 yılında Brown, Halmos ve Shields tarafından birinci mertebeden Cesáro dönüşümünün, ℓ_2 Hilbert uzayı üzerindeki karakteristik değerlerinin ve spektrumunun belirlenmesiyle başlamıştır [32]. 1972 yılında Leibowitz, aynı dönüşümün ℓ_p uzayındaki spektrumunu incelemiştir [33]. Daha sonra Wenger [34] çalışmasında c Banah uzayında, p pozitif tam sayı olmak üzere p. mertebeden Cesáro dönüşümünün ince spektrumunu belirlemiş, Rhoades [35] te bu çalışmanın sonucunu ağırlıklı ortalama metodlarına genelleştirmiş ve ℓ_p deki ince spektrum için tahminde bulunmuştur. 1985'te Gonzalez, Cesáro dönüşümünün ℓ_p dizi uzayındaki ince spektrumunu incelemiştir [36]. Cesáro dönüşümünün spektrumuyla ilgili çalışmalar, c_0, bv_0, bv uzaylarında Reade [37] ve Okutoyi [38], [39] araştırmalarıyla devam etmiştir. 1997 yılında Coşkun p-Cesaro dönüşümlerinin c_0 dizi uzayında spektrum ve ince spektrumunu incelemiştir [40]. Akhmedov ve Başar [41] ve [42]' te Cesaro dönüşümünün c_0 ve bv_p uzaylarında ince spektrumunu vermişlerdir.

Ağırlıklı ortalama dönüşümünün spektrumu ilk olarak 1977 yılında Cass ve Rhoades [43] tarafından c dizi uzayında çalışıldıktan sonra ℓ_p uzayındaki spektrumu Cartlidge [44] tarafından doktora çalışmasında incelenmiştir. Daha sonra Rhoades bu dönüşümün spektrumunu c_0 ve bv_0 uzaylarında çalışmıştır [45], [46].

Rhaly matrislerinin spektrum incelemesi Yıldırım tarafından yapılmıştır [47], [48], [49]. 2009 yılında Altun ve Karakaya, Lacunary matrisinin spektrumunu elde etmişlerdir [50]. Altay ve Karakuş, bir bant matrisi olan Zweier matrisinin ℓ_1 ve bv uzaylarındaki spektrumunu belirlemişlerdir [51]. Üst üçgensel ikili bant matrislerinin spektral analizini Karakaya ve Altun [52] c_0 ve c dizi uzaylarında, Karaisa [53] ℓ_p uzayında, Tripathy and Das [54], yakınsak serilerin uzayı olan cs uzayı üzerinde gerçekleştirmişlerdir. Bant matrislerinin spektrumu ile ilgili bir diğer araştırma, Karakaya ve diğerlerinin simetrik üçlü bant matrisi ile tanımlı olan $U(s,r,s)$ dönüşümünün spektrumunu inceledikleri çalışmadır [55].

Literatürde geniş yer tutan fark matrislerinin spektrumuyla ilgili ilk çalışma Malafosse tarafından yapılmıştır. Malafosse, Δ fark dönüşümünün spektrumunu

$$\|x\|_{s_r} = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|x^k|}{r^k}, (r>0)$$

normlu dizilerin uzayında incelemiştir [56]. Daha sonra fark matrisinin spektrumunu Altay ve Başar [57], c_0 ve c dizi uzayları üzerinde, Akhmedov ve Başar [58], [59] ℓ_p ve bv_p uzayları üzerinde elde etmişlerdir. Dutta ve Baliarsingh, ikinci ve r. mertebeden fark matrisinin spektrumunu bazı dizi uzaylarında çalışmışlardır [60], [61], [62].

Genelleştirilmiş fark matrisi $B(r,s)$ nin spektrumu ile ilgili araştırmalar, 2005 yılında Altay ve Başar'ın c_0 ve c dizi uzayı üzerindeki [63] çalışmasıyla başlamıştır. Daha sonra bu dönüşümün spektrumunu Furkan vd. [64] ℓ_1 ve bv uzaylarında, Bilgiç ve Furkan [65], ℓ_p ve bv_p uzaylarında incelemişlerdir. Başar vd. genelleştirilmiş fark matrisinin spektrumunun bazı dizi uzaylarında alt sınıflarını elde etmişlerdir [66]. Alt üçgensel üçlü bant matrisiyle temsil edilen $B(r,s,t)$ dönüşümünün spektrumu Furkan vd. tarafından çeşitli dizi uzaylarında çalışılmıştır [67], [68], [69]. Karaisa ve Başar, üst üçgensel üçlü bant matrisi $A(r,s,t)$ nin spektrumunu ℓ_p uzayında incelemişlerdir [70].

Akhmedov ve El-Shabrawy, bazı şartlara sahip yakınsak $a=(a_n)$ ve $b=(b_k)$ dizileri ile tanımlanan ikili bant matrisi $\Delta_{a,b}$ genelleştirilmiş fark matrisinin c dizi uzayı üzerinde spektrumunu incelemiş ve elde ettikleri sonuçların diğer fark matrislerine de uygulanabileceğini ifade etmişlerdir [71]. El-Shabrawy, daha sonra bu dönüşümün ℓ_p ve c_0 dizi uzaylarında spektral analizini yapmıştır [72], [73].

Erdoğan ve Karakaya, fark matrisi ile genelleştirilmiş ağırlıklı ortalama matrisinin çarpımından elde edilen $W=(w_{nk})$ matrisinin c_0 ve c dizi uzayları üzerinde sınırlı bir lineer dönüşüme karşılık gelmesi için gerekli şartları belirleyerek spektrumunu elde etmişlerdir [74].

1.2 Tezin Amacı

Dizi uzaylarında sınırlı lineer dönüşümlerin spektral analizi ile ilgili yapılan çalışmalar incelenerek fark matrislerinin genellemesi olan $m.$ dereceden genelleştirilmiş fark matrisi $\left(B^m(r,s)\right)$ nin spektrumu ve bu matris ile ağırlıklı ortalama matrisinin çarpımından elde edilen $G\left(u,v;B^m\right)$ matrisinin ince spektrumunun bazı dizi uzaylarında belirlenmesi amaçlanmıştır.

1.3 Hipotez

m pozitif tam sayı olmak üzere $m.$ mertebeden genelleştirilmiş fark matrisi $\left(B^m(r,s)\right)$ nin c_0, c, ℓ_∞ ve ℓ_1 Banach uzaylarında sınırlı bir lineer dönüşüme karşılık geldiği gösterilmiştir. $B^m(r,s)-\lambda I$ dönüşümünün belirtilen dizi uzaylarında birebir ve örten olmasını engelleyen λ değerleri bulunarak spektrumu belirlenmiş ve bu kümenin alt sınıfları olan nokta spektrumu, rezidü spektrumu ve sürekli spektrumu elde edilmiştir. Ayrıca $m.$ mertebeden genelleştirilmiş fark matrisi ile ağırlıklı ortalama matrisinin çarpımından elde edilen $G\left(u,v;B^m\right)$ matrisinin c_0, c, ℓ_∞ dizi uzaylarında sınırlı bir lineer dönüşüme karşılık gelmesi için $\left(u_n\right)$ ve $\left(v_k\right)$ dizilerinin sahip olması gereken şartlar incelenerek bu durumlarda dönüşümün sınırlı bir tersinin olmasını engelleyen λ değerleri bulunmuştur.

BÖLÜM 2

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde tezin sonraki kısımları için esas kabul edilen bazı tanım ve teoremler verilmiştir.

2.1 Metrik Uzaylar

Tanım 2.1 (Metrik uzay) Boştan farklı bir X kümesi ve bir

$$d : X \times X \to \mathbb{R}_+, (x, y) \to d(x, y)$$

fonksiyonu verilsin. Eğer bu d fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için

(M1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$ (Simetri)

(M3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Üçgen Eşitsizliği)

şartlarını sağlarsa d fonksiyonuna metrik, X kümesine üzerindeki bu metrik ile birlikte metrik uzay adı verilir ve (X, d) ile gösterilir [75].

Tanım 2.2 (Cauchy dizisi) (X, d) bir metrik uzay ve (x_n), X'te bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n > n_\varepsilon$ olduğunda $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde ε'a bağlı bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (x_n) dizisine X uzayında bir Cauchy dizisi adı verilir [75].

Tanım 2.3 (Tam metrik uzay) Bir (X,d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi X uzayında bir limite sahipse, bu (X,d) metrik uzayına tam metrik uzay adı verilir [75].

Tanım 2.4 (İzometri ve izometrik uzay) (X,d) ve (Y,ρ) metrik uzayları arasındaki $f: X \to Y$ şeklindeki örten bir fonksiyon her $x_1, x_2 \in X$ için

$$d(x_1, x_2) = \rho\big(f(x_1), f(x_2)\big)$$

bağıntısını sağlıyorsa bir izometri adını alır. Aralarında bir izometrinin varlığı belirlenmiş metrik uzaylar da izometrik uzaylar olarak isimlendirilir [76].

Tanım 2.5 (Kapanış) X , bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. X'in (A'nın elemanı olan ya da olmayan) bir x_0 noktasını ele alalım. Eğer, x_0'ın her komşuluğunda A kümesinin x_0'dan farklı en az bir y noktası varsa, x_0 noktasına A kümesinin bir yığılma noktası ya da limit noktası adı verilir. A'nın noktalarıyla, A'nın yığılma noktalarından oluşan kümeye ise A'nın kapanışı denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir [1].

Tanım 2.6 (Yoğun küme) (X,d) bir metrik uzay ve A, X'in bir alt kümesi olsun. Eğer $\overline{A} = X$ ise A kümesine X'te yoğun denir. Bu da her $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için $d(x,y) < \varepsilon$ olacak şekilde $y \in A$ var demektir [1].

2.2 Normlu Uzaylar ve Lineer Dönüşümler

Tanım 2.7 (Vektör Uzayı) X boştan farklı bir küme ve $\mathbb{F}$ reel veya kompleks sayılar cismi olsun.

$$+ : X \times X \to X, \quad (x,y) \to x+y,$$
$$\cdot : \mathbb{F} \times X \to X, \quad (a,x) \to ax,$$

fonksiyonları ile toplama ve çıkarma işlemlerini tanımlayalım. Her $x, y \in X$ ve $a, b \in \mathbb{F}$ için aşağıdaki koşullar sağlansın:

1. $x + y = y + x$

2. $x + (y + z) = (x + y) + z$

3. Her $x \in X$ için $x + 0 = x$ eşitliğini sağlayan bir tek $0 \in X$ vardır.

4. Her $x \in X$ için $x+(-x)=0$ eşitliğini sağlayan bir tek $-x \in X$ vardır.

5. Her $x \in X$ için $1 \cdot x = x$

6. $a(x+y)=ax+ay$

7. $(a+b)x=ax+by$

8. $(ab)x=a(bx)$

Bu durumda X'e $\mathbb{F}$ üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) ve elemanlarına da vektör veya nokta adı verilir. $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ alınırsa X'e bir reel vektör uzayı ve $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ alınırsa X'e bir kompleks vektör uzayı adı verilir [75].

Tanıım 2.8 (Alt vektör uzayı) X bir vektör uzayı ve Y, X'in bir boş olmayan alt kümesi olsun. Y, X vektör uzayındaki işlemlere göre kendi başına bir vektör uzayı oluşturuyorsa Y'ye X'in bir lineer alt uzayı denir [75].

Teorem 2.1 $\varnothing \neq Y \subset X$ kümesinin X'in bir alt uzayı olması için gerek ve yeter koşul $\forall y_1, y_2 \in Y$ ve $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{F}$ için $a_1 y_1 + a_2 y_2 \in Y$ olmasıdır [75].

Tanım 2.9 (Normlu uzay) X, bir $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+, \quad x \to \|x\|$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall a \in \mathbb{F}$ için

(N1) $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=\theta$

(N2) $\|ax\|=|a|\|x\|$

(N3) $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$ (Üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde norm adını alır ve bu durumda $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine bir normlu vektör uzayı adı verilir [75].

Tanım 2.10 (Banach uzayı) Tam, normlu bir lineer $(X, \|\cdot\|)$ uzayına Banach uzayı denir. Yani $\|x_m - x_n\| \to 0 \ (m,n \to \infty)$ şartını sağlayan X'teki her (x_n) dizisi için $\|x_n - x\| \to 0 \ (n \to \infty)$ olacak şekilde $x \in X$ vardır [77].

Tanım 2.11 (Lineer dönüşüm) X , Y lineer uzaylar olsun. Bir $T: X \to Y$ fonksiyonu bütün $x_1, x_2 \in X$ ve λ, μ skalerleri için

$$T\left(\lambda x_1 + \mu x_2\right) = \lambda T\left(x_1\right) + \mu T\left(x_2\right)$$

koşulunu sağlıyorsa bir lineer dönüşüm adını alır.

Çalışmanın bundan sonraki kısımlarında

$$\wp(T) = \{x \in X : Tx \in Y\}$$
$$\Re(T) = \{y \in Y : y = Tx, x \in X\}$$
$$Çek(T) = \{x \in \wp(T) : Tx = \theta\}$$

şeklinde tanımlanan T dönüşümünün tanım kümesini $\wp(T)$, görüntü kümesini $\Re(T)$ ve çekirdeğini $Çek(T)$ ile göstereceğiz.

Eğer T , X üzerinde $T: X \to \mathbb{F}$ şeklinde bir lineer dönüşüm ise T bir lineer fonksiyoneldir. Yani bir lineer fonksiyonel, skaler değerli lineer bir dönüşümdür.

Tanım 2.12 (Sınırlı lineer dönüşüm) Bir $T: X \to Y$ lineer dönüşümünün sınırlı olması için gerek ve yeter koşul bütün $x \in X$ değerleri için $\|T(x)\| \leq M\|x\|$ olacak şekilde M sabitinin var olmasıdır.

X , Y lineer uzaylar olsun. Bu durumda X uzayından Y uzayına tanımlı tüm lineer dönüşümlerin kümesi $L(X,Y)$, X üzerindeki tüm lineer fonksiyonellerin kümesi $L(X,\mathbb{F})$ ile gösterilir. $X^* = L(X,\mathbb{F})$ uzayı X uzayının cebirsel duali olarak adlandırılır.

X , Y normlu uzaylar olsun. Bu durumda X uzayından Y uzayına tanımlı tüm sınırlı(sürekli) lineer dönüşümlerin kümesi $B(X,Y)$, X üzerindeki tüm sınırlı lineer fonksiyonellerin kümesi $B(X,\mathbb{F})$ ile gösterilir. $X' = B(X,\mathbb{F})$ uzayı X uzayının duali ya da sürekli duali olarak adlandırılır.

X uzayından yine bu uzaya tanımlı tüm lineer dönüşümlerin kümesini $L(X)$, tüm sınırlı lineer dönüşümlerin kümesini $B(X)$ ile göstereceğiz.

$T \in B(X,Y)$ olsun. Bu durumda T dönüşümünün normu

$$\|T\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} < \infty$$

olarak tanımlanır [77].

Teorem 2.2 X ve Y normlu uzaylar olsun.

(i) $B(X,Y)$ lineer uzayı, herbir $T \in B(X,Y)$ için $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| / \|x\| \mid x \neq \theta\}$ normuyla birlikte bir normlu uzaydır.

(ii) Eğer Y bir Banach uzayı ise $B(X,Y)$ de (i) de verilen normla birlikte bir Banach uzayıdır.

Bu teoremin sonucu olarak dual uzay X' ın her zaman Banach uzayı olduğunu söyleyebiliriz [77].

Tanım 2.13 (Ters dönüşüm) Bir T dönüşümü, tanım bölgesindeki farklı noktalara farklı görüntüler karşılık getiriyorsa, yani herhangi $x_1, x_2 \in \wp(T)$ için

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow Tx_1 \neq Tx_2$$

oluyorsa T dönüşümüne birebir dönüşüm denir. Böyle bir durumda, her $y_0 \in \Re(T)$ elemanını, $Tx_0 = y_0$ olacak şekilde $x_0 \in \wp(T)$ üzerine dönüştüren bir

$$T^{-1} : \Re(T) \to \wp(T)$$
$$y_0 \to x_0 \ \ (y_0 = Tx_0)$$

dönüşümü vardır. T^{-1} dönüşümüne T'nin tersi denir [1].

Teorem 2.3 $T^{-1} : \Re(T) \to \wp(T)$ ters dönüşümünün olması için gerek ve yeter koşul

$$Tx = 0 \Rightarrow x = 0$$

olmasıdır [1].

Tanım 2.14 (Eşlenik dönüşüm) X ve Y normlu uzaylar, $T : X \to Y$ bir sınırlı lineer dönüşüm olsun. Bu durumda X' ve Y', X ve Y nin dual uzayları olmak üzere her $x \in X$ için

$$T^*: Y' \to X'$$
$$\left(T^* g\right)(x) = g(Tx) \quad \left(g \in Y'\right)$$

şeklinde tanımlanan T^* dönüşümüne eşlenik dönüşüm denir [1].

Bir lineer dönüşümün eşleniği, dönüşümün tersi ve görüntü kümesi ile ilgili verdiği bilgiler açısından önemlidir.

Tanım 2.15 (Kapalı lineer dönüşüm) X, Y normlu uzaylar ve $T: \wp(T) \subset X \to Y$ bir lineer dönüşüm olsun. Eğer T'nin grafiği

$$G(T) = \left\{(x, y) \middle| \, x \in \wp(T), y = Tx\right\}$$

$X \times Y$ normlu uzayında kapalı ise T dönüşümüne kapalı lineer dönüşüm denir [1].

Teorem 2.4 (Kapalı Grafik Teoremi) X, Y Banach uzayları ve $T: \wp(T) \subset X \to Y$ kapalı bir lineer dönüşüm olsun. Bu durumda $\wp(T)$, X'te kapalı ise T dönüşümü sınırlıdır [1].

Sürekli Lineer Dönüşümlerin Sınıflandırılması

Goldberg, sürekli dönüşümlerin ve eşleniklerinin değişik açılardan önem taşıyan ve farklı uygulamalarda çok yararlı olabilecek bazı ölçütlere bağlı olarak çeşitli özelliklerini ortaya koyan bir sınıflandırma yapmıştır [78]. Buna göre, X ve Y normlu uzayları üzerinde tanımlı $T: X \to Y$ dönüşümünün $\Re(T)$ görüntü kümesi için üç olasılık vardır:

I. $\Re(T) = Y$

II. $\Re(T) \neq Y$ fakat $\overline{\Re(T)} = Y$

III. $\overline{\Re(T)} \neq Y$

T dönüşümünün T^{-1} tersi için de üç olasılık düşünülebilir:

1. T^{-1} vardır ve süreklidir.
2. T^{-1} vardır, fakat sürekli değildir.
3. T^{-1} yoktur.

Teorem 2.5 T dönüşümünün bir yoğun görüntü kümesine sahip olması için gerek ve yeter koşul T^* dönüşümünün birebir olmasıdır [78].

Teorem 2.6 T dönüşümünün bir sınırlı terse sahip olması için gerek ve yeter koşul T^* dönüşümünün örten olmasıdır [78].

2.3 Dizi Uzayları ve Matris Dönüşümleri

Tanım 2.16 (Dizi uzayı) w, tüm dizilerin kümesini göstermek üzere, bu küme

$$\left((x_k),(y_k)\right)\to(x_k+y_k) \text{ ve } \left(\lambda,(x_k)\right)$$

koordinatsal toplama ve skaler çarpma işlemleriyle $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu uzayın her alt uzayına dizi uzayı denir.

Bazı dizi uzayı örnekleri :

$c=\left\{x=(x_k)\in w:\lim_{k\to\infty}(x_k-l)=0,l\in\mathbb{R}\right\}$ Yakınsak dizilerin uzayı

$c_0=\left\{x=(x_k)\in w:\lim_{k\to\infty}x_k=0\right\}$ Sıfıra yakınsak dizilerin uzayı

$\ell_\infty=\left\{x=(x_k)\in w:\sup_k|x_k|<\infty\right\}$ Sınırlı dizilerin uzayı

$\ell_p=\left\{x=(x_k)\in w:\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<\infty,1\le p<\infty\right\}$ p. kuvvetten mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin uzayı

Burada c,c_0,ℓ_∞ uzayları

$$\|x\|=\sup_k|x_k|$$

normlu ile, ℓ_p uzayı $(1\le p<\infty)$

$$\|x\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{1/p}$$

normu ile Banach uzaylarıdır [79].

