T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KOMPLEKS KATSAYILI SPLİT VE YARI KUATERNİYONLARIN MATRİS TEMSİLLERİ

GÖZDE ÖZYURT

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
YRD. DOÇ. DR. YASEMİN ALAGÖZ

İSTANBUL, 2017

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KOMPLEKS KATSAYILI SPLİT VE YARI KUATERNİYONLARIN MATRİS TEMSİLLERİ

Gözde ÖZYURT tarafından hazırlanan tez çalışması 14.12.2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Yrd. Doç. Dr. Yasemin ALAGÖZ

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Yrd. Doç. Dr. Yasemin ALAGÖZ

Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Meral TOSUN

Galatasaray Üniversitesi _____

Prof. Dr. Salim YÜCE

Yıldız Teknik Üniversitesi _____

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında kompleks kuaterniyonlar, kompleks split kuaterniyonlar, kompleks yarı kuaterniyonlar hakkında bilgiler verilmiş ve bunlara ait 2×2, 4×4 ve 8×8 matris temsilleri araştırılmıştır.

Eğitimim ve tez çalışmam boyunca, benden emeğini, yardımlarını ve bilgisini esirgemeyen, her türlü görüş ve düşünceleriyle bana yol gösteren, sabır ve anlayışla eğitimime katkı sağlayan değerli ve saygıdeğer danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Yasemin ALAGÖZ'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Aralık, 2017

Gözde ÖZYURT

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ vi

ÖZET vii

ABSTRACT viii

BÖLÜM 1

GİRİŞ 1

1.1 Literatür Özeti 1
1.2 Tezin Amacı 2
1.3 Hipotez 2

BÖLÜM 2

REEL VE KOMPLEKS KUATERNİYONLAR 3

2.1 Reel Kuaterniyonlar 3
2.1.1 Reel Kuaterniyonların Matris Temsilleri 6
2.2 Kompleks Kuaterniyonlar 7
2.2.1 Kompleks Kuaterniyonların 2×2 Matris Temsili 8
2.2.2 Kompleks Kuaterniyonların 4×4 Kompleks Matris Temsili 21
2.2.3 Kompleks Kuaterniyonların 8×8 Reel Matris Temsili 21

BÖLÜM 3

REEL VE KOMPLEKS SPLİT KUATERNİYONLAR 23

3.1 Reel Split Kuaterniyonlar 23
3.1.1 Reel Split Kuaterniyonların Matris Temsilleri 25
3.2 Kompleks Split Kuaterniyonlar 32
3.2.1 Kompleks Split Kuaterniyonların 2×2 Matris Temsili 34
3.2.2 Kompleks Split Kuaterniyonların 4×4 Kompleks Matris Temsili 45
3.2.3 Kompleks Split Kuaterniyonların 8×8 Reel Matris Temsili 46

BÖLÜM 4

REEL VE KOMPLEKS YARI KUATERNİYONLAR 48

4.1 Reel Yarı Kuaterniyonlar 48
4.1.1 Reel Yarı Kuaterniyonların Matris Temsilleri 50
4.2 Kompleks Yarı Kuaterniyonlar 54
4.2.1 Kompleks Yarı Kuaterniyonların 2×2 Matris Temsili 56
4.2.2 Kompleks Yarı Kuaterniyonların 4×4 Kompleks Matris Temsili 62
4.2.3 Kompleks Yarı Kuaterniyonların 8×8 Reel Matris Temsili 63

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER 65

KAYNAKLAR 66

EK-A

MİNKOWSKİ UZAYI 68

A-1 $\mathbb{R}_v^n$ Minkowski Uzayı 68

ÖZGEÇMİŞ 72

SİMGE LİSTESİ

$\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$	Kompleks kuaterniyonlar kümesi
$\mathbb{H}'_{\mathbb{C}}$	Kompleks kuaterniyon matrisi kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{H}_S^{\mathbb{C}}$	Kompleks split kuaterniyonlar kümesi
$\mathbb{H}_S^{\mathbb{C}'}$	Kompleks split kuaterniyon matrisi kümesi
$\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$	Kompleks yarı kuaterniyonlar kümesi
$\mathcal{H}'_{\mathbb{C}}$	Kompleks yarı kuaterniyon matrisi kümesi
$\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$	Reel kuaterniyonlar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{H}_S$	Reel split kuaterniyonlar kümesi
$\mathcal{H}$	Reel yarı kuaterniyonlar kümesi
$\mathbb{E}_1^3$	Minkowski 3-uzayı
$\mathbb{E}_2^4$	Yarı-Öklid uzayı
$\mathbb{R}^4$	$4-$boyutlu reel vektörler kümesi
$M_2(\mathbb{C})$	2×2 kompleks matrisler halkası