Tanım 2.17 (Sonsuz matris) λ, herhangi bir reel veya kompleks sayı olmak üzere

$$A+B=\left(a_{ij}+b_{ij}\right),\ \lambda A=\left(\lambda a_{ij}\right),\ AB=\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}b_{kj}\right),$$

işlemleriyle tanımlı, reel veya kompleks terimli $A=\left(a_{ij}\right),\ \left(i,j=1,2,\ldots\right)$ matrisine sonsuz matris denir [80].

Tanım 2.18 (Üçgen matris) $A=\left(a_{nk}\right)$ matrisi $k>n$ için $a_{nk}=0$ terimlerinden oluşuyorsa alt üçgensel matris, $k<n$ için $a_{nk}=0$ terimlerinden oluşuyorsa üst üçgensel matris adını alır. $A=\left(a_{nk}\right)$ matrisi üçgensel ve bütün $n\in\mathbb{N}$ için $a_{nn}\neq 0$ ise üçgen matris denir [81].

Teorem 2.7 A, alt üçgensel sonsuz bir matris olsun. Eğer bir veya birden fazla i için $a_{ii}=0$ ise A matrisinin tersi yoktur [80].

Tanım 2.19 X ve Y, w uzayının alt uzayı olan iki dizi uzayı ve $A=\left(a_{nk}\right)$, $n,k\in\mathbb{N}=\left\{0,1,2,\ldots\right\}$ reel veya kompleks terimli bir sonsuz matris olsun. Bu durumda, eğer her $x=\left(x_k\right)\in X$ dizisi için

$$\left(Ax\right)_n=\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}x_k$$

dizisi yakınsak ise $Ax=\left\{\left(Ax\right)_n\right\}$ dizisine x dizisinin A matrisi ile elde edilen dönüşüm dizisi denir.

Eğer her $x\in X$ için Ax dönüşüm dizisi mevcut ve Y uzayına ait ise A matrisi, X'ten Y'ye bir matris dönüşümü tanımlar denir ve $A:X\to Y$ ile gösterilir. $\left(X,Y\right)$ ile $A:X\to Y$ olan bütün matrislerin sınıfı, $\left(X,Y;p\right)$ ile toplamı ya da limit koruyan $A:X\to Y$ olan bütün matrislerin sınıfı gösterilir. Özel olarak $A\in\left(c,c\right)$ ise A matrisine konservatif matris, $A\in\left(c,c;p\right)$ ise A matrisine regüler matris denir.

Teorem 2.8 $A=\left(a_{nk}\right)$ matrisinin c uzayından yine bu uzaya tanımlı bir sınırlı lineer $T\in B\left(c\right)$ dönüşümüne karşılık gelmesi için gerek ve yeter şartlar;

i) A matrisinin bütün satırları ℓ_1 uzayında ve ℓ_1 normları sınırlıdır.

ii) A matrisinin bütün sütunları c uzayındadır.

iii) A matrisinin satır toplamları dizisi c uzayındadır.

T dönüşümünün normu, satırların ℓ_1 toplamının supremumudur [77].

Teorem 2.9 $A=(a_{nk})$ matrisinin c_0 uzayından yine bu uzaya tanımlı bir sınırlı lineer $T\in B(c_0)$ dönüşümüne karşılık gelmesi için gerek ve yeter şartlar;

i) A matrisinin bütün satırları ℓ_1 uzayında ve ℓ_1 normları sınırlıdır.

ii) A matrisinin bütün sütunları c_0 uzayındadır.

T dönüşümünün normu, satırların ℓ_1 toplamının supremumudur [77].

Teorem 2.10 $A=(a_{nk})$ matrisinin ℓ_1 uzayından yine bu uzaya tanımlı bir sınırlı lineer $T\in B(l_1)$ dönüşümüne karşılık gelmesi için gerek ve yeter şart bütün sütunlarının ℓ_1 uzayında ve ℓ_1 normları sınırlı olmasıdır.

T dönüşümünün normu, sütunların ℓ_1 toplamının supremumudur [77].

Teorem 2.11 $A=(a_{nk})$ matrisinin ℓ_∞ uzayından yine bu uzaya tanımlı bir sınırlı lineer $T\in B(\ell_\infty)$ dönüşümüne karşılık gelmesi için gerek ve yeter şart bütün satırlarının ℓ_1 uzayında ve ℓ_1 normları sınırlı olmasıdır.

T dönüşümünün normu, satırların ℓ_1 toplamının supremumudur [81].

Tanım 2.20 (Ağırlıklı ortalama matrisi) $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\neq 0$ olmak üzere U, bütün $u=(u_n)$ dizilerinin kümesini göstersin. $u\in U$ için $\frac{1}{u}=\frac{1}{u_n}$ olsun. $u,v\in U$, u_n sadece n'e bağlı ve v_k sadece k'a bağlı olmak üzere

$$g_{nk}=\begin{cases}u_n v_k, & 0\le k\le n\\ 0 \quad , & \mathrm{k>n}\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $G(u,v)=(g_{nk})$ matrisine genelleştirilmiş ağırlıklı ortalama matrisi ya da factorable matris denir [82].

Tanım 2.21 (Genelleştirilmiş fark operatörü) $r,s\in\mathbb{R}$ ve $s\neq 0$ olmak üzere

$$B(r,s)=\begin{bmatrix} r & 0 & 0 & \cdots \\ s & r & 0 & \cdots \\ 0 & s & r & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

bant matrisiyle temsil edilen dönüşüme genelleştirilmiş fark operatörü denir.

2.4 Bir Lineer Dönüşümün Spektrumu

X bir lineer vektör uzayı ve T, X üzerinde bir lineer dönüşüm olsun. I özdeşlik dönüşümü olmak üzere $\lambda\in\mathbb{C}$ skaler sayılarına karşılık gelen $T_\lambda=T-\lambda I$ dönüşümler demeti incelenerek T dönüşümünün yapısı hakkında geniş bilgi elde edilebilir. Lineer dönüşümlerin spektral teorisi λ sayılarının, T_λ dönüşümünün sınırlı bir tersinin bulunmasına olanak sağlayan çözücü kümesinin belirlenmesi, bu küme ve spektrum adı verilen tümleyeni ile T ve varsa T_λ^{-1} dönüşümü arasındaki ilişkilerin aydınlatılması ile uğraşır [76].

2.4.1 Sonlu Boyutlu Uzaylarda Spektrum Kavramı

X, sonlu boyutlu bir normlu uzay ve $T:X\to X$ bir lineer dönüşüm olsun. T dönüşümü, X'te seçilen bazlara göre matrislerle temsil edilebilir. Sonlu boyutlu uzaylarda spektral analiz, dönüşüme karşılık gelen matrisin karakteristik köklerinin incelenmesidir, başka bir deyişle matris özdeğer teorisine denk gelir.

Tanım 2.22 (Özdeğer, özvektör) $A=(a_{jk})$ kare bir matris olmak üzere, $Ax=\lambda x$ denkleminin $x\neq\theta$ için çözümü varsa, λ sayısına A'nın bir özdeğeri ve bu $x\in X$ elemanına da A'nın λ özdeğerine karşılık gelen özvektörü denir.

A'nın bütün özdeğerlerinin kümesine spektrum denir ve $\sigma(A)$ ile gösterilir. $\rho(T)=\mathbb{C}-\sigma(T)$ kümesine de A'nın resolvent kümesi denir.

n-satırlı bir $A=\left(a_{jk}\right)$ kare matrisinin özdeğerleri, karakteristik polinom olarak adlandırılan $\det\left(A-\lambda I\right)$ denkleminin kökleridir.

$X\neq\theta$ sonlu boyutlu, kompleks bir normlu uzay olmak üzere X üzerinde tanımlı bir lineer dönüşümün en az bir özdeğeri vardır [1].

2.4.2 Sonsuz Boyutlu Uzaylarda Spektral Analiz

Sonlu boyutlu uzaylardaki matris özdeğer teorisi, sonsuz boyutlu uzaylardaki spektral teorinin bir kısmını oluşturur ancak sonsuz boyutta spektrum kavramı daha geniş kapsamlı ve karmaşıktır.

Tanım 2.23 (Rezolvent) $X\neq\left\{\theta\right\}$ bir kompleks normlu uzay, $\wp\left(T\right)\subset X$ olmak üzere $T:\wp\left(T\right)\to X$ bir lineer dönüşüm olsun. Bu takdirde eğer T_λ dönüşümünün bir tersi varsa rezolvent (çözücü) dönüşüm olarak adlandırılır ve

$$R_\lambda\left(T\right)=T_\lambda^{-1}=\left(T-\lambda I\right)^{-1}$$

ile gösterilir [1].

Tanım 2.24 (Regüler değer, rezolvent kümesi, spektrum) $X\neq\left\{\theta\right\}$ kompleks bir normlu uzay, $\wp\left(T\right)\subset X$ olmak üzere $T:\wp\left(T\right)\to X$ bir lineer dönüşüm olsun.

(R1) $R_\lambda\left(T\right)$ var,

(R2) $R_\lambda\left(T\right)$ sınırlı,

(R3) $R_\lambda\left(T\right)$, X 'te yoğun bir kümede tanımlı

şartlarını sağlayan kompleks λ değerine T'nin bir regüler değeri denir. T'nin bütün regüler değerlerinden oluşan kümeye T'nin rezolvent kümesi denir ve $\rho\left(T\right)$ ile gösterilir. Kompleks düzlemde rezolvent kümenin tümleyeni olan $\sigma\left(T\right)=\mathbb{C}-\rho\left(T\right)$ kümesine T'nin spektrumu ve $\lambda\in\sigma\left(T\right)$ değeri T'nin bir spektral değeri olarak adlandırılır [1].

Kapalı Grafik Teoremi'ne göre $\lambda \in \rho(T)$ için $(T-\lambda I)^{-1}$ dönüşümü her zaman sınırlıdır. $|\lambda| > \|T\|$ şartını sağlayan her λ değeri rezolvent kümesininin elemanıdır ve $\|R_\lambda(T)\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}$ eşitsizliğini sağlar.

$\sigma(T)$ kapalı ve sınırlı, dolayısıyla kompakttır [83].

Tanım 2.25 (Spektral yarıçap) X, bir Banach uzayı ve $T \in B(X)$ olmak üzere

$$r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$$

sayısına T'nin spektral yarıçapı denir. Kompleks bir Banach uzayında bu sayı Gel'fand formülü ile hesaplanabilir [83] :

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{\|T^n\|}$$

Teorem 2.12 X, bir Banach uzayı ve $T \in B(X)$ olsun. Herhangi bir $p : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, $p(\lambda) = a_n\lambda^n + \cdots + a_1\lambda + a_0$ polinomu için

$$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$$

eşitliği sağlanır. Burada $p(\lambda) = a_nT^n + \cdots + a_1T + a_0I$ ve $p(\sigma(T)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\}$ dir [83].

Spektrum; nokta spektrum, sürekli spektrum ve rezidü (artık) spektrum olmak üzere üç ayrık kümeden oluşur:

Tanım 2.26 (Nokta spektrum) $R_\lambda(T)$ dönüşümünün mevcut olmadığı λ skaler değerlerinin kümesine T'nin nokta spektrumu denir ve $\sigma_p(T)$ ile gösterilir. Bir $\lambda \in \sigma_p(T)$ değerine T'nin bir özdeğeri adı verilir [1].

Tanım 2.27 (Sürekli spektrum) $R_\lambda(T)$ dönüşümünün mevcut ve yoğun bir kümede tanımlı ancak sınırlı olmadığı λ skaler değerlerinden oluşan kümeye T'nin sürekli spektrumu denir ve $\sigma_c(T)$ ile gösterilir [1].

Tanım 2.28 (Artık spektrum) $R_\lambda(T)$ dönüşümünün mevcut (sınırlı veya sınırsız) ancak yoğun bir kümede tanımlı olmadığı λ skaler değerlerinden oluşan kümeye T'nin artık spektrumu denir ve $\sigma_r(T)$ ile gösterilir [1].

Bir lineer dönüşüm için bu kümelerden bazıları boş olabilir. Örneğin; sonlu boyutlu uzaylarda $\sigma_c(T)=\sigma_r(T)=\varnothing$ dir.

Bu tanımda verilen şartlar aşağıdaki çizelgede özetlenebilir:

Çizelge 2.1 Rezolvent ve spektrum kümelerinin şartları

Sağlanır	Sağlanmaz	λ elemanıdır:
(R1), (R2), (R3)		$\rho(T)$
	(R1)	$\sigma_p(T)$
(R1), (R3)	(R2)	$\sigma_c(T)$
(R1)	(R3)	$\sigma_r(T)$

Çizelge 2.1 deki dört küme ayrıktır ve kompleks düzlemi oluşturur:

$$\begin{aligned}\mathbb{C} &= \rho(T)\cup\sigma(T)\\ &= \rho(T)\cup\sigma_p(T)\cup\sigma_c(T)\cup\sigma_r(T)\end{aligned}$$

Teorem 2.3 e göre $R_\lambda(T)$ var olabilmesi için gerek ve yeter koşul $T_\lambda x=0\Rightarrow x=0$ olmasıdır. Bu nedenle, $T_\lambda x=(T-\lambda I)x=0$ denkleminin $x\neq 0$ için çözümü varsa $\lambda\in\sigma_p(T)$ yani λ, T'nin bir özdeğeridir.

Eğer X sonsuz boyutlu ise T dönüşümü özdeğer olmayan spektral değerlere sahip olabilir:

Örnek 2.1 T, $X=\ell_2$ Hilbert uzayı üzerinde

$$\begin{aligned}&T:\ell_2\to\ell_2\\ &\quad(x_1,x_2,\ldots)\mapsto(0,x_1,x_2,\ldots),\quad x=(x_j)\in\ell_2\end{aligned}$$

şeklinde tanımlı bir lineer dönüşüm olsun. Bu dönüşüme sağa kaydırma operatörü denir.

$\|Tx\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 = \|x\|^2$ olduğundan T dönüşümü sınırlıdır.

Sola kaydırma operatörü olarak adlandırılan

$$R_0(T) = T^{-1} : T(X) \to X$$
$$(x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_2, x_3, \ldots)$$

ters dönüşümü vardır. $R_0(T)$, (R3) şartını sağlamaz. Çünkü

$$T(X) = \left\{ y = (y_j) \in \ell_2 \,|\, y_1 = 0 \right\}$$

kümesi X 'te yoğun değildir ve Tanım 2.21 e göre $\lambda = 0$, T nin bir spektral değeridir. Ancak $Tx = 0 \Rightarrow x = 0$ ve sıfır vektörü bir özvektör olmadığından $\lambda = 0$ bir özdeğer değildir.

Nokta spektrum kümesindeki λ değerleri birebirliğin olmadığı, artık spektrum kümesindeki λ değerleri örtenliğin olmadığı, sürekli spektrum kümesindeki λ değerleri kararlılığın olmadığı yerleri belirler. Spektrum kümesinin alt sınıflara ayrılması aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir:

Çizelge 2.2 Spektrumun alt kümeleri

		1	2	3
		$R_\lambda(T)$ var ve sınırlı	$R_\lambda(T)$ var fakat sınırlı değil	$R_\lambda(T)$ yok
I	$\Re(T-\lambda I) = X$	$\lambda \in \rho(T)$	–	$\lambda \in \sigma_p(T)$
II	$\overline{\Re(T-\lambda I)} = X$	$\lambda \in \rho(T)$	$\lambda \in \sigma_c(T)$	$\lambda \in \sigma_p(T)$
III	$\overline{\Re(T-\lambda I)} \neq X$	$\lambda \in \sigma_r(T)$	$\lambda \in \sigma_r(T)$	$\lambda \in \sigma_p(T)$

Kapalı Grafik Teoremi'ne göre bir Banach uzayında yoğun kümede tanımlı kapalı dönüşümün sınırlı olması gerektiğinden Çizelge 2.2 de I_2 durumu oluşmaz [83].

Teorem 2.13 $T \in B(X)$ ve $T^* \in B(X^*)$ dönüşümlerinin spektrumları arasında aşağıdaki bağıntılar mevcuttur:

a) $\sigma(T^*, X') = \sigma(T, X)$

b) $\sigma_p(T, X) \subset \sigma_r(T^*, X') \cup \sigma_p(T^*, X')$

c) $\sigma_p(T^*, X') \subset \sigma_r(T, X) \cup \sigma_p(T, X)$

d) $\sigma_c(T, X) \subset \sigma_r(T^*, X') \cup \sigma_c(T^*, X')$

e) $\sigma_c(T^*, X') \subset \sigma_c(T, X)$

f) $\sigma_r(T, X) \subset \sigma_p(T^*, X')$

g) $\sigma_r(T^*, X') \subset \sigma_c(T, X) \cup \sigma_p(T, X)$

h) Eğer T kapalı ve X refleksif ise $\sigma_c(T, X) = \sigma_c(T^*, X')$ ve $\sigma_r(T^*, X') \subset \sigma_p(T, X)$ dir [78].

BÖLÜM 3

$B^m(r,s)$ DÖNÜŞÜMÜNÜN c_0, c ve ℓ_∞ UZAYLARINDAKİ SPEKTRAL ANALİZİ

3.1 m. Dereceden Genelleştirilmiş Fark Matrisi

Tanım 3.1 Her $r,s \in \mathbb{R}-\{0\}$ için terimleri

$$\left(b_{nk}^m\right)=\begin{cases} \binom{m}{n-k} r^{m-n+k} s^{n-k}, & \left(\max\{0,n-m\} \le k \le n\right) \\ 0, & \left(0 \le k < \max\{0,n-m\}\right) \text{ ya da } \left(k>n\right) \end{cases}$$

olarak verilen ve

$$B^m\left(r,s\right)=\begin{pmatrix} r^m & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \binom{m}{1} r^{m-1}s & r^m & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s^m & \binom{m}{m-1} rs^{m-1} & \binom{m}{m-2} r^2 s^{m-2} & \cdots & r^m & \cdots \\ 0 & s^m & \binom{m}{m-1} rs^{m-1} & \cdots & \binom{m}{1} r^{m-1}s & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

açık ifadesi ile yazılan $(m+1)$-bant matrisine m. dereceden genelleştirilmiş fark matrisi denir. Bu matris fark matrisi Δ, ikinci dereceden fark matrisi Δ^2 ve genelleştirilmiş fark matrisi $B(r,s)$ nin genel halidir.

Bu bölümde c_0, c ve ℓ_∞ dizi uzayları üzerinde sınırlı bir lineer dönüşüme karşılık gelen $B^m(r,s)$ matrisinin nokta spektrumu, artık spektrumu ve sürekli spektrumu araştırılmıştır.

3.2 $B^m(r,s)$ Dönüşümünün c_0 Uzayı Üzerindeki Spektrumu

Teorem 3.1 Teorem 2.9 da verilen şartlara göre $B^m(r,s)$ matrisi c_0 dizi uzayı üzerinde sınırlı bir lineer dönüşüme karşılık gelir ve dönüşüm normu

$$\left\|B^m(r,s)\right\|_{(c_0,c_0)} = \sum_{i=0}^{m}\left|\binom{m}{i} r^{m-i}s^i\right|$$

şeklindedir.

$B^m(r,s)-\lambda I$ dönüşümünün c_0 uzayı üzerinde sınırlı bir tersinin bulunmasına engel olan λ değerleri araştırılmış ve şu sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 3.2 $\sigma(B^m(r,s),c_0) = \left\{\lambda\in\mathbb{C}:\left|r^m-\lambda\right|\le\sum_{i=1}^{m}\left|\binom{m}{i}r^{m-i}s^i\right|\right\} = S$

İspat Teoremin ispatı için ilk olarak $\lambda\notin S$ kabulüyle birlikte $\lambda\notin\sigma(B^m(r,s),c_0)$ olduğu yani $B^m(r,s)-\lambda I$ dönüşümünün sınırlı bir terse sahip olduğu, ikinci olarak ise $\lambda\in S$ için $\lambda\in\sigma(B^m(r,s),c_0)$ olduğu gösterilmelidir.