ÖZET

KOMPLEKS KATSAYILI SPLİT VE YARI KUATERNİYONLARIN MATRİS TEMSİLLERİ

Gözde ÖZYURT

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Yasemin ALAGÖZ

Bu çalışma beş bölüm ve bir ek bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde literatür özeti ve tezin amacı belirtilmiştir. İkinci bölümde, reel kuaterniyonlar, kompleks kuaterniyonlar ve matris temsilleri incelenmiştir. Üçüncü bölümde split kuaterniyonlar ve kompleks split kuaterniyonlar hakkında temel bilgiler verilip matris temsilleri sunulmuştur. Dördüncü bölümde yarı kuaterniyonlar ve kompleks yarı kuaterniyonlar tanıtılmıştır. Bu bölümlerin orijinal kısımlarında 2×2 kompleks matris temsillerine ait özellikler verilmiştir ve determinant hesabı için yeni bir yöntem kullanılmıştır. Kompleks yarı kuaterniyonlara ait 4×4 kompleks matris temsili ile 8×8 reel matris temsili hesaplanmıştır. Bununla birlikte Ek-A ile verilen kısımda Minkowski uzayı hakkında genel bilgiler verilmiştir. Beşinci bölümde sonuç ve öneriler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kompleks Kuaterniyon, Kompleks Split Kuaterniyon, Kompleks Yarı Kuaterniyon

ABSTRACT

MATRIX REPRESENTATIONS OF COMPLEX COEFFICIENT SPLIT AND SEMI QUATERNIONS

Gözde ÖZYURT

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Adviser: Asst. Prof. Dr. Yasemin ALAGÖZ

The thesis are considered of five chapters and an appendix. In first chapter, review of the literature and the aim of thesis are explained. In the second chapter, real quaternions, complex quaternions and their matrix representations are investigated. In the third chapter, the basic informations of split quaternions and complex split quaternions are given and their matrix representations are presented. In the fourth chapter, semi quaternions and complex semi quaternions are introduced. In the original section of these chapters, properties of 2×2 complex matrix representations are given and a new method of determinant has been used. 4×4 complex matrix and 8×8 real matrix representations of complex semi quaternions are calculated. Moreover, the basic informations of Minkowski space are given in Appendix A. In the fifth chapter, conclusions and suggestions are given.

Keywords: Complex Quaternion, Complex Split Quaternion, Complex Semi Quaternion

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Kuaterniyonlar 1843 yılında İrlandalı matematikçi William Rowan Hamilton'un kompleks sayıları üç boyutlu uzaya genelleştirmek amacıyla yaptığı çalışmalar sırasında bulunmuştur. Kompleks kuaterniyonlar ise 1853 yılında Hamilton tarafından tanıtılmıştır. Reel kuaterniyonların 2×2 kompleks matris temsili Ebbinghaus vd. tarafından ifade edilmiştir. Bir reel kuaterniyona karşılık gelen 4×4 reel matris temsilleri Ward tarafından incelemiştir. Mehta kompleks kuaterniyonlar hakkında genel bilgiler verip, kuaterniyonun baz elemanları yerine 2×2 kompleks matrisler kullanmıştır. Kompleks kuaterniyonlar ile kompleks matris temsilleri arasındaki ilişkiler Tian tarafından yapılan çalışmada incelemiştir. Negi vd. kompleks kuaterniyonların 8×8 reel matris temsilini tanımlamıştır. Kompleks kuaterniyonların 8×8 sağ ve sol reel matris temsilleri ile bu temsillerin özellikleri Flaut ve Shpakivskyi tarafından incelenmiştir.