$\lambda\notin S$ alalım. Bu durumda, $B^m(r,s)-\lambda I$ üçgen matris olduğundan tersi vardır.

$\left(B^m(r,s)-\lambda I\right)\left(B^m(r,s)-\lambda I\right)^{-1} = I$ eşitliğinden $\left(B^m(r,s)-\lambda I\right)^{-1} = (d_{nk})$ ters dönüşümü

$$(d_{nk})=\begin{pmatrix} \frac{1}{r^m-\lambda} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -\frac{mr^{m-1}s}{(r^m-\lambda)^2} & \frac{1}{r^m-\lambda} & 0 & 0 & \cdots \\ d_{20} & -\frac{mr^{m-1}s}{(r^m-\lambda)^2} & \frac{1}{r^m-\lambda} & 0 & \cdots \\ d_{30} & d_{31} & -\frac{mr^{m-1}s}{(r^m-\lambda)^2} & \frac{1}{r^m u_3 v_3-\lambda} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Burada

$$d_{20}=-\frac{\binom{m}{2}r^{m-2}s^2}{(r^m-\lambda)^2}+\frac{\left(mr^{m-1}s\right)^2}{(r^m-\lambda)^3}$$

$$d_{31}=-\frac{\binom{m}{2}r^{m-2}s^2}{(r^m-\lambda)^2}+\frac{\left(mr^{m-1}s\right)^2}{(r^m-\lambda)^3}$$

$$d_{30}=-\frac{\binom{m}{3}r^{m-3}s^3}{(r^m-\lambda)^2}+2\frac{\binom{m}{2}r^{m-2}s^2\left(mr^{m-1}s\right)}{(r^m-\lambda)^3}-\frac{\left(mr^{m-1}s\right)^3}{(r^m-\lambda)^4}$$

şeklindedir. Aynı işlemler yapılarak genel olarak $n\in\mathbb{N}$ için ters dönüşümün terimleri

$$d_{nn}=\frac{1}{r^m-\lambda}$$

$$d_{n,n-1}=-\frac{mr^{m-1}s}{(r^m-\lambda)^2}$$

$$d_{n,n-2}=-\frac{\binom{m}{2}r^{m-2}s^2}{(r^m-\lambda)^2}+\frac{\left(mr^{m-1}s\right)^2}{(r^m-\lambda)^3}$$

$$d_{n,n-3}=-\frac{\binom{m}{3}r^{m-3}s^3}{(r^m-\lambda)^2}+2\frac{\binom{m}{2}r^{m-2}s^2\left(mr^{m-1}s\right)}{(r^m-\lambda)^3}-\frac{\left(mr^{m-1}s\right)^3}{(r^m-\lambda)^4}$$

……

……

olarak hesaplanır. Şimdi $\left(B^m(r,s)-\lambda I\right)^{-1}\in(c_0,c_0)$ olduğu yani matrisin Teorem 2.9 da verilen şartları sağladığı gösterilmelidir.

Yukarıda bulunan terimler kullanılarak S_n ile gösterilen $n.$ satırın mutlak toplamı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$S_n=\sum_{k=0}^{\infty}\left|d_{nk}\right|=\left|d_{n0}\right|+\left|d_{n1}\right|+\cdots+\left|d_{n-1,n}\right|+\left|d_{nn}\right|=\left|d_{nn}\right|+\left|d_{n-1,n}\right|+\cdots+\left|d_{n1}\right|+\left|d_{n0}\right|$$

$$=\frac{1}{\left|r^m-\lambda\right|}+\left|-\frac{mr^{m-1}s}{(r^m-\lambda)^2}\right|+\left|-\frac{\binom{m}{2}r^{m-2}s^2}{(r^m-\lambda)^2}+\frac{\left(mr^{m-1}s\right)^2}{(r^m-\lambda)^3}\right|+$$

$$+\left|-\frac{\binom{m}{3}r^{m-3}s^3}{(r^m-\lambda)^2}+2\frac{\binom{m}{2}r^{m-2}s^2\left(mr^{m-1}s\right)}{(r^m-\lambda)^3}-\frac{\left(mr^{m-1}s\right)^3}{(r^m-\lambda)^4}\right|+\cdots$$

Şimdi n üzerinden limit alınıp üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$$\lim_n S_n=\lim_n\left|d_{nn}\right|+\left|d_{n-1,n}\right|+\cdots+\left|d_{n1}\right|+\left|d_{n0}\right|$$

$$=\frac{1}{\left|r^m-\lambda\right|}+\left|-\frac{mr^{m-1}s}{(r^m-\lambda)^2}\right|+\left|-\frac{\binom{m}{2}r^{m-2}s^2}{(r^m-\lambda)^2}+\frac{\left(mr^{m-1}s\right)^2}{(r^m-\lambda)^3}\right|+$$

$$+\left|-\frac{\binom{m}{3}r^{m-3}s^3}{(r^m-\lambda)^2}+2\frac{\binom{m}{2}r^{m-2}s^2\left(mr^{m-1}s\right)}{(r^m-\lambda)^3}-\frac{\left(mr^{m-1}s\right)^3}{(r^m-\lambda)^4}\right|+\cdots$$

$$\le\frac{1}{\left|r^m-\lambda\right|}+\frac{\left|mr^{m-1}s\right|}{\left|r^m-\lambda\right|^2}+\frac{\left|\binom{m}{2}r^{m-2}s^2\right|}{\left|r^m-\lambda\right|^2}+\frac{\left|mr^{m-1}s\right|^2}{\left|r^m-\lambda\right|^3}+\frac{\left|\binom{m}{3}r^{m-3}s^3\right|}{\left|r^m-\lambda\right|^2}+$$

$$+2\frac{\left|\binom{m}{2}r^{m-2}s^2\left(mr^{m-1}s\right)\right|}{\left|r^m-\lambda\right|^3}+\frac{\left|mr^{m-1}s\right|^3}{\left|r^m-\lambda\right|^4}+\frac{\left|\binom{m}{4}r^{m-4}s^4\right|}{\left|r^m-\lambda\right|^2}+2\frac{\left|\binom{m}{3}r^{m-3}s^3\left(mr^{m-1}s\right)\right|}{\left|r^m-\lambda\right|^3}+\cdots$$

elde edilir. $\mu_i=\binom{m}{i}r^{m-i}s^i$ alınarak eşitsizlik düzenlenirse

$$\lim_n S_n\le\frac{1}{\left|r^m-\lambda\right|}\left\{1+\frac{\left|\mu_1\right|}{\left|r^m-\lambda\right|}+\frac{\left|\mu_2\right|}{\left|r^m-\lambda\right|}+\cdots+\frac{\left|\mu_m\right|}{\left|r^m-\lambda\right|}+\right.$$

$$\frac{\left|\mu_1\right|^2}{\left|r^m-\lambda\right|^2}+\cdots+\frac{\left|\mu_m\right|^2}{\left|r^m-\lambda\right|^2}+2\left(\frac{\left|\mu_1\mu_2\right|}{\left|r^m-\lambda\right|^2}+\frac{\left|\mu_1\mu_3\right|}{\left|r^m-\lambda\right|^2}+\frac{\left|\mu_2\mu_3\right|}{\left|r^m-\lambda\right|^2}+\right)$$

$$\left.\frac{\left|\mu_1\right|^3}{\left|r^m-\lambda\right|^3}+\cdots+\frac{\left|\mu_m\right|^3}{\left|r^m-\lambda\right|^3}+3\left(\frac{\left|\left(\mu_1\right)^2\mu_2\right|}{\left|r^m-\lambda\right|^3}+\frac{\left|\left(\mu_1\right)^2\mu_3\right|}{\left|r^m-\lambda\right|^3}+\frac{\left|\left(\mu_2\right)^2\mu_1\right|}{\left|r^m-\lambda\right|^3}+\cdots\right)+\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{\left|r^m-\lambda\right|}\left\{1+\frac{\left|\mu_1\right|+\left|\mu_2\right|+\cdots+\left|\mu_m\right|}{\left|r^m-\lambda\right|}+\left(\frac{\left|\mu_1\right|+\left|\mu_2\right|+\cdots+\left|\mu_m\right|}{\left|r^m-\lambda\right|}\right)^2+\left(\frac{\left|\mu_1\right|+\left|\mu_2\right|+\cdots+\left|\mu_m\right|}{\left|r^m-\lambda\right|}\right)^3+\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{\left|r^m-\lambda\right|-\sum_{i=1}^{m}\left|\mu_i\right|}<\infty$$

elde edilir. Burada $\lambda \notin S$ olduğundan $\dfrac{\sum_{i=1}^{m}|\mu_i|}{|r^m-\lambda|}=\dfrac{|\mu_1|+|\mu_2|+\cdots+|\mu_m|}{|r^m-\lambda|}<1$ dir. Ayrıca m sabit bir doğal sayı olduğundan $i>m$ için $\mu_i=0$ olur. (S_n) pozitif terimli bir reel sayı dizisi ve yakınsak olduğundan sınırlıdır yani $\sup_n S_n<\infty$ bulunur. Bu durumda $\lambda \notin S$ için $\left(B^m(r,s)-\lambda I\right)^{-1}\in B(c_0)$ olur. Böylece $\sigma(B^m(r,s),c_0)\subseteq S$ elde edilir.

Tersini ispatlamak için $\lambda \in S$ kabul edelim. $\lambda \neq r^m$ ve $\lambda = r^m$ durumları ortaya çıkar.

$\lambda \neq r^m$ ve $|r^m-\lambda|=\sum_{i=1}^{m}\left|\binom{m}{i}r^{m-i}s^i\right|$ olsun. $B^m(r,s)-\lambda I$ üçgen matris olduğundan tersi vardır. olsun. Bu durumda $\sum_{p=1}^{\infty}\left(\dfrac{|\mu_1|+|\mu_2|+\cdots+|\mu_m|}{|r^m-\lambda|}\right)^p$ serisi ıraksar. Bu da $\left(B^m(r,s)-\lambda I\right)^{-1}$ matrisinde normun sınırsızlığını getirir yani $\left(B^m(r,s)-\lambda I\right)^{-1}\notin B(c_0)$ olduğu görülür.

$\lambda \neq r^m$ ve $|r^m-\lambda|<\sum_{i=1}^{m}\left|\binom{m}{i}r^{m-i}s^i\right|$ olduğunda ise $p\to\infty$ iken $\left(\dfrac{|\mu_1|+|\mu_2|+\cdots+|\mu_m|}{|r^m-\lambda|}\right)^p\to\infty$ olur. Bu durumda da $\lim_n S_n=\infty$ dolayısıyla $\sup_n S_n=\infty$ olduğundan $\left(B^m(r,s)-\lambda I\right)$ matrisi c_0 uzayında sınırlı bir terse sahip değildir.

$\lambda = r^m$ olsun. Bu durumda $B^m(r,s)-\lambda I$ dönüşümü

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ mr^{m-1}s & 0 & 0 & \dots \\ \binom{m}{2}r^{m-2}s^2 & mr^{m-1}s & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

şeklinde olur. Burada ilk satır sıfır olduğundan bu dönüşüm c_0 uzayında örten değildir. Yani $\Re\left(B^m\left(r,s\right)-\lambda I\right)\neq c_0$ dir ve dolayısıyla tersi yoktur.

Böylece Tanım 2.24 e göre $\lambda\in S$ iken $\lambda\in\sigma(B^m(r,s),c_0)$ elde edilir ve ispat tamamlanır.

Şimdi $B^m\left(r,s\right)$ dönüşümü için c_0 uzayında elde ettiğimiz spektrumun alt sınıflarını inceleyelim.

Teorem 3.3 $\sigma_p(B^m(r,s),c_0)=\varnothing$

İspat $B^m\left(r,s\right)x=\lambda x$ denkleminin c_0 uzayında sıfırdan farklı $x=\left(x_n\right)$ dizisi için çözümünü veren λ değerlerinin kümesi $B^m\left(r,s\right)$ dönüşümünün nokta spektrumudur.

$$\begin{pmatrix} r^m & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ mr^{m-1}s & r^m & 0 & \cdots & \cdots \\ \binom{m}{2}r^{m-2}s^2 & mr^{m-1}s & r^m & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

eşitliğinden

$$\left(r^m-\lambda\right)x_0=0$$
$$mr^{m-1}sx_0+\left(r^m-\lambda\right)x_1=0$$
$$\binom{m}{2}r^{m-2}s^2x_0+mr^{m-1}sx_1+\left(r^m-\lambda\right)x_2=0$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$

lineer denklem sistemi elde edilir.

$\lambda=r^m$ için bu denklem sistemi çözülürse $x_0=0,x_1=0,x_2=0,\ldots$ elde edilir. Bu da $x=\left(x_n\right)\neq 0$ olması ile çelişir. O halde $r^m\notin\sigma_p\left(B^m\left(r,s\right),c_0\right)$ dır.

x_{n_0}, $\left(x_n\right)$ dizisinin sıfırdan farklı ilk terimi olsun. Bu durumda $\lambda=r^m$ olur ve $\forall k\in\mathbb{N}$ için $x_{n_0+k}=0$ olacağından $x_{n_0}\neq 0$ kabulü ile çelişir. Sonuç olarak, $x\neq 0$ için

$B^m(r,s)x=\lambda x$ lineer denklemini sağlayan λ değeri olmadığından $\sigma_p(B^m(r,s),c_0)=\varnothing$ olur.

$T:c_0\to c_0$, A matrisi ile temsil edilen sınırlı bir lineer dönüşüm olsun. Bu durumda T nin eşlenik dönüşümü $T^*:c_0^{'}\to c_0^{'}$, A matrisinin transpozu A^t ile temsil edilen dönüşümdür. c_0 uzayının dual uzayı c_o^*, $\|x\|=\sum_k |x_k|$ normu ile tanımlı mutlak toplanabilir dizilerin uzayı olan ℓ_1 Banach uzayına izometrik izomorftur.

Teorem 3.4 $\sigma_p(B^m(r,s)^*,c_0^{\ *})=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\left|r^m-\lambda\right|<\sum_{i=1}^{m}\left|\binom{m}{i}r^{m-i}s^i\right|\right\}$

İspat c_0 uzayının dual uzayı olan ℓ_1 uzayında sıfırdan farklı bir $f=(f_k)$ dizisi için $B^m(r,\mathrm{s})^*\ f=\lambda f$ olsun. Bu durumda $B^m(r,\mathrm{s})^*=B^m(r,\mathrm{s})^t$ olduğundan

$$\begin{pmatrix} r^m & mr^{m-1}s & \binom{m}{2}r^{m-2}s^2 & \cdots & s^m & 0 & \cdots \\ 0 & r^m & mr^{m-1}s & \cdots & mrs^{m-1} & s^m & \cdots \\ 0 & 0 & r^m & \cdots & \binom{m}{m-2}r^2s^{m-2} & mrs^{m-1} & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_k \\ \vdots \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_k \\ \vdots \end{pmatrix}$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned}
&\left(r^m-\lambda\right)f_0+mr^{m-1}sf_1+\cdots+s^m f_m=0\\
&\left(r^m-\lambda\right)f_1+mr^{m-1}sf_2+\cdots+s^m f_{m+1}=0\\
&\qquad\vdots\\
&\left(r^m-\lambda\right)f_k+mr^{m-1}sf_{k+1}+\cdots+s^m f_{m+k}=0\\
&\qquad\vdots
\end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümünden f dizisinin genel terimi

$$f_k=\frac{mr^{m-1}sf_{k+1}+\binom{m}{2}r^{m-2}s^2f_{k+2}+\cdots+s^m f_{m+k}}{\lambda-r^m}$$

olarak bulunur.

$\lambda = r^m$ olsun. Bu takdirde $f = (f_0, 0, 0, \ldots)$ vektörü $B^m(r,s)^*$ dönüşümü için r^m özdeğerine karşılık gelen özvektör olur. Öyleyse $r^m \in \sigma_p(B^m(r,s)^*, c_0^*)$ olur.

$\lambda \neq r^m$ ve $P_k = \sum_{i=0}^{k} |f_i|$, $\sum_{i=0}^{\infty} |f_i|$ serisinin kısmi toplamlar dizisi olsun.

$$P_k = \sum_{i=0}^{k} |f_i| = |f_0| + |f_1| + \cdots + |f_k|$$

$$= \left| \frac{mr^{m-1}sf_1 + \cdots + s^m f_m}{\lambda - r^m} \right| + \left| \frac{mr^{m-1}sf_2 + \cdots + s^m f_{m+1}}{\lambda - r^m} \right| + \cdots + \left| \frac{mr^{m-1}sf_{k+1} + \cdots + s^m f_{m+k}}{\lambda - r^m} \right|$$

$$\leq \frac{|mr^{m-1}sf_1|}{|\lambda - r^m|} + \cdots + \frac{|s^m f_m|}{|\lambda - r^m|} + \frac{|mr^{m-1}sf_2|}{|\lambda - r^m|} + \cdots + \frac{|s^m f_{m+1}|}{|\lambda - r^m|} + \frac{|mr^{m-1}sf_{k+1}|}{|\lambda - r^m|} + \cdots + \frac{|s^m f_{m+k}|}{|\lambda - r^m|}$$

$$\leq \frac{|mr^{m-1}s|}{|\lambda - r^m|} \{|f_1| + |f_2| + \cdots + |f_{k+1}|\} + \cdots + \frac{|s^m|}{|\lambda - r^m|} \{|f_m| + |f_{m+1}| + \cdots + |f_{k+m}|\}$$

$$\leq \frac{|mr^{m-1}s|}{|\lambda - r^m|} (P_{k+1} - P_0) + \frac{\left| \binom{m}{2} r^{m-2}s^2 \right|}{|\lambda - r^m|} (P_{k+2} - P_1) + \cdots + \frac{|s^m|}{|\lambda - r^m|} (P_{k+m} - P_{m-1})$$

$$P_{k+1} - P_0 < P_{k+1}$$
$$P_{k+2} - P_1 < P_{k+2}$$
$$\vdots$$
$$P_{k+m} - P_{m-1} < P_{k+m}$$

olduğundan

$$P_k < \frac{|mr^{m-1}s|}{|\lambda - r^m|} P_{k+1} + \frac{\left| \binom{m}{2} r^{m-2}s^2 \right|}{|\lambda - r^m|} P_{k+2} + \cdots + \frac{|s^m|}{|\lambda - r^m|} P_{k+m}$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafında da k üzerinden limit alınırsa

$$\lim_k P_k < \frac{|mr^{m-1}s|}{|\lambda - r^m|} \lim_k P_{k+1} + \frac{\left| \binom{m}{2} r^{m-2}s^2 \right|}{|\lambda - r^m|} \lim_k P_{k+2} + \cdots + \frac{|s^m|}{|\lambda - r^m|} \lim_k P_{k+m}$$

$$P < \left(\frac{\left|mr^{m-1}s\right|}{\left|\lambda - r^m\right|} + \frac{\left|\binom{m}{2} r^{m-2}s^2\right|}{\left|\lambda - r^m\right|} + \cdots + \frac{\left|s^m\right|}{\left|\lambda - r^m\right|} \right) P$$

bulunur. Burada $\lim_k P_k = P \neq \infty$ ise

$$1 < \frac{\left|mr^{m-1}s\right| + \left|\binom{m}{2} r^{m-2}s^2\right| + \cdots + \left|s^m\right|}{\left|\lambda - r^m\right|}$$

$$\left|\lambda - r^m\right| < \left|mr^{m-1}s\right| + \left|\binom{m}{2} r^{m-2}s^2\right| + \cdots + \left|s^m\right|$$

olur. (P_k), kısmi toplamlar dizisi monoton olduğundan bu dizi yakınsak iken $\sum_{i=0}^{\infty} |f_i|$ seri toplamı sonludur. Yani $(f_k) \in \ell_1$ dir. Böylece $\left|r^m - \lambda\right| < \sum_{i=1}^{m} \left|\binom{m}{i} r^{m-i}s^i\right|$ iken $\lambda \in \sigma_p(B^m(r,s)^*, c_0^*)$ olduğu görülür.

Teorem 3.5 $\sigma_r(B^m(r,s), c_0) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \left|r^m - \lambda\right| < \sum_{i=1}^{m} \left|\binom{m}{i} r^{m-i}s^i\right| \right\}$

İspat Teoremin ispatı için $\left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \left|r^m - \lambda\right| < \sum_{i=1}^{m} \left|\binom{m}{i} r^{m-i}s^i\right| \right\}$ kümesindeki λ değerlerinde $B^m(r,s) - \lambda I$ dönüşümünün tersinin mevcut olduğu ancak bu ters dönüşümün yoğun bir kümede tanımlı olmadığı gösterilmelidir.

$\sigma_p(B^m(r,s), c_0) = \varnothing$ olduğundan her λ değeri için $B^m(r,s) - \lambda I$ dönüşümü birebirdir ve dolayısıyla tersi vardır. Teorem 3.4 e göre $\left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \left|r^m - \lambda\right| < \sum_{i=1}^{m} \left|\binom{m}{i} r^{m-i}s^i\right| \right\}$ kümesindeki λ değerleri için $B^m(r,s)^* - \lambda I$ dönüşümü birebir değildir. Bu durumda Teorem 2.5 ten $B^m(r,s) - \lambda I$ dönüşümünün görüntü kümesinin c_0 uzayında yoğun

olmadığı bilinmektedir. Yani $\Re(B^m(r,s)-\lambda I)=\wp(B^m(r,s)-\lambda I)^{-1}$ kümesinin c_0 uzayında yoğun olmadığı görülür ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.6 $\sigma_c(B^m(r,s),c_0)=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\left|r^m-\lambda\right|=\sum_{i=1}^{m}\left|\binom{m}{i}r^{m-i}s^i\right|\right\}$

İspat $\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\left|r^m-\lambda\right|\le\sum_{i=1}^{m}\left|\binom{m}{i}r^{m-i}s^i\right|\right\}-\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\left|r^m-\lambda\right|<\sum_{i=1}^{m}\left|\binom{m}{i}r^{m-i}s^i\right|\right\}$

kümesindeki λ değerleri için $B^m(r,s)-\lambda I$ dönüşümünün tersi mevcut ve yoğun bir kümede tanımlıdır. Ancak ters dönüşümün normu sınırlı olmadığından Tanım 2.27 e göre $\lambda\in\sigma_c\left(B^m(r,s),c_0\right)$ olur.

3.3 $B^m(r,s)$ Dönüşümünün c ve ℓ_∞ Uzayı Üzerindeki Spektrumu

Çalışmanın bu kısmında $B^m(r,s)$ dönüşümünün c dizi uzayı üzerindeki spektral değerleri bulunmuş, elde edilen sonuçlara bağlı olarak dönüşümün ℓ_∞ uzayındaki spektrumu verilmiştir.

Teorem 3.7 $B^m(r,s)$ matrisi Teorem 2.8 de verilen şartlara göre c dizi uzayı üzerinde sınırlı bir lineer dönüşümü temsil eder ve bu dönüşümün normu

$$\left\|B^m(r,s)\right\|_{(c,c)}=\sum_{i=0}^{m}\left|\binom{m}{i}r^{m-i}s^i\right|$$

olarak hesaplanabilir.

Teorem 3.8 $\sigma(B^m(r,s),c)=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\left|r^m-\lambda\right|\le\sum_{i=1}^{m}\left|\binom{m}{i}r^{m-i}s^i\right|\right\}$

İspat Teorem 3.2 nin ispatıyla benzer yol izlenerek sonuç elde edilmiştir.

Teorem 3.9 $\sigma_p(B^m(r,s),c)=\varnothing$

İspat Teorem 3.3 ün ispatında kullanılan benzer yöntemle gösterilebilir.

$T:c\to c$ dönüşümü A matrisi ile temsil edilen sınırlı bir lineer dönüşüm ise T nin eşlenik dönüşümü olan $T^*:c'\to c'$ dönüşümü, c dizi uzayının dual uzayı c' ile izometrik olan $\mathbb{C}\oplus\ell_1$ dizi uzayı üzerinde tanımlı

$$\begin{pmatrix}\chi & 0\\ b & A^t\end{pmatrix}$$

şeklinde bir matris ile temsil edilir. Burada χ, A matrisinin satır toplamları dizisinin limiti ile A matrisinin sütunlarının limitleri toplamının farkıdır. b ise k. terimi, A matrisinin k. sütununun limiti olan sütun vektörüdür.

$B^m(r,s):c\to c$ dönüşümü için

$$\chi=\lim_n\sum_k b_{nk}-\sum_k\lim_n b_{nk}=r^m+mr^{m-1}s+\cdots+s^m=(r+s)^m$$

ve $\lim_n b_{nk}=0$ dır. O halde $B^m(r,s)^*:c'\to c'$ eşlenik dönüşümü

$$B^m(r,s)^*=\begin{pmatrix}(r+s)^m & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & r^m & mr^{m-1}s & \cdots & s^m & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & r^m & \cdots & mrs^{m-1} & s^m & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots\end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Teorem 3.10 $\sigma_p(B^m(r,s)^*,c^*)=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\left|r^m-\lambda\right|<\sum_{i=1}^{m}\left|\binom{m}{i}r^{m-i}s^i\right|\right\}\cup\left\{(r+s)^m\right\}$

İspat $\left(B^m(r,s)^*-\lambda I\right)f=0$ eşitliğini c dizi uzayının duali $\mathbb{C}\oplus\ell_1$ uzayında sıfırdan farklı bir $f=(f_n)$ dizisi için sağlayan λ değerleri eşlenik dönüşümün nokta spektrumunu oluşturur.

$$\begin{pmatrix}(r+s)^m-\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & r^m-\lambda & mr^{m-1}s & \cdots & s^m & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & r^m-\lambda & \cdots & mrs^{m-1} & s^m & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_0\\ f_1\\ f_2\\ \vdots\\ \vdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ \vdots\end{pmatrix}$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned}
&\left((r+s)^m-\lambda\right) f_0 = 0\\
&\left(r^m-\lambda\right) f_1 + mr^{m-1}sf_2 + \cdots + s^m f_{m+1} = 0\\
&\left(r^m-\lambda\right) f_2 + mr^{m-1}sf_3 + \cdots + s^m f_{m+2} = 0\\
&\qquad\vdots\\
&\left(r^m-\lambda\right) f_k + mr^{m-1}sf_{k+1} + \cdots + s^m f_{m+k} = 0\\
&\qquad\vdots
\end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir.

Eğer $f_0 \neq 0$ ise $\lambda = (r+s)^m$ olur. O halde $\lambda = (r+s)^m$ değeri $f = (f_0, 0, 0, \ldots)$ özvektörüne karşılık gelen bir özdeğerdir. Yani $(r+s)^m \in \sigma_p(B^m(r,s)^*, c^*)$ dir.

Eğer $\lambda = r^m$ ise $f_0 = 0$ olur. Bu durumda $f = (0, f_1, 0, 0, \ldots)$ eşlenik dönüşüm için bir özvektör olur. $r^m \in \sigma_p(B^m(r,s)^*, c^*)$ elde edilir.

Son olarak $\lambda \neq r^m$ olsun. $k \in \mathbb{N}_1$ için genel terimi

$$f_k = \frac{mr^{m-1}sf_{k+1} + \binom{m}{2} r^{m-2}s^2 f_{k+2} + \cdots + s^m f_{m+k}}{\lambda - r^m}$$

olan $f = (0, f_1, f_2, \ldots)$ dizisi elde edilir. Teorem 3.4 ün ispatına benzer yöntemle bu dizinin ℓ_1 dizi uzayının elemanı olması için gerek ve yeter koşulun $\left|r^m-\lambda\right| < \sum_{i=1}^{m} \left|\binom{m}{i} r^{m-i}s^i\right|$ olduğu görülür.

Böylece $\left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left|r^m-\lambda\right| < \sum_{i=1}^{m} \left|\binom{m}{i} r^{m-i}s^i\right|\right\} \in \sigma_p(B^m(r,s)^*, c^*)$ elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.11 $\sigma_r(B^m(r,s), c) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left|r^m-\lambda\right| < \sum_{i=1}^{m} \left|\binom{m}{i} r^{m-i}s^i\right|\right\} \cup \left\{(r+s)^m\right\}$

İspat $B^m(r,s)-\lambda I$ dönüşümünün nokta spektrumu boş olduğundan her λ değeri için birebirdir ve dolayısıyla tersi vardır. Teorem 3.10 a göre $\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\left|r^m-\lambda\right|<\sum_{i=1}^{m}\left|\binom{m}{i}r^{m-i}s^i\right|\right\}\cup\left\{\left(r+s\right)^m\right\}$ kümesindeki λ değerleri için $B^m(r,s)^*-\lambda I$ dönüşümü birebir değildir. Bu durumda Teorem 2.5 ten $B^m(r,s)-\lambda I$ dönüşümünün görüntü kümesi yani $(B^m(r,s)-\lambda I)^{-1}$ dönüşümünün tanım kümesi c uzayında yoğun değildir. Bu da Tanım 2.28 e göre $\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\left|r^m-\lambda\right|<\sum_{i=1}^{m}\left|\binom{m}{i}r^{m-i}s^i\right|\right\}\cup\left\{\left(r+s\right)^m\right\}$ kümesinin $B^m(r,s)-\lambda I$ dönüşümünün artık spektrumunu oluşturduğunu gösterir.

Teorem 3.12 $\sigma_c(B^m(r,s),c)=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\left|r^m-\lambda\right|=\sum_{i=1}^{m}\left|\binom{m}{i}r^{m-i}s^i\right|\right\}-\left\{\left(r+s\right)^m\right\}$

İspat $\sigma\left(B^m(r,s),c\right)-\left(\sigma_p\left(B^m(r,s),c\right)\cup\sigma_r\left(B^m(r,s),c\right)\right)$ kümesindeki λ değerleri için $B^m(r,s)-\lambda I$ dönüşümünün tersi mevcut ve yoğun bir kümede tanımlıdır. Ancak ters dönüşümün normu sınırlı olmadığından Tanım 2.27 e göre $\lambda\in\sigma_c\left(B^m(r,s),c\right)$ olur.

Teorem 3.13 $\sigma(B^m(r,s),\ell_\infty)=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\left|r^m-\lambda\right|\le\sum_{i=1}^{m}\left|\binom{m}{i}r^{m-i}s^i\right|\right\}$

İspat Cartlidge [44], A dönüşümü yakınsak diziler uzayı c uzayından yine bu uzaya tanımlı sınırlı bir lineer dönüşüm ise $\sigma(A,\ell_\infty)=\sigma(A,c)$ olduğunu göstermiştir. $A=B^m(r,s)$ alınarak bu çalışmadan ve Teorem 3.8 den istenilen sonuç elde edilir.

BÖLÜM 4

$B^m(r,s)$ DÖNÜŞÜMÜNÜN ℓ_1 UZAYINDAKİ SPEKTRUMU

Bu bölümde $B^m(r,s)$ matrisinin ℓ_1 dizi uzayı üzerinde spektral analizi yapılacaktır.

Teorem 4.1 Teorem 2.10 da verilen şartlara göre $B^m(r,s)$ matrisi ℓ_1 dizi uzayı üzerinde sınırlı bir lineer dönüşüme karşılık gelir ve matris normu

$$\left\|B^m(r,s)\right\|_{(\ell_1,\ell_1)} = \sum_{i=0}^{m}\left|\binom{m}{i} r^{m-i}s^i\right|$$

şeklindedir.

$B^m(r,s)-\lambda I$ dönüşümünün ℓ_1 uzayı üzerinde birebir veya örten olmasını engelleyen λ değerleri incelenmiş ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 4.2 $\sigma(B^m(r,s),\ell_1)=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\left|r^m-\lambda\right|\le\sum_{i=1}^{m}\left|\binom{m}{i}r^{m-i}s^i\right|\right\}=S$

İspat Teoremin ispatı için ilk olarak $\lambda\notin S$ kabulüyle birlikte $\left(B^m(r,s)-\lambda I\right)$ dönüşümünün sınırlı bir terse sahip olduğu, ikinci olarak $\lambda\in S$ için $\lambda\in\sigma(B^m(r,s),\ell_1)$ olduğu gösterilecektir.

$\lambda\notin S$ alalım. Bu durumda, $B^m(r,s)-\lambda I$ üçgen matris olduğundan tersi vardır.

$\left(B^m(r,s)-\lambda I\right)\left(B^m(r,s)-\lambda I\right)^{-1}=I$ eşitliğinden $\left(B^m(r,s)-\lambda I\right)^{-1}=(d_{nk})$ ters dönüşümü

$$(d_{nk}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r^m-\lambda} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -\frac{mr^{m-1}s}{(r^m-\lambda)^2} & \frac{1}{r^m-\lambda} & 0 & 0 & \cdots \\ d_{20} & -\frac{mr^{m-1}s}{(r^m-\lambda)^2} & \frac{1}{r^m-\lambda} & 0 & \cdots \\ d_{30} & d_{31} & -\frac{mr^{m-1}s}{(r^m-\lambda)^2} & \frac{1}{r^m u_3 v_3-\lambda} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Burada

$$d_{20} = -\frac{\binom{m}{2} r^{m-2}s^2}{(r^m-\lambda)^2} + \frac{\left(mr^{m-1}s\right)^2}{(r^m-\lambda)^3}$$

$$d_{31} = -\frac{\binom{m}{2} r^{m-2}s^2}{(r^m-\lambda)^2} + \frac{\left(mr^{m-1}s\right)^2}{(r^m-\lambda)^3}$$

$$d_{30} = -\frac{\binom{m}{3} r^{m-3}s^3}{(r^m-\lambda)^2} + 2\frac{\binom{m}{2} r^{m-2}s^2\left(mr^{m-1}s\right)}{(r^m-\lambda)^3} - \frac{\left(mr^{m-1}s\right)^3}{(r^m-\lambda)^4}$$

şeklindedir. Aynı işlemler yapılarak genel olarak $k \in \mathbb{N}$ için ters dönüşümün terimleri

$$d_{kk} = \frac{1}{r^m-\lambda}$$

$$d_{k+1,k} = -\frac{mr^{m-1}s}{(r^m-\lambda)^2}$$

$$d_{k+2,k} = -\frac{\binom{m}{2} r^{m-2}s^2}{(r^m-\lambda)^2} + \frac{\left(mr^{m-1}s\right)^2}{(r^m-\lambda)^3}$$

$$d_{k+3,k} = -\frac{\binom{m}{3} r^{m-3}s^3}{(r^m-\lambda)^2} + 2\frac{\binom{m}{2} r^{m-2}s^2\left(mr^{m-1}s\right)}{(r^m-\lambda)^3} - \frac{\left(mr^{m-1}s\right)^3}{(r^m-\lambda)^4}$$

……

……

olarak hesaplanabilir. Şimdi $\left(B^m(r,s)-\lambda I\right)^{-1}$ matrisinin ℓ_1 dizi uzayı üzerinde sınırlı bir lineer dönüşüme karşılık geldiği yani matrisin Teorem 2.10 da verilen şartları sağladığı gösterilmelidir.

Yukarıda bulunan terimler kullanılarak S_k ile gösterilen $k.$ sütunun terimlerinin mutlak toplamı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$S_k = \sum_{n=0}^{\infty} |d_{nk}| = |d_{kk}| + |d_{k+1,k}| + |d_{k+2,k}| + \cdots$$

$$= \frac{1}{|r^m - \lambda|} + \left| -\frac{mr^{m-1}s}{(r^m-\lambda)^2} \right| + \left| -\frac{\binom{m}{2} r^{m-2}s^2}{(r^m-\lambda)^2} + \frac{\left(mr^{m-1}s\right)^2}{(r^m-\lambda)^3} \right| +$$

$$+ \left| -\frac{\binom{m}{3} r^{m-3}s^3}{(r^m-\lambda)^2} + 2\frac{\binom{m}{2} r^{m-2}s^2\left(mr^{m-1}s\right)}{(r^m-\lambda)^3} - \frac{\left(mr^{m-1}s\right)^3}{(r^m-\lambda)^4} \right| + \cdots$$

Şimdi k üzerinden limit alınırsa

$$\lim_k S_k = \lim_k \frac{1}{|r^m - \lambda|} + \lim_k \left| -\frac{mr^{m-1}s}{(r^m-\lambda)^2} \right| + \lim_k \left| -\frac{\binom{m}{2} r^{m-2}s^2}{(r^m-\lambda)^2} + \frac{\left(mr^{m-1}s\right)^2}{(r^m-\lambda)^3} \right| +$$

$$+ \lim_k \left| -\frac{\binom{m}{3} r^{m-3}s^3}{(r^m-\lambda)^2} + 2\frac{\binom{m}{2} r^{m-2}s^2\left(mr^{m-1}s\right)}{(r^m-\lambda)^3} - \frac{\left(mr^{m-1}s\right)^3}{(r^m-\lambda)^4} \right| + \cdots$$

$$\leq \frac{1}{\left|r^m-\lambda\right|}+\frac{\left|mr^{m-1}s\right|}{\left|r^m-\lambda\right|^2}+\frac{\left|\binom{m}{2}r^{m-2}s^2\right|}{\left|r^m-\lambda\right|^2}+\frac{\left|mr^{m-1}s\right|^2}{\left|r^m-\lambda\right|^3}+\frac{\left|\binom{m}{3}r^{m-3}s^3\right|}{\left|r^m-\lambda\right|^2}+$$

$$+2\frac{\left|\binom{m}{2}r^{m-2}s^2\left(mr^{m-1}s\right)\right|}{\left|r^m-\lambda\right|^3}+\frac{\left|mr^{m-1}s\right|^3}{\left|r^m-\lambda\right|^4}+\frac{\left|\binom{m}{4}r^{m-4}s^4\right|}{\left|r^m-\lambda\right|^2}+2\frac{\left|\binom{m}{3}r^{m-3}s^3\left(mr^{m-1}s\right)\right|}{\left|r^m-\lambda\right|^3}+\cdots$$

$\mu_i=\binom{m}{i}r^{m-i}s^i$ alınarak eşitsizlik düzenlenirse

$$\lim_k S_k \leq \frac{1}{\left|r^m-\lambda\right|}\left\{1+\frac{\left|\mu_1\right|}{\left|r^m-\lambda\right|}+\frac{\left|\mu_2\right|}{\left|r^m-\lambda\right|}+\cdots+\frac{\left|\mu_m\right|}{\left|r^m-\lambda\right|}+\right.$$

$$\frac{\left|\mu_1\right|^2}{\left|r^m-\lambda\right|^2}+\cdots+\frac{\left|\mu_m\right|^2}{\left|r^m-\lambda\right|^2}+2\left(\frac{\left|\mu_1\mu_2\right|}{\left|r^m-\lambda\right|^2}+\frac{\left|\mu_1\mu_3\right|}{\left|r^m-\lambda\right|^2}+\frac{\left|\mu_2\mu_3\right|}{\left|r^m-\lambda\right|^2}+\right)+$$

$$\left.\frac{\left|\mu_1\right|^3}{\left|r^m-\lambda\right|^3}+\cdots+\frac{\left|\mu_m\right|^3}{\left|r^m-\lambda\right|^3}+3\left(\frac{\left|\left(\mu_1\right)^2\mu_2\right|}{\left|r^m-\lambda\right|^3}+\frac{\left|\left(\mu_1\right)^2\mu_3\right|}{\left|r^m-\lambda\right|^3}+\frac{\left|\left(\mu_2\right)^2\mu_1\right|}{\left|r^m-\lambda\right|^3}+\cdots\right)+\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{\left|r^m-\lambda\right|}\left\{1+\frac{\left|\mu_1\right|+\left|\mu_2\right|+\cdots+\left|\mu_m\right|}{\left|r^m-\lambda\right|}+\left(\frac{\left|\mu_1\right|+\left|\mu_2\right|+\cdots+\left|\mu_m\right|}{\left|r^m-\lambda\right|}\right)^2+\left(\frac{\left|\mu_1\right|+\left|\mu_2\right|+\cdots+\left|\mu_m\right|}{\left|r^m-\lambda\right|}\right)^3+\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{\left|r^m-\lambda\right|-\sum_{i=1}^{m}\left|\mu_i\right|}<\infty$$

elde edilir. Burada $\lambda\notin S$ olduğundan $\dfrac{\sum_{i=1}^{m}\left|\mu_i\right|}{\left|r^m-\lambda\right|}=\dfrac{\left|\mu_1\right|+\left|\mu_2\right|+\cdots+\left|\mu_m\right|}{\left|r^m-\lambda\right|}<1$ dir. Ayrıca m sabit bir doğal sayı olduğundan $i>m$ için $\mu_i=0$ olur. $\left(S_k\right)$ pozitif terimli bir reel sayı

dizisi ve yakınsak olduğundan sınırlıdır yani $\sup_k S_k < \infty$ bulunur. Bu durumda $\lambda \notin S$ için $\left(B^m(r,s)-\lambda I\right)^{-1} \in B(\ell_1)$ olur. Böylece $\sigma(B^m(r,s),\ell_1) \subseteq S$ elde edilir.