Split kuaterniyonlar kümesi 1849 yılında James Cockle tarafından tanımlanmıştır. Split kuaterniyonların reel matris temsilleri ve bu temsillere ait özellikler Kula tarafından incelenmiştir. Erdoğdu ve Özdemir kompleks split kuaterniyonları ve matrislerini tanımlayıp, kompleks split kuaterniyonun temel özellikleri ile 4×4 kompleks matris temsilini vermiştir. Kompleks split kuaterniyonların 8×8 reel matris temsili ise Erdoğdu tarafından ifade edilmiştir.

Yarı kuaterniyonlar hakkında genel bilgiler Rosenfeld tarafından verilmiştir. 2013 yılında Mortazaasl ve Jafari tarafından yapılan çalışmada yarı kuaterniyonlara ait temel

özellikler incelemiştir. Jafari yarı kuaterniyonların reel matris temsillerini ifade etmiştir ve kompleks yarı kuaterniyonları tanımlamıştır.

1.2 Tezin Amacı

Tezin amacı kompleks kuaterniyonların, kompleks split kuaterniyonların, kompleks yarı kuaterniyonların 2×2 matris temsilleri kullanılarak bazı temel özelliklerini yeniden incelemektir, kompleks kuaterniyonlar ile kompleks split kuaterniyonlara ait 4×4 kompleks ve 8×8 reel matris temsilleri ifade edip yarı kuaterniyonların 4×4 kompleks ve 8×8 reel matris temsillerini hesaplamaktır. Ayrıca 2×2 kompleks kuaterniyon, kompleks split kuaterniyon ve kompleks yarı kuaterniyon matrislerde determinant hesabı için yeni bir yöntem kullanarak bu kuaterniyon matrisleri için bazı özellikler elde etmektir.

1.3 Hipotez

Mehta ve Tian tarafından bir kompleks kuaterniyon 2×2 kompleks matrisle ifade edilmiştir. Bundan hareketle kompleks split kuaterniyonların, kompleks yarı kuaterniyonların 2×2 kompleks matris temsilleri incelenip determinant hesabı için yeni bir yöntem çalışılmıştır. Kompleks kuaterniyonların, kompleks split kuaterniyonların 4×4 kompleks ve 8×8 reel matris temsilleri verilip kompleks yarı kuaterniyonların da 4×4 kompleks ve 8×8 reel matris temsilinin hesaplanması hedeflenmektedir.

BÖLÜM 2

REEL VE KOMPLEKS KUATERNİYONLAR

Bu bölüm [1-10] kaynaklarından yararlanarak hazırlanmıştır. Bu bölümün orijinal kısmında kompleks kuaterniyonların 2×2 kompleks matris temsilinin bazı özellikleri incelenmiştir.

2.1 Reel Kuaterniyonlar

Tanım 2.1 Bir q reel kuaterniyonu q_0, q_1, q_2, q_3 reel sayılarının ve $\mathbb{R}^4$ de $\boldsymbol{e}_0 = (1,0,0,0), \boldsymbol{e}_1 = (0,1,0,0), \boldsymbol{e}_2 = (0,0,1,0), \boldsymbol{e}_3 = (0,0,0,1)$ bazlarının lineer birleşimi olarak $q = q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3$ şeklinde ifade edilir. Burada $\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ bazları aşağıdaki kuralları sağlar:

$$\boldsymbol{e}_1^{\,2} = \boldsymbol{e}_2^{\,2} = \boldsymbol{e}_3^{\,2} = -1,$$

$$\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_3,$$

$$\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1,$$

$$\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_2,$$

$$\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{e}_j \ (j = 1,2,3).$$

Böylece reel kuaterniyonların kümesi

$$\mathbb{H}_{\mathbb{R}} = \left\{ q = q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3 \mid q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}, \boldsymbol{e}_1^{\,2} = \boldsymbol{e}_2^{\,2} = \boldsymbol{e}_3^{\,2} = \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 = -1 \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bir $q = q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3$ reel kuaterniyonunun skaler kısmı $S_q = q_0\boldsymbol{e}_0$ ve vektörel kısmı $V_q = q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3$ ile gösterilir. Eğer $S_q = 0$ ise q'ya pure reel kuaterniyon denir. Ayrıca reel kuaterniyon kümesi $\mathbb{R}^4$ uzayına, pure reel kuaterniyon kümesi ise $\mathbb{R}^3$ uzayına izomorftur, [1].

Tanım 2.2 $q = q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3$ ve $p = p_0\boldsymbol{e}_0 + p_1\boldsymbol{e}_1 + p_2\boldsymbol{e}_2 + p_3\boldsymbol{e}_3$ reel kuaterniyonlarının toplamı

$$q + p = \left(S_q + S_p\right) + \left(V_q + V_p\right)$$

ya da

$$q + p = \left(q_0 + p_0\right)\boldsymbol{e}_0 + \left(q_1 + p_1\right)\boldsymbol{e}_1 + \left(q_2 + p_2\right)\boldsymbol{e}_2 + \left(q_3 + p_3\right)\boldsymbol{e}_3$$

şeklinde tanımlanır. Bu toplama işlemi ile birlikte reel kuaterniyonların kümesi bir abel gruptur, [1].

Tanım 2.3 Bir $q = q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3$ reel kuaterniyonunun $\lambda \in \mathbb{R}$ skaleri ile çarpımı

$$\lambda q = \left(\lambda q_0\right)\boldsymbol{e}_0 + \left(\lambda q_1\right)\boldsymbol{e}_1 + \left(\lambda q_2\right)\boldsymbol{e}_2 + \left(\lambda q_3\right)\boldsymbol{e}_3$$

olarak tanımlanır, [2].

Tanım 2.4 Reel kuaterniyonların çarpımı

$$\begin{aligned} \times : \mathbb{H}_{\mathbb{R}} \times \mathbb{H}_{\mathbb{R}} &\to \mathbb{H}_{\mathbb{R}} \\ \left(q, p\right) &\to q \times p = qp \end{aligned}$$

şeklinde bir işlem olup $q = q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3$ ve $p = p_0\boldsymbol{e}_0 + p_1\boldsymbol{e}_1 + p_2\boldsymbol{e}_2 + p_3\boldsymbol{e}_3$ için

$$\begin{aligned} qp = &\left(q_0p_0 - q_1p_1 - q_2p_2 - q_3p_3\right)\boldsymbol{e}_0 + \left(q_0p_1 + q_1p_0 + q_2p_3 - q_3p_2\right)\boldsymbol{e}_1 \\ &+ \left(q_0p_2 - q_1p_3 + q_2p_0 + q_3p_1\right)\boldsymbol{e}_2 + \left(q_0p_3 + q_1p_2 - q_2p_1 + q_3p_0\right)\boldsymbol{e}_3 \end{aligned}$$

ya da

$$qp = S_qS_p - \left\langle V_q, V_p \right\rangle + S_qV_p + S_pV_q + V_q\Lambda V_p$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\left\langle , \right\rangle$ ve Λ sırasıyla $\mathbb{R}^3$ de iç çarpım ve vektörel çarpımı ifade etmektedir. Reel kuaterniyonların çarpımı değişmeli olmamasına karşın birleşmeli

ve toplama işlemi üzerine dağılma özelliğine sahip olduğundan $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ kümesi aykırı cisimdir, [1-2].

Tanım 2.5 Bir q reel kuaterniyonun eşleniği

$$\overline{(,)}: \mathbb{H}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{H}_{\mathbb{R}}$$
$$q \to \bar{q} = S_q - V_q$$

olmak üzere $q = q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3$ için

$$\bar{q} = q_0\boldsymbol{e}_0 - q_1\boldsymbol{e}_1 - q_2\boldsymbol{e}_2 - q_3\boldsymbol{e}_3$$

ile tanımlanır ve

$$q\bar{q} = \bar{q}q = \left(q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2\right)\boldsymbol{e}_0$$

dir, [2].

Tanım 2.6 Bir q reel kuaterniyonunun normu

$$\| \ \|: \mathbb{H}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$$
$$q \to \|q\| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{\bar{q}q}$$

olmak üzere

$q = q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3$ için

$$\|q\| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

olarak tanımlanır. Eğer $\|q\| = 1$ ise q'ya birim reel kuaterniyon denir, [2].