Tersini ispatlamak için $\lambda \in S$ kabul edelim.

$\lambda \neq r^m$ ve $\left|r^m-\lambda\right| = \sum_{i=1}^{m}\left|\binom{m}{i} r^{m-i}s^i\right|$ olsun. $B^m(r,s)-\lambda I$ üçgen matris olduğundan tersi vardır. olsun. Bu durumda $\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{|\mu_1|+|\mu_2|+\cdots+|\mu_m|}{\left|r^m-\lambda\right|}\right)^p$ serisi ıraksar. Bu da $\left(B^m(r,s)-\lambda I\right)^{-1}$ matrisinde normun sınırsızlığını getirir ve $\left(B^m(r,s)-\lambda I\right)^{-1}$ matrisi ℓ_1 uzayında sınırlı bir lineer dönüşümü temsil etmez.

$\lambda \neq r^m$ ve $\left|r^m-\lambda\right| < \sum_{i=1}^{m}\left|\binom{m}{i} r^{m-i}s^i\right|$ olduğunda ise $p \to \infty$ iken $\left(\frac{|\mu_1|+|\mu_2|+\cdots+|\mu_m|}{\left|r^m-\lambda\right|}\right)^p \to \infty$ olur. Bu durumda da $\lim_k S_k = \infty$ dolayısıyla $\sup_k S_k = \infty$ olduğundan $\left(B^m(r,s)-\lambda I\right)$ matrisi ℓ_1 uzayında sınırlı bir terse sahip değildir.

$\lambda = r^m$ olsun. Bu durumda $B^m(r,s)-\lambda I$ dönüşümü

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ mr^{m-1}s & 0 & 0 & \dots \\ \binom{m}{2} r^{m-2}s^2 & mr^{m-1}s & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

şeklinde olur. Bu dönüşüm ℓ_1 uzayında örten olmadığından tersi yoktur. Yani $r^m \in \sigma\left(B^m(r,s),\ell_1\right)$ dir.

Böylece $\lambda \in S$ iken $\lambda \in \sigma(B^m(r,s),\ell_1)$ elde edilir ve ispat tamamlanır.

Şimdi $B^m(r,s)$ dönüşümü için ℓ_1 uzayında elde ettiğimiz spektrumun alt kümelerini inceleyelim.

Teorem 4.3 $\sigma_p(B^m(r,s),\ell_1)=\varnothing$

İspat $B^m(r,s)x=\lambda x$ denkleminin ℓ_1 uzayında $x=(x_n)\neq 0$ çözümünü veren λ değerlerinin kümesi $B^m(r,s)$ dönüşümünün nokta spektrumudur.

$$\begin{pmatrix} r^m & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ mr^{m-1}s & r^m & 0 & \cdots & \cdots \\ \binom{m}{2}r^{m-2}s^2 & mr^{m-1}s & r^m & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} &(r^m-\lambda)x_0=0 \\ &mr^{m-1}sx_0+(r^m-\lambda)x_1=0 \\ &\binom{m}{2}r^{m-2}s^2x_0+mr^{m-1}sx_1+(r^m-\lambda)x_2=0 \\ &\quad\vdots \\ &\quad\vdots \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir.

$\lambda=r^m$ için bu denklem sistemi çözülürse $x_0=0,x_1=0,x_2=0,\ldots$ elde edilir. Bu da $x=(x_n)\neq 0$ olması ile çelişir. O halde $r^m\notin\sigma_p(B^m(r,s),\ell_1)$.

x_{n_0}, (x_n) dizisinin sıfırdan farklı ilk terimi olsun. Bu durumda $\lambda=r^m$ olur ve $\forall k\in\mathbb{N}$ için $x_{n_0+k}=0$ olacağından $x_{n_0}\neq 0$ kabulü ile çelişir. Sonuç olarak, $x\neq 0$ için $B^m(r,s)x=\lambda x$ lineer denklemini sağlayan λ değeri olmadığından $\sigma_p(B^m(r,s),\ell_1)=\varnothing$ olur.

$T:\ell_1\to\ell_1$, A matrisi ile temsil edilen sınırlı bir lineer dönüşüm ise T nin eşlenik dönüşümü olan $T^*:\ell_1^*\to\ell_1^*$ dönüşümü de A matrisinin transpozu A^t ile temsil edilir. ℓ_1 uzayının dual uzayı ℓ_1^*, $\|x\|=\sup_k|x_k|$ normu ile tanımlı sınırlı dizilerin uzayı olan ℓ_∞ Banach uzayına izometrik izomorftur.

Teorem 4.4 $\sigma_p(B^m(r,s)^*,\ell_1^*)=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\left|\lambda-r^m\right|\le\sum_{i=1}^{m}\left|\binom{m}{i}r^{m-i}s^i\right|\right\}$

İspat ℓ_1 uzayının dual uzayı olan ℓ_∞ uzayında sıfırdan farklı bir $f=(f_k)$ dizisi için $B^m(r,s)^*\ f=\lambda f$ olsun. Bu durumda $B^m(r,s)^*=B^m(r,s)^t$ olduğundan

$$\begin{pmatrix} r^m & mr^{m-1}s & \binom{m}{2}r^{m-2}s^2 & \cdots & s^m & 0 & \cdots \\ 0 & r^m & mr^{m-1}s & \cdots & mrs^{m-1} & s^m & \cdots \\ 0 & 0 & r^m & \cdots & \binom{m}{m-2}r^2s^{m-2} & mrs^{m-1} & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_k \\ \vdots \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_k \\ \vdots \end{pmatrix}$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned}
&\left(r^m-\lambda\right)f_0+mr^{m-1}sf_1+\cdots+s^m f_m=0\\
&\left(r^m-\lambda\right)f_1+mr^{m-1}sf_2+\cdots+s^m f_{m+1}=0\\
&\qquad\vdots\\
&\left(r^m-\lambda\right)f_k+mr^{m-1}sf_{k+1}+\cdots+s^m f_{m+k}=0\\
&\qquad\vdots
\end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümünden f dizisinin genel terimi

$$f_k=\frac{mr^{m-1}sf_{k+1}+\binom{m}{2}r^{m-2}s^2f_{k+2}+\cdots+s^m f_{m+k}}{\lambda-r^m}$$

olarak bulunur.

$\lambda=r^m$ olsun. Bu takdirde $f=(f_0,0,0,\ldots)$ vektörü $B^m(r,s)^*$ dönüşümü için bir özvektör olur. Öyleyse $r^m\in\sigma_p(B^m(r,s)^*,\ell_1^*)$ dir.

$\lambda\neq r^m$ olsun. (f_k) dizisinin limitini alalım.

$$\lim_k |f_k| = \lim_k \left| \frac{mr^{m-1}s}{\lambda - r^m} f_{k+1} + \frac{\binom{m}{2} r^{m-2}s^2}{\lambda - r^m} f_{k+2} \cdots + \frac{s^m}{\lambda - r^m} f_{m+k} \right|$$

$$\leq \frac{|mr^{m-1}s|}{|\lambda - r^m|} \lim_k |f_{k+1}| + \frac{\left|\binom{m}{2} r^{m-2}s^2\right|}{|\lambda - r^m|} \lim_k |f_{k+2}| + \cdots + \frac{|s^m|}{|\lambda - r^m|} \lim_k |f_{m+k}|$$

Eğer $\lim_k |f_k| = l \neq \infty$ ise

$$l \leq \frac{|mr^{m-1}s| + \left|\binom{m}{2} r^{m-2}s^2\right| + \cdots + |s^m|}{|\lambda - r^m|} l$$

$$|\lambda - r^m| \leq \sum_{i=1}^{m} \left| \binom{m}{i} r^{m-i}s^i \right|$$

elde edilir. $\lim_k |f_k| < \infty$ olduğunda $\sup_k |f_k| < \infty$ olacağından $|\lambda - r^m| \leq \sum_{i=1}^{m} \left| \binom{m}{i} r^{m-i}s^i \right|$ durumunda (f_k) dizisinin ℓ_∞ dizi uzayının bir elemanı olduğu görülür ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.5 $\sigma_r(B^m(r,s), \ell_1) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |r^m - \lambda| \leq \sum_{i=1}^{m} \left| \binom{m}{i} r^{m-i}s^i \right| \right\}$

İspat $\lambda \in \sigma_p(B^m(r,s)^*, \ell_1^*) - \sigma_p(B^m(r,s), \ell_1)$ için $B^m(r,s) - \lambda I$ dönüşümü birebirdir ve dolayısıyla tersi vardır. Ancak $B^m(r,s)^* - \lambda I$ dönüşümü birebir değildir. Bu durumda Teorem 2.5 e göre $B^m(r,s) - \lambda I$ dönüşümünün görüntü kümesi ℓ_1 uzayında yoğun değildir. Bu da $\sigma_p(B^m(r,s)^*, \ell_1^*) - \sigma_p(B^m(r,s), \ell_1)$ kümesinin dönüşümün artık spektrumunu oluşturduğunu gösterir.

Teorem 4.6 $\sigma_c(B^m(r,s), \ell_1) = \varnothing$

İspat $\sigma(B^m(r,s), \ell_1) = \sigma_p(B^m(r,s), \ell_1) \cup \sigma_r(B^m(r,s), \ell_1) \cup \sigma_c(B^m(r,s), \ell_1)$

olduğundan Teorem 4.2, Teorem 4.3 ve Teorem 4.5 kullanılarak sonuç elde edilir.

BÖLÜM 5

$G(u,v,B^m)$ DÖNÜŞÜMÜNÜN c_0, c ve ℓ_1 UZAYLARINDAKİ SPEKTRUMU

5.1 $m.$ Dereceden Genelleştirilmiş Ağırlıklı Fark Matrisi

Bu bölümde, $G(u,v)$ genelleştirilmiş ağırlıklı ortalama matrisi olmak üzere $G(u,v)\cdot B^m$ matris çarpımından elde edilen $m.$dereceden genelleştirilmiş ağırlıklı fark matrisi $G(u,v;B^m)$ ile gösterilmiştir.

Bu matrisin terimleri

$$G(u,v;B^m)=g_{nk}=\begin{cases} u_n\sum_{i=k}^{n} v_i\binom{m}{i-k}r^{m-i+k}s^{i-k}, & \left(\max\{0,n-m\}\le k\le n\right)\\ u_n\sum_{i=k}^{m+k} v_i\binom{m}{i-k}r^{m-i+k}s^{i-k}, & \left(0\le k<\max\{0,n-m\}\right)\\ 0, & k>n \end{cases}$$

olarak ifade edilir ve matris gösterilimi

$$\begin{pmatrix} u_0v_0r^m & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ u_1\sum_{i=0}^{1} v_i \binom{m}{i} r^{m-i}s^i & u_1v_1r^m & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_m\sum_{i=0}^{m} v_i \binom{m}{i} r^{m-i}s^i & u_m\sum_{i=1}^{m-1} v_i \binom{m}{i-1} r^{m-i+1}s^{i-1} & \dots & u_mv_mr^m & 0 & \dots \\ u_{m+1}\sum_{i=0}^{m} v_i \binom{m}{i} r^{m-i}s^i & u_{m+1}\sum_{i=1}^{m} v_i \binom{m}{i-1} r^{m-i+1}s^{i-1} & \dots & u_{m+1}\sum_{i=m}^{m+1} v_i \binom{m}{i-m} r^{2m-i}s^{i-m} & u_{m+1}v_{m+1}r^m & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Burada, $u=(u_n)_{n=0}^{\infty}, v=(v_k)_{k=0}^{\infty}$ dizileri pozitif terimli, sınırlı ve kesin azalan, kesin artan ya da sabit olabilen reel sayı dizileridir. Ayrıca, monoton bir dizinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart sınırlı olması olduğundan bu diziler yakınsaktır. Yani

$$\lim u_n = U$$
$$\lim v_k = V$$

mevcuttur. Bu çalışmada sadece

$$\lim u_n = U > 0$$
$$\lim v_k = V > 0$$

durumlarında spektrum incelemesi yapılmıştır.

(u_n) ve (v_k) dizilerinin kesin artan, kesin azalan ya da sabit olma durumlarına göre $G(u,v;B^m)$ matrisi dizi uzayları üzerinde her zaman bir sınırlı lineer dönüşüme karşılık gelmeyebilir. Bu nedenle r ve s reel değerleri de göz önünde bulundurularak bu matrisin dizi uzayları üzerinde matris dönüşümü şartlarını sağlayabilmesi için uygun koşullardaki (u_n) ve (v_k) dizileri seçilmelidir.

5.2 $G(u,v;B^m)$ Dönüşümünün c_0 ve c Uzayı Üzerinde Spektrumu

Bu bölümde $G(u,v;B^m)$ matrisinin c_0 uzayı üzerinde spektral değerleri araştırılacaktır. Bunun için öncelikle Teorem 2.9 da verilen şartlara göre $G(u,v;B^m)\in(c_0,c_0)$ matris

dönüşümünün hangi koşullarda sağlandığı belirlenmelidir. $G(u,v;B^m)$ matrisinin c_0 dizi uzayından yine bu uzaya tanımlı bir sınırlı lineer dönüşüm olması için gerekli şartlar (v_k) dizisinin durumlarına göre aşağıdaki tabloda verilmiştir

Çizelge 5.1 $G(u,v;B^m)$ matrisinin $B(c_0)$ olma şartları

(v_k)	r,s	(u_n)	Şartlar	$G(u,v;B^m)\in B(c_0)$
Sabit	$r+s=0$	Kesin azalan	-	✓
		Sabit	-	✓
		Kesin artan	-	✓
Sabit	$r+s\neq 0$	Kesin azalan	$(u_n)\in c_0$	✓
		Sabit		×
		Kesin artan		×
Kesin artan ya da kesin azalan	$\forall k\in\mathbb{N}$ $\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}r^{m-i}s^m v_{k+i}=0$	Kesin azalan	-	✓
		Sabit	-	✓
		Kesin artan	-	✓
Kesin artan ya da kesin azalan	$\exists k\in\mathbb{N}$ $\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}r^{m-i}s^m v_{k+i}\neq 0$	Kesin azalan	$(u_n)\in c_0$	✓
		Sabit		×
		Kesin artan		×

Tabloya göre, r ve s reel sayıları da dikkate alınarak (v_k) dizisinin sabit, kesin artan veya kesin azalan olduğu durumların herbiri için $G(u,v;B^m)$ matrisinin c_0 uzayında sınırlı lineer dönüşüme karşılık geldiği 4 durum olduğu görülür. Örneğin, (v_k) sabit iken r ve s reel sayılarının zıt işaretli olmadığı durumlarda (u_n) dizisi sabit veya kesin artan olursa c_0 uzayı üzerinde matris dönüşümü şartları sağlanmaz.

Teorem 5.1 Teorem 2.9 a göre $G(u,v;B^m)$ dönüşümümünün c_0 uzayında

$$\left\|G(u,v;B^m)\right\|_{(c_0,c_0)}=\sup_n\sum_{k=0}^{n}u_n\sum_{i=0}^{n-k}\left|\binom{m}{i}r^{m-i}s^i v_{i+k}\right|$$

normuna sahip olması gerekir.

Çizelge 5.1 deki farklı durumlara bu normun alacağı değerler incelenmiş ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

a) (v_k) dizisi sabit olsun. Bu durumda $r+s=0$ iken

(u_n) dizisi kesin azalan ise ; $\left\|G(u,v;B^m)\right\|_{(c_0,c_0)} = \sup_n \sum_{k=n-m+1}^{n} \left| u_n v \sum_{i=0}^{n-k} \binom{m}{i} r^{m-i} s^i \right|$

(u_n) dizisi sabit ise ; $\left\|G(u,v;B^m)\right\|_{(c_0,c_0)} = \sum_{k=n-m+1}^{n} \left| uv \sum_{i=0}^{n-k} \binom{m}{i} r^{m-i} s^i \right|$

(u_n) dizisi kesin artan ise ; $\left\|G(u,v;B^m)\right\|_{(c_0,c_0)} = \sup_n \sum_{k=n-m+1}^{n} \left| u_n v \sum_{i=0}^{n-k} \binom{m}{i} r^{m-i} s^i \right|$

$r+s\neq 0$ iken $(u_n)\in c_0$ ve

$$\left\|G(u,v;B^m)\right\|_{(c_0,c_0)} = \sup_n u_n v \left[(n-m+1)(r+s)^m + \sum_{k=n-m+1}^{n} \sum_{i=0}^{n-k} \left| \binom{m}{i} r^{m-i} s^i \right| \right]$$

şeklindedir.

b) (v_k) dizisi kesin artan olsun. Bu durumda $\forall k\in\mathbb{N},\ \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} r^{m-i} s^i v_{k+i} = 0$ iken

(u_n) dizisi kesin azalan ise ; $\left\|G(u,v;B^m)\right\|_{(c_0,c_0)} = \sup_n \sum_{k=n-m+1}^{n} \left| u_n \sum_{i=0}^{n-k} \binom{m}{i} r^{m-i} s^i v_{i+k} \right|$

(u_n) dizisi sabit ise ; $\left\|G(u,v;B^m)\right\|_{(c_0,c_0)} = uV \sum_{k=n-m+1}^{n} \sum_{i=0}^{n-k} \left| \binom{m}{i} r^{m-i} s^i \right|$

(u_n) dizisi kesin artan ise ; $\left\|G(u,v;B^m)\right\|_{(c_0,c_0)} = UV \sum_{k=n-m+1}^{n} \sum_{i=0}^{n-k} \left| \binom{m}{i} r^{m-i} s^i \right|$

$\exists k\in\mathbb{N},\ \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} r^{m-i} s^i v_{k+i} \neq 0$ iken $(u_n)\in c_0$ ve

$$\left\|G(u,v;B^m)\right\|_{(c_0,c_0)} = \sup_n u_n \left[(n-m+1) \sum_{i=0}^{m} \left| \binom{m}{i} r^{m-i} s^i v_{i+k} \right| + \sum_{k=n-m+1}^{n} \sum_{i=0}^{n-k} \left| \binom{m}{i} r^{m-i} s^i v_{i+k} \right| \right]$$

şeklindedir.

c) (v_k) dizisi kesin azalan olsun. $\forall k\in\mathbb{N},\ \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} r^{m-i} s^i v_{k+i} = 0$ iken

(u_n) dizisi kesin azalan ise ; $$\left\|G(u,v;B^m)\right\|_{(c_0,c_0)}=\sum_{k=0}^{m-1}\left|u_{m-1}\sum_{i=0}^{m-1-k}\binom{m}{i}r^{m-i}s^{i}v_{i+k}\right|$$

(u_n) dizisi sabit ise ; $$\left\|G(u,v;B^m)\right\|_{(c_0,c_0)}=\sum_{k=0}^{m-1}\left|u\sum_{i=0}^{m-1-k}\binom{m}{i}r^{m-i}s^{i}v_{i+k}\right|$$

(u_n) dizisi kesin artan ise ; $$\left\|G(u,v;B^m)\right\|_{(c_0,c_0)}=\sup_n\sum_{k=n-m+1}^{n}\left|u_n\sum_{i=0}^{n-k}\binom{m}{i}r^{m-i}s^{i}v_{i+k}\right|$$

$\exists k\in\mathbb{N},\ \sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}r^{m-i}s^{i}v_{k+i}\neq 0$ iken $(u_n)\in c_0$ ve

$$\left\|G(u,v;B^m)\right\|_{(c_0,c_0)}=\sup_n u_n\left[(n-m+1)\sum_{i=0}^{m}\left|\binom{m}{i}r^{m-i}s^{i}v_{i+k}\right|+\sum_{k=n-m+1}^{n}\sum_{i=0}^{n-k}\left|\binom{m}{i}r^{m-i}s^{i}v_{i+k}\right|\right]$$

şeklindedir.