Tanım 2.7 Bir q reel kuaterniyonunun tersi

$$(\ )^{-1}: \mathbb{H}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{H}_{\mathbb{R}}$$
$$q \to q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|}, \ \|q\| \neq 0$$

olmak üzere $q = q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3$ için

$$q^{-1} = \frac{q_0\boldsymbol{e}_0 - q_1\boldsymbol{e}_1 - q_2\boldsymbol{e}_2 - q_3\boldsymbol{e}_3}{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

şeklinde tanımlanır, [2].

2.1.1 Reel Kuaterniyonların Matris Temsilleri

Bir $q = q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3$ reel kuaterniyonu $z_1 = q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1$ ve $z_2 = q_2\boldsymbol{e}_0 + q_3\boldsymbol{e}_1$ kompleks sayıları[1] için $q = z_1\boldsymbol{e}_0 + z_2\boldsymbol{e}_2$ olacak şekilde tek türlü yazılabilir. Her $p \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ için

$$f_q : \mathbb{H}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{H}_{\mathbb{R}}$$
$$p \to f_q(p) = qp$$

lineer dönüşümü tanımlansın. Bu dönüşüm bire birdir ve

$$f_q(\boldsymbol{e}_0) = \boldsymbol{e}_0(z_1\boldsymbol{e}_0 + z_2\boldsymbol{e}_2) = z_1\boldsymbol{e}_0 + z_2\boldsymbol{e}_2$$
$$f_q(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_2(z_1\boldsymbol{e}_0 + z_2\boldsymbol{e}_2) = -\overline{z_2}\boldsymbol{e}_0 + \overline{z_1}\boldsymbol{e}_2$$

eşitliklerinden reel kuaterniyonlar kümesi $M_2(\mathbb{C})$ matris halkasının

$$\left\{ \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z_2} & \overline{z_1} \end{bmatrix} : z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

alt kümesi olarak tanımlanır, [1].

q bir reel kuaterniyon olsun.

$$L_q : \mathbb{H}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{H}_{\mathbb{R}}$$
$$p \to L_q(p) = qp$$

sol çarpım fonksiyonu tanımlansın. L_q bir lineer dönüşümdür ve $\{\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ bazına göre L_q dönüşümüne karşılık gelen matris

$$L_q(\boldsymbol{e}_0) = \boldsymbol{e}_0(q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3) = q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3$$

$$L_q(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1(q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3) = -q_1\boldsymbol{e}_0 + q_0\boldsymbol{e}_1 - q_3\boldsymbol{e}_2 + q_2\boldsymbol{e}_3$$

---

[1] Kompleks sayılar kümesi $\mathbb{C} = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ ile tanımlanır. $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ kompleks sayılarının toplamı ve çarpımı, sırasıyla $z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$ ve $z_1z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2)$ ile tanımlanır, [1].

$$L_q(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_2(q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3) = -q_2\boldsymbol{e}_0 + q_3\boldsymbol{e}_1 + q_0\boldsymbol{e}_2 - q_1\boldsymbol{e}_3$$

$$L_q(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_3(q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3) = -q_3\boldsymbol{e}_0 - q_2\boldsymbol{e}_1 + q_1\boldsymbol{e}_2 + q_0\boldsymbol{e}_3$$

eşitliklerinden

$$\Phi(q) = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur, [3].

2.2 Kompleks Kuaterniyonlar

Kompleks kuaterniyonlar (bikuaterniyonlar) reel kuaterniyonların kompleks bir ifadesi olup, $q = q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3$ ve $q' = q_0'\boldsymbol{e}_0 + q_1'\boldsymbol{e}_1 + q_2'\boldsymbol{e}_2 + q_3'\boldsymbol{e}_3$ reel kuaterniyonları için Q kompleks kuaterniyonu

$$\begin{aligned} Q &= q + iq' = (q_0 + iq_0')\boldsymbol{e}_0 + (q_1 + iq_1')\boldsymbol{e}_1 + (q_2 + iq_2')\boldsymbol{e}_2 + (q_3 + iq_3')\boldsymbol{e}_3 \\ &= Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1 + Q_2\boldsymbol{e}_2 + Q_3\boldsymbol{e}_3 \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Burada Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 katsayıları kompleks sayılardır ve $\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ ise reel kuaterniyon bazları ile aynı çarpım kurallarını sağlar. Yani katsayıları reel sayılar olan bir kuaterniyon reel kuaterniyon olarak adlandırılırken katsayıları kompleks sayılar olan bir kuaterniyon da kompleks katsayılı kuaterniyon ya da kompleks kuaterniyon olarak adlandırılır. Kompleks kuaterniyonlar kümesi

$$\mathbb{H}_{\mathbb{C}} = \left\{ Q = Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1 + Q_2\boldsymbol{e}_2 + Q_3\boldsymbol{e}_3 \mid Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{C},\ \boldsymbol{e}_1^2 = \boldsymbol{e}_2^2 = \boldsymbol{e}_3^2 = \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 = -1 \right\}$$

olarak tanımlanır. Bir $Q = Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1 + Q_2\boldsymbol{e}_2 + Q_3\boldsymbol{e}_3$ kompleks kuaterniyonunun skaler kısmı $S_Q = Q_0\boldsymbol{e}_0$ ve vektörel kısmı $V_Q = Q_1\boldsymbol{e}_1 + Q_2\boldsymbol{e}_2 + Q_3\boldsymbol{e}_3$ ile tanımlanır. Böylece, Q kompleks kuaterniyonu $Q = S_Q + V_Q$ ile ifade edilir, [4-6].

Tanım 2.8 Kompleks kuaterniyonların çarpımı

$$\begin{aligned} \times : \mathbb{H}_{\mathbb{C}} \times \mathbb{H}_{\mathbb{C}} &\to \mathbb{H}_{\mathbb{C}} \\ (Q, P) &\to Q \times P = QP \end{aligned}$$

şeklinde bir işlem olup $Q = Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1 + Q_2\boldsymbol{e}_2 + Q_3\boldsymbol{e}_3$ ve $P = P_0\boldsymbol{e}_0 + P_1\boldsymbol{e}_1 + P_2\boldsymbol{e}_2 + P_3\boldsymbol{e}_3$ kompleks kuaterniyonlarının çarpımı

$$QP = \left(Q_0P_0 - Q_1P_1 - Q_2P_2 - Q_3P_3\right)\boldsymbol{e}_0 + \left(Q_0P_1 + Q_1P_0 + Q_2P_3 - Q_3P_2\right)\boldsymbol{e}_1$$
$$+ \left(Q_0P_2 - Q_1P_3 + Q_2P_0 + Q_3P_1\right)\boldsymbol{e}_2 + \left(Q_0P_3 + Q_1P_2 - Q_2P_1 + Q_3P_0\right)\boldsymbol{e}_3$$

ya da

$$QP = \left(S_Q + V_Q\right)\left(S_P + V_P\right) = S_QS_p + S_QV_P + S_PV_Q - \left\langle V_Q, V_P\right\rangle + V_Q \times V_P$$

olarak tanımlanır, [6].

Tanım 2.9 Bir Q kompleks kuaterniyonunun kuaterniyon eşleniği

$$\overline{(,)} : \mathbb{H}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$$
$$Q \to \overline{Q} = S_Q - V_Q$$

olmak üzere $Q = Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1 + Q_2\boldsymbol{e}_2 + Q_3\boldsymbol{e}_3$ için

$$\overline{Q} = Q_0\boldsymbol{e}_0 - Q_1\boldsymbol{e}_1 - Q_2\boldsymbol{e}_2 - Q_3\boldsymbol{e}_3$$

ile tanımlanır, [4].

Tanım 2.10 Bir Q kompleks kuaterniyonunun normu

$$\| \ \| : \mathbb{H}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$$
$$Q \to \|Q\| = \sqrt{Q\overline{Q}} = \sqrt{\overline{Q}Q}$$

olmak üzere $Q = Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1 + Q_2\boldsymbol{e}_2 + Q_3\boldsymbol{e}_3$ için

$$\|Q\| = \sqrt{Q\overline{Q}} = \sqrt{\overline{Q}Q} = \sqrt{Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2}$$

olarak tanımlanır, [5].