Teorem 5.2 $\alpha_j=\sum_{i=0}^{j}\binom{m}{i}r^{m-i}s^{i}$ olmak üzere

$$\sigma(G(u,v;B^m),c_0)=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\left|r^m-\frac{\lambda}{UV}\right|\leq\sum_{j=1}^{m-1}\left|\alpha_j\right|\right\}\cup\left\{r^m u_t v_t, t\in\mathbb{N}\right\}=S$$

İspat. Teoremin ispatı için öncelikle $\sigma(G(u,v;B^m),c_0)\subseteq S$ veya buna denk olarak $\lambda\notin S$ iken $\lambda\notin\sigma(G(u,v;B^m),c_0)$ yani $\lambda\in\rho\left(G\left(u,v;B^m\right),c_0\right)$ olduğu gösterilecektir. İkinci olarak ise $S\subseteq\sigma(G(u,v;B^m),c_0)$ olduğu yani S kümesindeki λ değerleri için $\left(G(u,v;B^m)-\lambda I\right)$ operatörünün sınırlı bir terse sahip olmadığı gösterilecektir.

$\lambda\notin S$ kabul edelim. Bu durumda, $\left(G(u,v;B^m)-\lambda I\right)$ üçgen matris olduğundan tersi vardır.

$$\left(G(u,v;B^m)-\lambda I\right)\left(G(u,v;B^m)-\lambda I\right)^{-1}=I$$

eşitliğinden $\left(G(u,v;B^m)-\lambda I\right)^{-1}=\left(t_{nk}\right)$ ters dönüşümü

$$(t_{nk}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r^m u_0 v_0 - \lambda} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -\frac{u_1\left(v_0 r^m + v_1 m r^{m-1} s\right)}{(u_0 v_0 r^m - \lambda)(u_1 v_1 r^m - \lambda)} & \frac{1}{r^m u_1 v_1 - \lambda} & 0 & 0 & \cdots \\ t_{20} & -\frac{u_2\left(v_1 r^m + v_2 m r^{m-1} s\right)}{(u_1 v_1 r^m - \lambda)(u_2 v_2 r^m - \lambda)} & \frac{1}{r^m u_2 v_2 - \lambda} & 0 & \cdots \\ t_{30} & t_{31} & t_{32} & \frac{1}{r^m u_3 v_3 - \lambda} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Burada

$$t_{20} = -\frac{u_2\left(v_0 r^m + v_1 m r^{m-1} s + v_2 \binom{m}{2} r^{m-2} s^2\right)}{(u_0 v_0 r^m - \lambda)(u_2 v_2 r^m - \lambda)} + \frac{u_1\left(v_0 r^m + v_1 m r^{m-1} s\right) u_2\left(v_1 r^m + v_2 m r^{m-1} s\right)}{(u_0 v_0 r^m - \lambda)(u_1 v_1 r^m - \lambda)(u_2 v_2 r^m - \lambda)}$$

$$= -\frac{u_2 \sum_{i=0}^{2} v_i \binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{\left(u_0 v_0 r^m - \lambda\right)\left(u_2 v_2 r^m - \lambda\right)} + \frac{u_1 \sum_{i=0}^{1} v_i \binom{m}{i} r^{m-i} s^i \; u_2 \sum_{i=0}^{1} v_{i+1} \binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{\left(u_0 v_0 r^m - \lambda\right)\left(u_1 v_1 r^m - \lambda\right)\left(u_2 v_2 r^m - \lambda\right)}$$

$$t_{30} = -\frac{u_3 \sum_{i=0}^{3} v_i \binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{\left(u_0 v_0 r^m - \lambda\right)\left(u_3 v_3 r^m - \lambda\right)} + \frac{u_1 \sum_{i=0}^{1} v_i \binom{m}{i} r^{m-i} s^i \; u_3 \sum_{i=0}^{2} v_{i+1} \binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{\left(u_0 v_0 r^m - \lambda\right)\left(u_1 v_1 r^m - \lambda\right)\left(u_3 v_3 r^m - \lambda\right)}$$

$$+ \frac{u_2 \sum_{i=0}^{2} v_i \binom{m}{i} r^{m-i} s^i \; u_3 \sum_{i=0}^{1} v_{i+2} \binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{\left(u_0 v_0 r^m - \lambda\right)\left(u_2 v_2 r^m - \lambda\right)\left(u_3 v_3 r^m - \lambda\right)}$$

$$- \frac{u_1 \sum_{i=0}^{1} v_i \binom{m}{i} r^{m-i} s^i \; u_2 \sum_{i=0}^{1} v_{i+1} \binom{m}{i} r^{m-i} s^i \; u_3 \sum_{i=0}^{1} v_{i+2} \binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{\left(u_0 v_0 r^m - \lambda\right)\left(u_1 v_1 r^m - \lambda\right)\left(u_2 v_2 r^m - \lambda\right)\left(u_3 v_3 r^m - \lambda\right)}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

şeklinde devam eder.

Genel olarak ters dönüşümün terimleri

$$t_{nn} = \frac{1}{u_n v_n r^m - \lambda}$$

$$t_{n,n-1} = -\frac{u_n \sum_{i=0}^{1} v_{i+n-1} \binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{(u_n v_n r^m - \lambda)(u_{n-1} v_{n-1} r^m - \lambda)}$$

$$t_{n,n-2} = -\frac{u_n \sum_{i=0}^{2} v_{i+n-2} \binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{(u_n v_n r^m - \lambda)(u_{n-2} v_{n-2} r^m - \lambda)} + \frac{u_n \sum_{i=0}^{1} v_{i+n-1} \binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{(u_n v_n r^m - \lambda)(u_{n-1} v_{n-1} r^m - \lambda)} \cdot \frac{u_{n-1} \sum_{i=0}^{1} v_{i+n-2} \binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{(u_{n-2} v_{n-2} r^m - \lambda)}$$

$\vdots$

$\vdots$

$$t_{n2} = -\frac{u_n \sum_{i=0}^{n-1} v_{i+2} \binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{(u_n v_n r^m - \lambda)(u_2 v_2 r^m - \lambda)} + \cdots$$

$$t_{n1} = -\frac{u_n \sum_{i=0}^{n-1} v_{i+1} \binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{(u_n v_n r^m - \lambda)(u_1 v_1 r^m - \lambda)} + \frac{u_n \sum_{i=0}^{n-2} v_{i+2} \binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{(u_n v_n r^m - \lambda)(u_2 v_2 r^m - \lambda)} \cdot \frac{u_2 \sum_{i=0}^{1} v_{i+1} \binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{(u_1 v_1 r^m - \lambda)} + \cdots$$

$$t_{n0} = -\frac{u_n \sum_{i=0}^{n} v_i \binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{(u_n v_n r^m - \lambda)(u_0 v_0 r^m - \lambda)} + \frac{u_n \sum_{i=0}^{n-1} v_{i+1} \binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{(u_n v_n r^m - \lambda)(u_1 v_1 r^m - \lambda)} \cdot \frac{u_1 \sum_{i=0}^{1} v_i \binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{(u_0 v_0 r^m - \lambda)}$$

$$- \frac{u_n \sum_{i=0}^{n-2} v_{i+2} \binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{(u_n v_n r^m - \lambda)(u_2 v_2 r^m - \lambda)} \cdot \frac{u_2 \sum_{i=0}^{1} v_{i+1} \binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{(u_1 v_1 r^m - \lambda)} \cdot \frac{u_1 \sum_{i=0}^{1} v_i \binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{(u_0 v_0 r^m - \lambda)} + \cdots$$

eşitlikleriyle ifade edilebilir. Burada her bir $n,k \in \mathbb{N}_0$ için $|t_{nk}| < \infty$ dir. Şimdi $\left(G(u,v;B^m) - \lambda I\right)^{-1}$ matrisinin c_0 uzayı üzerinde sınırlı bir lineer dönüşüme karşılık geldiğini yani

$$\left\| G(u,v;B^m)^{-1} \right\|_{(c_0:c_0)} = \sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |t_{nk}| < \infty$$

olduğunu göstereceğiz.

$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} |t_{nk}|$ alalım. Bu durumda

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} |t_{nk}| = |t_{n0}| + |t_{n1}| + \cdots + |t_{n,n-2}| + |t_{n,n-1}| + |t_{nn}| = |t_{nn}| + |t_{n,n-1}| + |t_{n,n-2}| + \cdots + |t_{n1}| + |t_{n0}|$$

$$= \frac{1}{|u_n v_n r^m - \lambda|} + \left| - \frac{u_n \sum_{i=0}^{1} v_{i+n-1} \binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{(u_n v_n r^m - \lambda)(u_{n-1} v_{n-1} r^m - \lambda)} \right| +$$

$$\left| - \frac{u_n \sum_{i=0}^{2} v_{i+n-2} \binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{(u_n v_n r^m - \lambda)(u_{n-2} v_{n-2} r^m - \lambda)} + \frac{u_n \sum_{i=0}^{1} v_{i+n-1} \binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{(u_n v_n r^m - \lambda)(u_{n-1} v_{n-1} r^m - \lambda)} \cdot \frac{u_{n-1} \sum_{i=0}^{1} v_{i+n-2} \binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{(u_{n-2} v_{n-2} r^m - \lambda)} \right| + \cdots$$

şeklindedir. Şimdi n üzerinden limit alınıp üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{r^m u_n v_n - \lambda} \right| + \lim_{n\to\infty} \left| - \frac{u_n \sum_{i=0}^{1} v_{i+n-1} \binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{(u_n v_n r^m - \lambda)(u_{n-1} v_{n-1} r^m - \lambda)} \right| + \cdots +$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| - \frac{u_n \sum_{i=0}^{n} v_i \binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{(u_n v_n r^m - \lambda)(u_0 v_0 r^m - \lambda)} + \frac{u_n \sum_{i=0}^{n-1} v_{i+1} \binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{(u_n v_n r^m - \lambda)(u_0 v_0 r^m - \lambda)} \cdot \frac{u_1 \sum_{i=0}^{1} v_i \binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{(u_1 v_1 r^m - \lambda)} - \cdots \right| + \cdots$$

$$\leq \frac{1}{|UVr^m - \lambda|} \left\{ 1 + \frac{|UV\alpha_1|}{|UVr^m - \lambda|} + \frac{|UV\alpha_2|}{|UVr^m - \lambda|} + \frac{|UV\alpha_1|^2}{|UVr^m - \lambda|^2} + \frac{|UV\alpha_3|}{|UVr^m - \lambda|} + 2\frac{|U^2V^2\alpha_1\alpha_2|}{|UVr^m - \lambda|^2} + \frac{|UV\alpha_1|^3}{|UVr^m - \lambda|^3} + \right.$$

$$\left. \frac{|UV\alpha_4|}{|UVr^m - \lambda|} + 3\frac{|U^3V^3\alpha_1^2\alpha_2|}{|UVr^m - \lambda|^2} + \frac{|UV\alpha_2|^2}{|UVr^m - \lambda|^2} + 2\frac{|U^2V^2\alpha_1\alpha_3|}{|UVr^m - \lambda|^2} + \frac{|UV\alpha_1|^4}{|UVr^m - \lambda|^4} + \cdots \right\}$$

$$= \frac{1}{\left|UVr^m - \lambda\right|}\left\{1 + \frac{\left|UV\alpha_1\right|}{\left|UVr^m - \lambda\right|} + \frac{\left|UV\alpha_2\right|}{\left|UVr^m - \lambda\right|} + \cdots + \frac{\left|UV\alpha_{m-1}\right|}{\left|UVr^m - \lambda\right|} + \right.$$

$$\frac{\left|UV\alpha_1\right|^2}{\left|UVr^m - \lambda\right|^2} + \cdots + \frac{\left|UV\alpha_{m-1}\right|^2}{\left|UVr^m - \lambda\right|^2} + 2\frac{\left|U^2V^2\alpha_1\alpha_2\right|}{\left|UVr^m - \lambda\right|^2} + 2\frac{\left|U^2V^2\alpha_1\alpha_3\right|}{\left|UVr^m - \lambda\right|^2} + 2\frac{\left|U^2V^2\alpha_2\alpha_3\right|}{\left|UVr^m - \lambda\right|^2} + \cdots$$

$$\left. \frac{\left|UV\alpha_1\right|^3}{\left|UVr^m - \lambda\right|^3} + \cdots + \frac{\left|UV\alpha_{m-1}\right|^3}{\left|UVr^m - \lambda\right|^3} + 3\frac{\left|U^3V^3\alpha_1{}^2\alpha_2\right|}{\left|UVr^m - \lambda\right|^3} + 3\frac{\left|U^3V^3\alpha_1{}^2\alpha_3\right|}{\left|UVr^m - \lambda\right|^3} + 3\frac{\left|U^3V^3\alpha_2{}^2\alpha_3\right|}{\left|UVr^m - \lambda\right|^2} + \cdots \right\}$$

elde edilir. Burada $\frac{\left|UV\right|}{\left|r^mUV - \lambda\right|} = \beta$ alınarak eşitsizlik düzenlenirse

$$\lim_n S_n \le \frac{1}{\left|r^mUV - \lambda\right|}\left\{1 + \left|\beta\alpha_1\right| + \left|\beta\alpha_2\right| + \left|\beta\alpha_3\right| + \cdots \right.$$

$$+ \left|\beta\alpha_1\right|^2 + \left|\beta\alpha_2\right|^2 + \left|\beta\alpha_3\right|^2 + \cdots + 2\left|\beta^2\alpha_1\alpha_2\right| + 2\left|\beta^2\alpha_1\alpha_3\right| + 2\left|\beta^2\alpha_2\alpha_3\right| + \cdots$$

$$\left. + \left|\beta\alpha_1\right|^3 + \left|\beta\alpha_2\right|^3 + \left|\beta\alpha_3\right|^3 + \cdots + 3\left|\beta^3\alpha_1{}^2\alpha_2\right| + 3\left|\beta^3\alpha_1{}^2\alpha_3\right| + 3\left|\beta^3\alpha_2{}^2\alpha_3\right| + \cdots \right\}$$

$$= \frac{1}{\left|r^mUV - \lambda\right|}\left\{1 + \left|\beta\alpha_1\right| + \left|\beta\alpha_2\right| + \cdots \left|\beta\alpha_{m-1}\right| + \left(\left|\beta\alpha_1\right| + \left|\beta\alpha_2\right| + \cdots \left|\beta\alpha_{m-1}\right|\right)^2 \right.$$

$$\left. + \left(\left|\beta\alpha_1\right| + \left|\beta\alpha_2\right| + \cdots \left|\beta\alpha_{m-1}\right|\right)^3 + \cdots \right\}$$

$$= \frac{1}{\left|r^mUV - \lambda\right|} \cdot \frac{1}{1 - \left(\left|\beta\alpha_1\right| + \left|\beta\alpha_2\right| + \cdots \left|\beta\alpha_{m-1}\right|\right)} = \frac{1}{\left|r^mUV - \lambda\right| - \left|UV\right|\sum_{j=1}^{m-1}\left|\beta\alpha_j\right|} < \infty$$

olduğu görülür. Burada $\left|\beta\right|\sum_{j=1}^{m-1}\left|\alpha_j\right| = \frac{\left|UV\right|}{\left|r^mUV - \lambda\right|}\sum_{j=1}^{m-1}\left|\alpha_j\right| < 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{m-1}\left|\alpha_j\right| < \left|r^m - \frac{\lambda}{UV}\right|$ dir.

Ayrıca $\left(v_k\right)$ dizisi sabit ise $r + s = 0$ durumundan, $\left(v_k\right)$ dizisi kesin artan veya kesin azalan ise $\forall k \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i} r^{m-i}s^i v_{k+i} = 0$ durumundan dolayı $\alpha_m = 0$ olur. m sabit bir doğal sayı olduğundan $j \ge m$ için $\alpha_j = \alpha_m = 0$ sonucu elde edilir.

$\left(S_n\right)$ pozitif reel sayı dizisi olduğundan $\lim_n S_n < \infty$ olması $\sup_n S_n < \infty$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla $\lambda \notin S$ şartıyla birlikte $\left(G(u,v;B^m) - \lambda I\right)^{-1} \in B\left(c_0\right)$ elde edilir. Böylece $\sigma(G(u,v;B^m), c_0) \subseteq S$ olduğu görülür.

Şimdi $\lambda \in S$ alalım. Herbir $t \in \mathbb{N}$ için $\lambda \neq r^m u_t v_t$ ve $\left| r^m - \frac{\lambda}{UV} \right| \leq \sum_{j=1}^{m-1} |\alpha_j|$ olsun.

$\lambda \neq r^m UV$ ve $\lambda = r^m UV$ durumları karşımıza çıkar. Öncelikle $\lambda \neq r^m UV$ alalım. Bu durumda $G(u,v;B^m) - \lambda I$ üçgen matris olduğundan tersi vardır.

$\left| r^m - \frac{\lambda}{UV} \right| = \sum_{j=1}^{m-1} |\alpha_j|$ yani $\left| r^m UV - \lambda \right| = |UV| \sum_{j=1}^{m} |\alpha_j|$ ise $\sum_{q=1}^{\infty} \left| \frac{UV\left(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_{m-1}|\right)}{r^m UV - \lambda} \right|^q$ serisi ıraksar. Böylece $\lim_n S_n = \infty$ dolayısıyla $\sup_n S_n = \infty$ olduğundan $\left(G(u,v;B^m) - \lambda I\right)^{-1} \notin B(c_0)$ elde edilir.

$\left| r^m - \frac{\lambda}{UV} \right| < \sum_{j=1}^{m-1} |\alpha_j|$ ise $q \to \infty$ iken $\left| \frac{UV\left(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_{m-1}|\right)}{r^m UV - \lambda} \right| \to \infty$ olur. Bu da (S_n) dizisinin sınırsızlığını getirir. Bu durumda da $G(u,v;B^m) - \lambda I$ matrisinin c_0 uzayında sınırlı bir tersi yoktur.

$\lambda = r^m UV$ ise $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{r^m u_n v_n - \lambda} = \frac{1}{r^m UV - \lambda}$ sınırsız olacağından dönüşüm normu sınırsız olur.

Son olarak her $t \in \mathbb{N}$ için $\lambda = r^m u_t v_t$ kabulü altında $\left(G(u,v;B^m) - \lambda I\right)$ matrisinin tersini inceleyeceğiz.

$$\left(G(u,v;B^m) - \lambda I\right)x = \begin{pmatrix} \left(u_0 v_0 r^m - \lambda\right)x_0 \\ u_1\left[v_0 r^m + v_1 m r^{m-1} s\right]x_0 + \left(u_1 v_1 r^m - \lambda\right)x_1 \\ u_2\left[v_0 r^m + v_1 m r^{m-1} s + v_2 \binom{m}{2} r^{m-2} s^2\right]x_0 + u_2\left[v_1 r^m + v_2 m r^{m-1} s\right]x_1 + \left(u_2 v_2 r^m - \lambda\right)x_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$\lambda = r^m u_0 v_0$ için $G(u,v;B^m) - \lambda I : c_0 \to c_0$ örten değildir. Dolayısıyla tersi yoktur.