2.2.1 Kompleks Kuaterniyonların 2×2 Matris Temsili

Bir $Q = Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1 + Q_2\boldsymbol{e}_2 + Q_3\boldsymbol{e}_3$ kompleks kuaterniyonu $Z_1 = Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1$ ve $Z_2 = Q_2\boldsymbol{e}_0 + Q_3\boldsymbol{e}_1$ kompleks sayıları için $Q = Z_1\boldsymbol{e}_0 + Z_2\boldsymbol{e}_2$ olacak şekilde tek türlü yazılabilir.

$f_Q : \mathbb{H}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ lineer dönüşümü her $P \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ için $f_Q(P) = QP$ şeklinde tanımlansın. Bu dönüşüm bire bir dönüşümdür ve

$$\begin{aligned} f_Q(\boldsymbol{e}_0) &= \boldsymbol{e}_0\left[(Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_0 + (Q_2\boldsymbol{e}_0 + Q_3\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_2\right] \\ &= (Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_0 + (Q_2\boldsymbol{e}_0 + Q_3\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_Q(\boldsymbol{e}_2) &= \boldsymbol{e}_2\left[(Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_0 + (Q_2\boldsymbol{e}_0 + Q_3\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_2\right] \\ &= (-Q_2\boldsymbol{e}_0 + Q_3\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_0 + (Q_0\boldsymbol{e}_0 - Q_1\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_2 \end{aligned}$$

dir. Bu dönüşümle kompleks kuaterniyonlar, $M_2(\mathbb{C})$ matris halkasının

$$\mathbb{Q} = \left\{ \begin{bmatrix} Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1 & Q_2\boldsymbol{e}_0 + Q_3\boldsymbol{e}_1 \\ -Q_2\boldsymbol{e}_0 + Q_3\boldsymbol{e}_1 & Q_0\boldsymbol{e}_0 - Q_1\boldsymbol{e}_1 \end{bmatrix} : Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{C} \right\}$$

alt kümesi olarak tanımlanır.

$F : \mathbb{H}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{Q}, \quad (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) \mapsto \begin{bmatrix} Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1 & Q_2\boldsymbol{e}_0 + Q_3\boldsymbol{e}_1 \\ -Q_2\boldsymbol{e}_0 + Q_3\boldsymbol{e}_1 & Q_0\boldsymbol{e}_0 - Q_1\boldsymbol{e}_1 \end{bmatrix}$ dönüşümü lineer izomorfizmadır ve

$$F(\boldsymbol{e}_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_0$$

$$F(\boldsymbol{e}_1) = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = E_1$$

$$F(\boldsymbol{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = E_2$$

$$F(\boldsymbol{e}_3) = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} = E_3$$

dir.

Tanım 2.11 Bir kompleks kuaterniyon matrisi Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 kompleks sayılarının ve

$$E_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E_1 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

baz matrislerinin lineer birleşimi olarak $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3$ şeklinde ifade edilir. Burada E_0, E_1, E_2, E_3 baz matrisleri, kompleks kuaterniyonun $\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ baz elemanları gibi aynı çarpım kurallarını sağlar:

$$E_1^2 = E_2^2 = E_3^2 = -E_0,$$
$$E_1E_2 = -E_2E_1 = E_3,$$
$$E_2E_3 = -E_3E_2 = E_1,$$
$$E_3E_1 = -E_1E_3 = E_2,$$
$$E_0E_j = E_jE_0 = E_j \ (j = 1,2,3).$$

Kompleks kuaterniyonların 2×2 matris temsilinin kümesi

$$\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{'} = \left\{ Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3 = \begin{bmatrix} Q_0 + iQ_1 & Q_2 + iQ_3 \\ -Q_2 + iQ_3 & Q_0 - iQ_1 \end{bmatrix} : Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{C}, E_1^2 = E_2^2 = E_3^2 = E_1E_2E_3 = -E_0 \right\}$$

ile tanımlanır ve bu kümenin her bir elemanı kompleks kuaterniyon matrisi olarak adlandırılır, [4].

Tanım 2.12 Bir Q kompleks kuaterniyon matrisinin $S_Q = Q_0E_0$ skaler matris kısmı ve $ImQ = Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3$ imajiner matris kısmıdır. Böylece Q kompleks kuaterniyonu $Q = S_Q + ImQ$ olarak ifade edilir.