$t \neq 0$ için $\lambda = r^m u_t v_t$ olsun. Bu durumda, Teorem 2.7 e göre $G(u,v;B^m) - \lambda I$ matrisi üçgen matris olmadığından tersi yoktur.

Böylece $S \subseteq \sigma\left(G(u,v;B^m), c_0\right)$ elde edilmiş olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 5.3 (u_n) ve (v_k) dizileri yakınsak olduğundan Teorem 2.8 e göre $G(u,v;B^m)$ matrisi c dizi uzayı üzerinde her zaman sınırlı bir lineer dönüşüme karşılık gelir ve dönüşüm normu

$$\left\|G(u,v;B^m)\right\|_{(c,c)} = \sup_n \sum_{k=0}^{n} u_n \sum_{i=0}^{n-k} \left| \binom{m}{i} r^{m-i} s^i v_{i+k} \right|$$

şeklindedir.

Çizelge 5.2 $G(u,v;B^m)$ matrisinin $B(c)$ olma şartları

(v_k)	r,s	(u_n)	Şartlar	$G(u,v;B^m) \in B(c)$
Sabit	$r+s=0$	Kesin azalan	-	✓
		Sabit	-	✓
		Kesin artan	-	✓
Sabit	$r+s\neq 0$	Kesin azalan	-	✓
		Sabit	-	✓
		Kesin artan	-	✓
Kesin artan ya da kesin azalan	$\forall k$ $r^m v_k + \cdots + s^m v_{m+k} = 0$	Kesin azalan	-	✓
		Sabit	-	✓
		Kesin artan	-	✓
Kesin artan ya da kesin azalan	$\exists k$ $r^m v_k + \cdots + s^m v_{m+k} \neq 0$	Kesin azalan	-	✓
		Sabit	-	✓
		Kesin artan	-	✓

Aşağıdaki teoremin ispatı Teorem 5.2 ile benzer olduğundan verilmedi.

Teorem 5.4 $\alpha_j = \sum_{i=0}^{j} \binom{m}{i} r^{m-i} s^i$ olmak üzere

$$\sigma(G(u,v;B^m),c) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \left| r^m - \frac{\lambda}{UV} \right| \leq \sum_{j=1}^{m-1} |\alpha_j| \right\} \cup \left\{ r^m u_t v_t, t \in \mathbb{N} \right\} = S$$

5.3 $G(u,v;B^m)$ Dönüşümünün ℓ_1 Uzayı Üzerinde Spektrumu

Çalışmanın bu bölümünde $G(u,v,B^m)$ dönüşümünün ℓ_1 dizi uzayı üzerindeki spektrumu elde edilmiştir. Bunun için Teorem 2.10 a göre, (u_n) ve (v_k) dizilerinin kesin artan, sabit ya da kesin azalan durumları dikkate alınarak $G(u,v,B^m)$ matrisinin ℓ_1 dizi uzayı üzerinde bir lineer dönüşüme karşılık gelmesi için gerekli şartlar tablo halinde verilmiştir.

Çizelge 5.3 $G(u,v;B^m)$ matrisinin $B(\ell_1)$ olma şartları

(v_k)	r,s	(u_n)	Şartlar	$G(u,v;B^m)\in B(\ell_1)$
Sabit	$r+s=0$	Kesin azalan	-	✓
		Sabit	-	✓
		Kesin artan	-	✓
Sabit	$r+s\neq 0$	Kesin azalan	$(u_n)\in\ell_1$	✓
		Sabit		×
		Kesin artan		×
Kesin artan ya da kesin azalan	$\forall k\in\mathbb{N}$ $\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}r^{m-i}s^m v_{k+i}=0$	Kesin azalan	-	✓
		Sabit	-	✓
		Kesin artan	-	✓
Kesin artan ya da kesin azalan	$\exists k\in\mathbb{N}$ $\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}r^{m-i}s^m v_{k+i}\neq 0$	Kesin azalan	$(u_n)\in\ell_1$	✓
		Sabit		×
		Kesin artan		×

Teorem 5.5 Teorem 2.10 da verilen şartlara göre $G(u,v;B^m)\in(\ell_1,\ell_1)$ matris dönüşümü için

$$\left\|G(u,v;B^m)\right\|_{(\ell_1,\ell_1)}=\sup_k\sum_{j=0}^{m-1}\left|u_{k+j}\right|\sum_{i=0}^{j}\left|\binom{m}{i}r^{m-i}s^i v_{i+k}\right|+\sum_{j=m}^{\infty}\left|u_{j+k}\right|\sum_{i=0}^{m}\left|\binom{m}{i}r^{m-i}s^i v_{i+k}\right|$$

normuna sahip olması gerekir.

Çizelge 5.2 deki farklı durumlara göre $G(u,v;B^m)$ dönüşümünün normunun alacağı değerler aşağıdaki gibidir:

a) (v_k) dizisi sabit olsun. Bu durumda $r+s=0$ iken

(u_n) dizisi kesin azalan ise ; $\left\|G(u,v;B^m)\right\|_{(\ell_1,\ell_1)} = \sum_{j=0}^{m-1}|u_j v|\sum_{i=0}^{j}\left|\binom{m}{i}r^{m-i}s^i\right|$

(u_n) dizisi sabit ise ; $\left\|G(u,v;B^m)\right\|_{(\ell_1,\ell_1)} = uv\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{j}\left|\binom{m}{i}r^{m-i}s^i\right|$

(u_n) dizisi kesin artan ise ; $\left\|G(u,v;B^m)\right\|_{(\ell_1,\ell_1)} = Uv\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{j}\left|\binom{m}{i}r^{m-i}s^i\right|$

$r+s\neq 0$ iken $(u_n)\in\ell_1$ ve

$$\left\|G(u,v;B^m)\right\|_{(\ell_1,\ell_1)} = \sum_{j=0}^{m-1}|u_j v|\sum_{i=0}^{j}\left|\binom{m}{i}r^{m-i}s^i\right| + \left|(r+s)^m\right|\sum_{j=m}^{\infty}|u_j v|$$

şeklindedir.

b) (v_k) dizisi kesin artan olsun. Bu durumda $\forall k\in\mathbb{N},\ \sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}r^{m-i}s^i v_{k+i}=0$ iken

(u_n) dizisi kesin azalan ise ; $\left\|G(u,v;B^m)\right\|_{(\ell_1,\ell_1)} = \sup_k\sum_{j=0}^{m-1}|u_{k+j}|\sum_{i=0}^{j}\left|\binom{m}{i}r^{m-i}s^i v_{i+k}\right|$

(u_n) dizisi sabit ise ; $\left\|G(u,v;B^m)\right\|_{(\ell_1,\ell_1)} = uV\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{j}\left|\binom{m}{i}r^{m-i}s^i\right|$

(u_n) dizisi kesin artan ise ; $\left\|G(u,v;B^m)\right\|_{(\ell_1,\ell_1)} = UV\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{j}\left|\binom{m}{i}r^{m-i}s^i\right|$

$\exists k\in\mathbb{N},\ \sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}r^{m-i}s^i v_{k+i}\neq 0$ iken $(u_n)\in\ell_1$ ve

$$\left\|G(u,v;B^m)\right\|_{(\ell_1,\ell_1)} = \sup_k\sum_{j=0}^{m-1}|u_{k+j}|\sum_{i=0}^{j}\left|\binom{m}{i}r^{m-i}s^i v_{i+k}\right| + \sum_{j=m}^{\infty}|u_{k+j}|\sum_{i=0}^{m}\left|\binom{m}{i}r^{m-i}s^i v_{i+k}\right|$$

şeklindedir.

c) (v_k) dizisi kesin azalan olsun. $\forall k \in \mathbb{N},\ \sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i} r^{m-i}s^i v_{k+i} = 0$ iken

(u_n) dizisi kesin azalan ise ; $\left\|G(u,v;B^m)\right\|_{(\ell_1,\ell_1)} = \sum_{j=0}^{m-1}|u_j|\sum_{i=0}^{j}\left|\binom{m}{i} r^{m-i}s^i v_i\right|$

(u_n) dizisi sabit ise ; $\left\|G(u,v;B^m)\right\|_{(\ell_1,\ell_1)} = u\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{j}\left|\binom{m}{i} r^{m-i}s^i v_i\right|$

(u_n) dizisi kesin artan ise ; $\left\|G(u,v;B^m)\right\|_{(\ell_1,\ell_1)} = \sup_k \sum_{j=0}^{m-1}|u_{k+j}|\sum_{i=0}^{j}\left|\binom{m}{i} r^{m-i}s^i v_{i+k}\right|$

$\exists k \in \mathbb{N},\ \sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i} r^{m-i}s^i v_{k+i} \neq 0$ iken $(u_n) \in \ell_1$ ve

$$\left\|G(u,v;B^m)\right\|_{(\ell_1,\ell_1)} = \sup_k \sum_{j=0}^{m-1}|u_{k+j}|\sum_{i=0}^{j}\left|\binom{m}{i} r^{m-i}s^i v_{i+k}\right| + \sum_{j=m}^{\infty}|u_{k+j}|\sum_{i=0}^{m}\left|\binom{m}{i} r^{m-i}s^i v_{i+k}\right|$$

şeklindedir.

Teorem 5.6 $\alpha_j = \sum_{i=1}^{j}\binom{m}{i} r^{m-i}s^i$ olmak üzere

$$\sigma(G(u,v;B^m),\ell_1) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left|r^m - \frac{\lambda}{UV}\right| \leq \sum_{j=1}^{m-1}|\alpha_j|\right\} \cup \left\{r^m u_t v_t, t \in \mathbb{N}\right\} = S$$

İspat Bu teoremin ispatı iki aşamada gerçekleşir. Öncelikle $\lambda \notin S$ için $\left(G(u,v;B^m) - \lambda I\right)^{-1}$ operatörünün mevcut ve $\left(G(u,v;B^m) - \lambda I\right)^{-1} \in B(\ell_1)$ olduğu gösterilecektir. İkinci olarak da $\lambda \in S$ için $G(u,v;B^m)$ dönüşümünün sınırlı bir terse sahip olmadığı gösterilecektir.

$\lambda \notin S$ olsun. $G(u,v,B^m)$ üçgen matris olduğundan $\left(G(u,v;B^m) - \lambda I\right)\left(G(u,v;B^m) - \lambda I\right)^{-1} = I$ olacak şekilde tersi vardır.

Yukarıdaki eşitlikten $\left(G(u,v;B^m) - \lambda I\right)^{-1} = (t_{nk})$ ters dönüşümü

$$(t_{nk}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r^m u_0 v_0 - \lambda} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -\frac{u_1\left(v_0 r^m + v_1 m r^{m-1} s\right)}{(u_0 v_0 r^m - \lambda)(u_1 v_1 r^m - \lambda)} & \frac{1}{r^m u_1 v_1 - \lambda} & 0 & 0 & \cdots \\ t_{20} & -\frac{u_2\left(v_1 r^m + v_2 m r^{m-1} s\right)}{(u_1 v_1 r^m - \lambda)(u_2 v_2 r^m - \lambda)} & \frac{1}{r^m u_2 v_2 - \lambda} & 0 & \cdots \\ t_{30} & t_{31} & t_{32} & \frac{1}{r^m u_3 v_3 - \lambda} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Burada

$$t_{20} = -\frac{u_2 \sum_{i=0}^{2} v_i \binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{\left(u_0 v_0 r^m - \lambda\right)\left(u_2 v_2 r^m - \lambda\right)} + \frac{u_1 \sum_{i=0}^{1} v_i \binom{m}{i} r^{m-i} s^i \; u_2 \sum_{i=0}^{1} v_{i+1} \binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{\left(u_0 v_0 r^m - \lambda\right)\left(u_1 v_1 r^m - \lambda\right)\left(u_2 v_2 r^m - \lambda\right)}$$

$$t_{30} = -\frac{u_3 \sum_{i=0}^{3} v_i \binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{\left(u_0 v_0 r^m - \lambda\right)\left(u_3 v_3 r^m - \lambda\right)} + \frac{u_1 \sum_{i=0}^{1} v_i \binom{m}{i} r^{m-i} s^i \; u_3 \sum_{i=0}^{2} v_{i+1} \binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{\left(u_0 v_0 r^m - \lambda\right)\left(u_1 v_1 r^m - \lambda\right)\left(u_3 v_3 r^m - \lambda\right)}$$

$$+ \frac{u_2 \sum_{i=0}^{2} v_i \binom{m}{i} r^{m-i} s^i \; u_3 \sum_{i=0}^{1} v_{i+2} \binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{\left(u_0 v_0 r^m - \lambda\right)\left(u_2 v_2 r^m - \lambda\right)\left(u_3 v_3 r^m - \lambda\right)}$$

$$- \frac{u_1 \sum_{i=0}^{1} v_i \binom{m}{i} r^{m-i} s^i \; u_2 \sum_{i=0}^{1} v_{i+1} \binom{m}{i} r^{m-i} s^i \; u_3 \sum_{i=0}^{1} v_{i+2} \binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{\left(u_0 v_0 r^m - \lambda\right)\left(u_1 v_1 r^m - \lambda\right)\left(u_2 v_2 r^m - \lambda\right)\left(u_3 v_3 r^m - \lambda\right)}$$

şeklinde devam eder. Genel olarak sütunlara göre bu dönüşümün terimleri

$$t_{kk} = \frac{1}{r^m u_k v_k - \lambda}$$

$$t_{k+1,k} = -\frac{u_{k+1}\left(v_k r^m + v_{k+1} m r^{m-1} s\right)}{(u_k v_k r^m - \lambda)(u_{k+1} v_{k+1} r^m - \lambda)} = -\frac{u_{k+1} \sum_{i=0}^{1} v_{i+k} \binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{\left(u_k v_k r^m - \lambda\right)\left(u_{k+1} v_{k+1} r^m - \lambda\right)}$$

$$t_{k+2,k} = -\frac{u_{k+2}\left(v_k r^m + v_{k+1} m r^{m-1} s + v_{k+2}\binom{m}{2} r^{m-2} s^2\right)}{(u_k v_k r^m - \lambda)(u_{k+2} v_{k+2} r^m - \lambda)} + \frac{u_{k+1}\left(v_k r^m + v_{k+1} m r^{m-1} s\right) u_{k+2}\left(v_{k+1} r^m + v_{k+2} m r^{m-1} s\right)}{(u_k v_k r^m - \lambda)(u_{k+1} v_{k+1} r^m - \lambda)(u_{k+2} v_{k+2} r^m - \lambda)}$$

$$= -\frac{u_{k+2}\sum_{i=0}^{2} v_{i+k}\binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{\left(u_k v_k r^m - \lambda\right)\left(u_{k+2} v_{k+2} r^m - \lambda\right)} + \frac{u_{k+1}\sum_{i=0}^{1} v_{i+k}\binom{m}{i} r^{m-i} s^i \; u_{k+2}\sum_{i=0}^{1} v_{i+k+1}\binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{\left(u_k v_k r^m - \lambda\right)\left(u_{k+1} v_{k+1} r^m - \lambda\right)\left(u_{k+2} v_{k+2} r^m - \lambda\right)}$$

$$t_{k+3,k} = -\frac{u_{k+3}\sum_{i=0}^{3} v_{i+k}\binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{\left(u_k v_k r^m - \lambda\right)\left(u_{k+3} v_{k+3} r^m - \lambda\right)} + \frac{u_{k+1}\sum_{i=0}^{1} v_{i+k}\binom{m}{i} r^{m-i} s^i \; u_{k+3}\sum_{i=0}^{2} v_{i+k+1}\binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{\left(u_k v_k r^m - \lambda\right)\left(u_{k+1} v_{k+1} r^m - \lambda\right)\left(u_{k+3} v_{k+3} r^m - \lambda\right)}$$

$$+ \frac{u_{k+2}\sum_{i=0}^{2} v_{i+k}\binom{m}{i} r^{m-i} s^i \; u_{k+3}\sum_{i=0}^{1} v_{i+k+2}\binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{\left(u_k v_k r^m - \lambda\right)\left(u_{k+2} v_{k+2} r^m - \lambda\right)\left(u_{k+3} v_{k+3} r^m - \lambda\right)}$$

$$- \frac{u_{k+1}\sum_{i=0}^{1} v_{i+k}\binom{m}{i} r^{m-i} s^i \; u_{k+2}\sum_{i=0}^{1} v_{i+k+1}\binom{m}{i} r^{m-i} s^i \; u_{k+3}\sum_{i=0}^{1} v_{i+k+2}\binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{\left(u_k v_k r^m - \lambda\right)\left(u_{k+1} v_{k+1} r^m - \lambda\right)\left(u_{k+2} v_{k+2} r^m - \lambda\right)\left(u_{k+3} v_{k+3} r^m - \lambda\right)}$$

$\vdots$

$\vdots$

şeklinde ifade edilebilir. Burada her bir $n,k \in \mathbb{N}_0$ için $|t_{nk}| < \infty$ dir. Şimdi $(t_{nk}) \in B(\ell_1)$ yani

$$\left\| G(u,v;B^m)^{-1} \right\|_{(\ell_1:\ell_1)} = \sup_k \sum_{n=0}^{\infty} |t_{nk}| < \infty$$

olduğu gösterilmelidir.

$$S_k = \sum_{n=0}^{\infty} |t_{nk}| = |t_{kk}| + |t_{k+1,k}| + |t_{k+2,k}| + \cdots$$

$$= \left| \frac{1}{r^m u_k v_k - \lambda} \right| + \left| - \frac{u_{k+1} \sum_{i=0}^{1} v_{i+k} \binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{\left(u_k v_k r^m - \lambda\right)\left(u_{k+1} v_{k+1} r^m - \lambda\right)} \right| +$$

$$+ \left| - \frac{u_{k+2} \sum_{i=0}^{2} v_{i+k} \binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{\left(u_k v_k r^m - \lambda\right)\left(u_{k+2} v_{k+2} r^m - \lambda\right)} + \frac{u_{k+1} \sum_{i=0}^{1} v_{i+k} \binom{m}{i} r^{m-i} s^i \; u_{k+2} \sum_{i=0}^{1} v_{i+k+1} \binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{\left(u_k v_k r^m - \lambda\right)\left(u_{k+1} v_{k+1} r^m - \lambda\right)\left(u_{k+2} v_{k+2} r^m - \lambda\right)} \right| + \cdots$$

Şimdi k üzerinden limit alınırsa

$$\lim_k S_k = \lim_k \left| \frac{1}{r^m u_k v_k - \lambda} \right| + \lim_k \left| - \frac{u_{k+1} \sum_{i=0}^{1} v_{i+k} \binom{m}{i} r^{m-i} s^i}{\left(u_k v_k r^m - \lambda\right)\left(u_{k+1} v_{k+1} r^m - \lambda\right)} \right| + \cdots$$

$$\leq \frac{1}{\left|r^m UV - \lambda\right|} \left\{ 1 + \frac{|UV\alpha_1|}{|UVr^m - \lambda|} + \frac{|UV\alpha_2|}{|UVr^m - \lambda|} + \frac{|UV\alpha_1|^2}{|UVr^m - \lambda|^2} + \frac{|UV\alpha_3|}{|UVr^m - \lambda|} + \right.$$

$$+ 2\frac{|U^2V^2\alpha_1\alpha_2|}{|UVr^m - \lambda|^2} + \frac{|UV\alpha_1|^3}{|UVr^m - \lambda|^3} + \frac{|UV\alpha_4|}{|UVr^m - \lambda|} + 2\frac{|U^2V^2\alpha_1\alpha_3|}{|UVr^m - \lambda|^2} +$$

$$\left. + 3\frac{|U^3V^3(\alpha_1)^2\alpha_2|}{|UVr^m - \lambda|^3} + \frac{|UV\alpha_2|^2}{|UVr^m - \lambda|^2} + \frac{|UV\alpha_1|^4}{|UVr^m - \lambda|^4} + \cdots \right\}$$

$\frac{|UV|}{\left|r^m UV - \lambda\right|} = \beta$ olarak alalım. Bu durumda

$$\lim_k S_k \leq \frac{1}{\left|r^m UV - \lambda\right|} \{1 + |\beta\alpha_1| + |\beta\alpha_2| + |\beta\alpha_3| + \cdots$$

$$+ |\beta\alpha_1|^2 + |\beta\alpha_2|^2 + |\beta\alpha_3|^2 + \cdots + 2|\beta^2\alpha_1\alpha_2| + 2|\beta^2\alpha_1\alpha_3| + 2|\beta^2\alpha_2\alpha_3| + \cdots$$

$$+ |\beta\alpha_1|^3 + |\beta\alpha_2|^3 + |\beta\alpha_3|^3 + \cdots + 3|\beta^3{\alpha_1}^2\alpha_2| + 3|\beta^3{\alpha_1}^2\alpha_3| + 3|\beta^3{\alpha_2}^2\alpha_3| + \cdots\}$$

$$= \frac{1}{\left|r^m UV - \lambda\right|}\left\{1 + \left|\beta\alpha_1\right| + \left|\beta\alpha_2\right| + \cdots \left|\beta\alpha_{m-1}\right| + \left(\left|\beta\alpha_1\right| + \left|\beta\alpha_2\right| + \cdots \left|\beta\alpha_{m-1}\right|\right)^2 \right.$$

$$\left. + \left(\left|\beta\alpha_1\right| + \left|\beta\alpha_2\right| + \cdots \left|\beta\alpha_{m-1}\right|\right)^3 + \cdots \right\}$$

$$= \frac{1}{\left|r^m UV - \lambda\right|} \cdot \frac{1}{1 - \left(\left|\beta\alpha_1\right| + \left|\beta\alpha_2\right| + \cdots \left|\beta\alpha_{m-1}\right|\right)} = \frac{1}{\left|r^m UV - \lambda\right| - \left|UV\right| \sum_{j=1}^{m-1} \left|\beta\alpha_j\right|} < \infty$$

olduğu görülür. Burada $|\beta| \sum_{j=1}^{m-1} |\alpha_j| = \frac{|UV|}{\left|r^m UV - \lambda\right|} \sum_{j=1}^{m-1} |\alpha_j| < 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{m-1} |\alpha_j| < \left|r^m - \frac{\lambda}{UV}\right|$ dir.

Ayrıca (v_k) dizisi sabit ise $r + s = 0$ durumundan, (v_k) dizisi kesin artan veya kesin azalan ise $\forall k \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} r^{m-i} s^i v_{k+i} = 0$ durumundan dolayı $\alpha_m = 0$ olur. m sabit bir doğal sayı olduğundan $j \geq m$ için $\alpha_j = \alpha_m = 0$ sonucu elde edilir. (S_k) pozitif terimli bir dizi ve $\lim_k S_k < \infty$ olduğundan $\sup_k S_k < \infty$ olur. Böylece $\lambda \notin S$ şartıyla birlikte $\left(G(u,v;B^m) - \lambda I\right)^{-1} \in B(\ell_1)$ dolayısıyla $\sigma(G(u,v;B^m), \ell_1) \subseteq S$ elde edilmiş olur.

Tersine $\lambda \in S$ olsun.

i) Öncelikle $\lambda \neq u_t v_t r^m$, $\forall t \in \mathbb{N}_0$ için kabulü altında $G(u,v;B^m) - \lambda I$ dönüşümünün tersini inceleyelim. $G(u,v;B^m) - \lambda I$ üçgen matris olduğundan tersi vardır.

$\lambda \neq r^m UV$ ve $\left|r^m - \frac{\lambda}{UV}\right| \leq \sum_{j=1}^{m-1} |\alpha_j|$ ise $\sum_{q=1}^{\infty} \left|\frac{UV\left(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_{m-1}|\right)}{UVr^m - \lambda}\right|^q$ serisi ıraksak olacağından $\lim_k S_k = \infty$ ve dolayısıyla $\sup_k S_k = \infty$ olur. Bu yüzden ters dönüşüm, $\left(G(u,v;B^m) - \lambda I\right)^{-1}$, ℓ_1 üzerinde sınırlı operatöre karşılık gelmez.

$\lambda = r^m UV$ iken $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{r^m u_k v_k - \lambda} = \frac{1}{r^m UV - \lambda}$ olduğundan dönüşüm normu sınırsız olur.

ii) Şimdi $\lambda = r^m u_t v_t$ olduğunu kabul edelim.

$\lambda = r^m u_0 v_0$ için $G(u,v;B^m) - \lambda I$ matrisi

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ mr^{m-1}s & 0 & 0 & \cdots \\ \binom{m}{2} r^{m-2}s^2 & mr^{m-1}s & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

şeklinde olacağından tersi yoktur. Son olarak $t \neq 0$ için $\lambda = r^m u_t v_t$ alalım. Bu durumda $\left(G(u,v;B^m) - \lambda I\right)$ matrisi üçgen matris olmadığından Teorem2.7 e göre tersi yoktur ve Tanım 2.26 a göre $\lambda \in \sigma(G(u,v;B^m), \ell_1)$ dir. Böylece $\lambda \in S$ için $S \subseteq \sigma(G(u,v;B^m), \ell_1)$ elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER

Fark operatörleri ıraksak dizileri yakınsatmaları bakımından toplanabilma teorisinde geniş yer tutar ve uygulamalar açısından kolaylık sağlar. Literatürde, birinci ve ikinci dereceden fark operatörlerinin, genelleştirilmiş fark operatörlerinin çeşitli dizi uzaylarında spektrumu ve ince spektrumu ile ilgili çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmada ise fark operatörlerinin genelleştirilmiş şekli olan m. mertebeden fark operatörünün c_0, c, ℓ_∞ ve ℓ_1 dizi uzaylarında spektrumu bulunmuş ve alt kümelerine ayrılmıştır. Ayrıca genelleştirilmiş ağırlıklı fark operatörünün aynı uzaylarda spektral değerleri elde edilmiştir. Fonksiyonel analiz ve diğer alanlarda uygulamalara katkı sağlayacağı düşünülen bu sonuçlar, operatörlerin farklı dizi uzaylarında spektrum incelemesi yapılarak ilerletilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Kreyzig, E., (1978). Introductory Functional Analysis with Applications, New York-Santa Barbara-London-Sydney-Toronto: John Wiley & Sons Inc.

[2] Reed, M., Simon, B., (1980). Methods of Modern Mathematical Physics, San Diego-New York-Berkeley-Boston-London-Sydney-Tokyo-Toronto: Academic Press, Inc.

[3] Paul, B.C.T.a.A., (2013). "Spectra of the operator B(f,g) on the vector valued sequence space co(X)", Bol. Soc. Parana. Mat., 31: 105-111.

[4] Sylvester, J.J., (1852). "A Demonstration of the Theorem that Every Homogeneous Quadratic Polynomial is Reducible by Real Orthogonal Substitution to the Form of a Sum of Positive and Negative Squares", Phil. Mag., 4: 138-142.

[5] Fourier, J.B.J., (1822). Théorie analytique de la chaleur, Paris: Chez Firmin Didot, père et fils.

[6] Fredholm, I., (1900). "Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet", Öfver. Vet.-Akad. Förhand, Stockholm, 57: 39-46.

[7] Schmidt, E., (1907). "Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen, I", Math. Annalen, 63: 433-476.

[8] Schmidt, E., (1907). "Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen, II", Math. Annalen, 64: 161-174.

[9] Hellinger, E., (1909). "Neue Begründung der Theorie quadratischer Formen von unendlichvielen Veränderlichen", J. Reine Angew. Math., 136: 210-271.

[10] Weyl, H., (1909). "Über beschränkte quadratische Formen deren Differenz vollstetig ist", Rend. Circ. Mat. Palermo, 27: 373-392.

[11] Hilbert, D., (1906). "Grundzüge einer allgemeinen theorie der linearen integralgleichungen", Göttingen Nachricten: 157-227.

[12] Lebesgue, H., (1901). "Sur une généralisation de l'intégrale définie", C. R. Acad. Sci. Paris, 132: 1025-1028.

[13] Lebesgue, H., (1904). Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, Paris: Gauthier-Villars.

[14] Riesz, F., (1910). "Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen", Math. Annalen, 69: 449-497.

[15] Born, M., Jordan, P. , (1925). "Zur Quantenmechanik", Z. Physik, 34: 858-888.

[16] Born, M., Heisenberg, W., Jordan, P., (1926). "Zur Quantenmechanik II", Z. Physik, 35: 557-615.

[17] Neumann, J.v., (1927). " Mathematische Begründung der Quantenmechanik", Göttingen Nachricten: 1-57.

[18] Neumann, J.v., (1929). "Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperation", Math. Annalen, 102: 49-131.

[19] Stone, M.H., (1932). Linear Transformations in Hilbert Spaces, New York: Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.

[20] Friedrichs, K.O., (1934). "Spektraltheorie halbbeschrankter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren ", Math. Annalen, 109: 465-487, 685-713.

[21] Neumann, J.v., (1930). "Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren ", Math. Annalen, 102: 370-427.

[22] Neumann, J.v., (1949). "On Rings of Operators, Reduction Theory", Ann. Math., 50: 401-485.

[23] Murray, F.J., Neumann, J.v., (1936). "On Rings of Operators, I", Ann. Math., 37: 116-229.

[24] Murray, F.J., Neumann, J.v., (1937). "On Rings of Operators, II", Trans. Amer. Math. Soc., 41: 208-248.

[25] Neumann, J.v., (1940). "On Rings of Operators, III", Ann. Math., 41: 94-161.

[26] Gelfand, I.M., (1941). "Normierte Ringe", Mat. Sbornik, 9: 3-24.

[27] Gelfand, I.M., Silov, G.E., (1941). "Über verschiedene Methoden der Einführung der Topologie in die Menge der Maximalen Ideale eines normierten Ringes", Mat. Sbornik, 9: 25-38.

[28] Gelfand, I.M., Naimark, M. A., (1943). "On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space", Mat. Sbornik, 12: 197-213.

[29] Dunford, N., Schwartz, J.T., (1958). Linear Operators I : General Theory, New York: Interscience.

[30] Dunford, N., Schwartz, J.T., (1963). Linear Operators II : Spectral Theory, New York: Interscience.

[31] Dunford, N., Schwartz, J.T., (1971). Linear Operators III : Spectral Operators, New York: Wiley.

[32] Brown, A., Halmos, P.R., Shields, A.L., (1965). "Cesàro operators", Acta Sci. Math. (Szeged), 26: 125-137.

[33] Leibowitz, G., (1972). "Spectra of discrete Ces`aro operators", Tamkang J. Math., 3: 123-132.

[34] Wenger, R.B., (1975). "The fine spectra of Hölder summability operators", Indian Jour. Pure Appl. Math., 6: 695-712.

[35] Rhoades, B.E., (1983). "The fine spectra for weighted mean operators", 104: 219-230.

[36] Gonzalez, M., (1985). "The fine spectrum of the Cesàro operator in l p (1 <p < ∞)", Archiv der Mathematik, 44: 355-358.

[37] Reade, J.B., (1985). "On The Spectrum of the Cesaro Operator", Bulletin of the London Mathematical Society, 17: 263-267.

[38] Okutoyi, J.I., (1990). "On the Spectrum of C1 as an Operator on Bv0", Journal of the Australian Mathematical Society Series a-Pure Mathematics and Statistics, 48: 79-86.

[39] OKUTOYI, J.T., (1992). " On the spectrum of C, as an operator on bv", Communications, Faculty Of Science, University of Ankara Series A1, 41: 197-207.

[40] Coşkun, C., (1997). "The Spectra and Fine Spectra for p-Cesaro Operators", Turkish Journal of Mathematics, 21: 207-212.

[41] AKHMEDOV, A.M. ve BASAR, F., (2004). "On the fine spectrum of the Cesàro operator in c 0", Mathematical journal of Ibaraki University, 36: 25-32.

[42] Akhmedov, A.M. ve Basar, F., (2008). "The fine spectra of the Cesàro operator C1 over the sequence space bvp,(1≤ p<∞)", Math. J. Okayama Univ, 50: 135-147.

[43] Cass, F.P. ve Rhoades, B.E., (1977). "Mercerian theorems via spectral theory", Pac. J. Math., 73: 63-71.

[44] Cartlidge, J.M., (1978). Weighted Mean Matrices as Operators on lp, ed^eds.: Indiana University.

[45] Rhoades, B.E., (1987). "The Spectrum of Weighted Mean Operators", Canadian Mathematical Bulletin-Bulletin Canadien De Mathematiques, 30: 446-449.

[46] Rhoades, B.E., (1992). "The Spectra of Weighted Mean Operators on B-upsilon(0)", Journal of the Australian Mathematical Society Series a-Pure Mathematics and Statistics, 52: 242-250.

[47] Yildirim, M., (1998). "On the spectrum of the Rhaly operators on c0 and c", Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 29: 1301-1309.

[48] Yildirim, M., (2001). "On the spectrum of the Rhaly operators on lp", Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 32: 191-198.

[49] Yildirim, M., (2002). "The fine spectra of the Rhaly operators on c0", Turkish Journal of Mathematics, 26: 273-282.

[50] Altun, M. ve Karakaya, V., (2009). "Fine spectra of lacunary matrices", Communications in Mathematical Analysis, 7: 1-10.

[51] Altay, B. ve Karakus, M., (2005). "On the spectrum and the fine spectrum of the Zweier matrix as an operator on some sequence spaces", Thai Journal of Mathematics, 3: 153-162.

[52] Karakaya, V. ve Altun, M., (2010). "Fine spectra of upper triangular double-band matrices", Journal of Computational and Applied Mathematics, 234: 1387-1394.

[53] Karaisa, A., (2012). "Fine Spectra of Upper Triangular Double-Band Matrices over the Sequence Space", Discrete Dynamics in Nature and Society, 2012: 19.

[54] Tripathy, B.C. ve Das, R., (2015). "Spectrum and fine spectrum of the upper triangular matrix U (r, s) over the sequence space cs", Proyecciones, 34: 107-125.

[55] Karakaya, V., Manafov, M.D. ve Şimşek, N. (2012). "On the fine spectrum of the second order difference operator over the sequence spaces ℓ_p ve bv_p", Mathematical and Computer Modelling, 55: 426-431.

[56] de MALAFOSSE, B., (2002). "Properties of some setsof sequences and application to the spaces of bounded difference sequences of order \ bm {\ mu}", Hokkaido Mathematical Journal, 31: 283-299.

[57] Altay, B. ve Başar, F., (2004). "On the fine spectrum of the difference operator Δ on c0 and c", Information Sciences, 168: 217-224.

[58] Akhmedov, A. ve Basar, F., (2006). "On the finite spectra of the difference operator delta over the sequence space lp", Demonstratio Mathematica. Warsaw Technical University Institute of Mathematics, 39: 585-595.

[59] Akhmedov, A.M. ve Başar, F., (2007). "The fine spectra of the difference operator Δ over the sequence space bv p , (1 < p < ∞)*", Acta Mathematica Sinica, English Series, 23: 1757-1768.

[60] Baliarsingh, P., (2013). "On the Spectrum of 2-nd order Generalized Difference Operator $\ Delta^ 2$ over the Sequence space $ c_0$", Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica, 31: 235-244.

[61] Dutta, S. ve Baliarsingh, P., (2012). "On the fine spectra of the generalized rth difference operator on the sequence space ℓ1", Applied Mathematics and Computation, 219: 1776-1784.

[62] Baliarsingh, P. ve Dutta, S., (2014). "On a Spectral Classification of the Operator\ Delta_\ nu^ r over the Sequence Space c_0", Proceedings of the National Academy of Sciences, India Section A: Physical Sciences, 84: 555-561.

[63] Altay, B. ve Başar, F., (2005). "On the fine spectrum of the generalized difference operator B(r,s) over the sequence spaces c0 and c", International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2005: 3005-3013.

[64] Furkan, H. Bilgiç, H. ve Kayaduman, K., (2006). "On the fine spectrum of the generalized difference operator B(r, s) over the sequence spaces ℓ 1 and bv", Hokkaido Math. J., 35: 897-908.

[65] Bilgiç, H. ve Furkan, H., (2008). "On the fine spectrum of the generalized difference operator B (r, s) over the sequence spaces ℓp and b vp, (1 < p < ∞)", Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, 68: 499-506.

[66] Basar, F. Durna, N. ve Yildirim, M., (2012). "Subdivision of the spectra for difference operator over certain sequence space", Malaysian Journal of Mathematical Sciences, 6: 151-165.

[67] Furkan, H. Bilgiç, H. ve Altay, B., (2007). "On the fine spectrum of the operator B (r, s, t) over c0 and c", Computers and Mathematics with Applications, 53: 989-998.

[68] Bilgiç, H. ve Furkan, H., (2007). "On the fine spectrum of the operator B (r, s, t) over the sequence spaces ℓ1 and b v", Mathematical and Computer Modelling, 45: 883-891.

[69] Furkan, H. Bilgic, H. ve Basar, F., (2010). "On the fine spectrum of the operator B(r,s,t) over the sequence spaces ℓp and bvp,(1<p<∞)", Computers and Mathematics with Applications, 60: 2141-2152.

[70] Karaisa, A. ve Başar, F., (2013). "Fine spectra of upper triangular triple-band matrices over the sequence space ℓp ", Abstract and Applied Analysis, 2013.

[71] Akhmedov, A.M. ve El-Shabrawy, S.R., (2011). "On the fine spectrum of the operator Δa,b over the sequence space c", Computers and Mathematics with Applications, 61: 2994-3002.

[72] El-Shabrawy, S.R., (2012). "On the fine spectrum of the generalized difference operator δa,b over the sequence space lp, (1< p < ∞)", Applied Mathematics and Information Sciences, 6: 111S-118S.

[73] El-Shabrawy, S.R., (2014). "Spectra and fine spectra of certain lower triangular double-band matrices as operators on c0", Journal of Inequalities and Applications, 2014.

[74] Erdogan, E. ve Karakaya, V., (2014). "On Spectral Properties of a New Operator over Sequence Spaces c and c_0", Acta Mathematica Scientia, 34: 1481-1494.

[75] Binali Musayev, M.A., (2000). Fonksiyonel Analiz, Ankara: Balcı Yayınları.

[76] Şuhubi, E.S., (2001). Fonksiyonel analiz: İTÜ Vakfı.

[77] Maddox, I.J., (1988). Elements of Functional Analysis: Cambridge University Press.

[78] Goldberg, S., (1966). Unbounded Linear Operators, New York., St. Louis., San Francisco, Toronto , London, Sydney: Mc Graw-Hill Book Comp.

[79] Boos, J., (2000). Classical and Modern Methods in Summability.Oxford University Press Inc., New York.

[80] Cooke, R.G., (1950). Infinite Matrices and Sequence Spaces, by Richard G. Cooke: MacMillan.

[81] Wilansky, A., (2000). Summability through functional analysis: Elsevier.

[82] Altay, B. ve Başar, F., (2006). "Some paranormed sequence spaces of non-absolute type derived by weighted mean", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 319: 494-508.

[83] Appell, J. De Pascale, E. ve Vignoli, A., (2004). Nonlinear spectral theory: Walter de Gruyter.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Sümeyra ELMACI

Doğum Tarihi ve Yeri : 10.08.1989-İskilip

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : sumeyraelmaci@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Lisans	Matematik	Fatih Üniversitesi	2012
Lise	Fen Bilimleri	Çorum Fen Lisesi	2006

YAYINLARI

Bildiri

1. Elmacı, S**.**, Karakaya, V., (2014). "On the fine spectra of a new matrix operator over the sequence space ℓ_1." Karatekin Mathematics Days (KMD 2014). Çankırı, TURKEY.

2. Elmacı, S**.**, Karakaya, V., (2014). "On the fine spectra of a new matrix operator over the sequence space c_0 and c." International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM 2014). Antalya, TURKEY.