Tanım 2.13 Bir $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3$ kompleks kuaterniyon matrisinin kuaterniyon eşleniği

$$\bar{Q} = Q_0E_0 - Q_1E_1 - Q_2E_2 - Q_3E_3 \tag{2.1}$$

ile tanımlanır, [5].

Tanım 2.14 Bir $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3$ kompleks kuaterniyon matrisinin kompleks eşleniği Q^C ile gösterilir ve

$$\begin{aligned} Q^C &= Q_0\overline{E_0} + Q_1\overline{E_1} + Q_2\overline{E_2} + Q_3\overline{E_3} \\ &= Q_0E_0 - Q_1E_1 + Q_2E_2 - Q_3E_3 \end{aligned} \tag{2.2}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.15 Bir $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3$ kompleks kuaterniyon matrisinin total eşleniği $\left(\bar{Q}\right)^C$ ile gösterilir ve

$$\begin{aligned} \left(\bar{Q}\right)^C &= \overline{\left(Q^C\right)} = Q_0\overline{E_0} - Q_1\overline{E_1} - Q_2\overline{E_2} - Q_3\overline{E_3} \\ &= Q_0E_0 + Q_1E_1 - Q_2E_2 + Q_3E_3 \end{aligned} \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.16 Bir $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3$ kompleks kuaterniyon matrisinin transpozu Q^t ile gösterilir ve

$$Q^t = Q_0E_0 + Q_1E_1 - Q_2E_2 + Q_3E_3 \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.17 Bir $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3$ kompleks kuaterniyon matrisinin ek matrisi EkQ ile gösterilir ve

$$EkQ = Q_0E_0 - Q_1E_1 - Q_2E_2 - Q_3E_3 \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca

$$EkQ = \bar{Q}$$

ve

$$Q^C = \left(\bar{Q}\right)^t$$

dir.

Tanım 2.18 Bir $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3 = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ -\bar{q}_{12} & \bar{q}_{11} \end{bmatrix}$ kompleks kuaterniyon matrisinin normu

$$\|Q\| = \sqrt{|q_{11}|^2 + |q_{12}|^2} \tag{2.6}$$

olarak tanımlanır, [4-5].

Tanım 2.19 Bir $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3 = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ -\bar{q}_{12} & \bar{q}_{11} \end{bmatrix}$ kompleks kuaterniyon matrisinin determinantı

$$\begin{aligned} \det Q &= q_{11}\bar{q}_{11} + q_{12}\bar{q}_{12} \\ &= Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 \end{aligned}$$

şeklindedir, [4-5].

Tanım 2.20 Bir Q kompleks kuaterniyon matrisinin determinantı

$$\det Q = Q_0^2 \det E_0 + Q_1^2 \det E_1 + Q_2^2 \det E_2 + Q_3^2 \det E_3$$

ile tanımlanır ve kompleks kuaterniyon matrisinin bazlarının determinantları yardımıyla

$$\det Q = Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 \tag{2.7}$$

elde edilir.

Teorem 2.1 Q ve P kompleks kuaterniyon matrisleri için aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. $\det Q = \det\left(\bar{Q}\right) = \det Q^C = \det Q^t$

ii. $\det\left(\psi Q\right) = \psi^2 \det Q,\ \psi \in \mathbb{C}$

iii. $\det\left(QP\right) = \det Q \det P$

İspat

i. Bir $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3 \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}'$ için 2.20 tanımından

$$\det Q = \det\left(\bar{Q}\right) = \det Q^C = \det Q^t = Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2$$

elde edilir.

ii. Bir $\psi \in \mathbb{C}$ ve $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3 \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}'$ için

$$\psi Q = \psi\left(Q_0\right)E_0 + \psi\left(Q_1\right)E_1 + \psi\left(Q_2\right)E_2 + \psi\left(Q_3\right)E_3$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}\det\left(\psi Q\right) &= \psi^2 Q_0^2 + \psi^2 Q_1^2 + \psi^2 Q_2^2 + \psi^2 Q_3^2 \\ &= \psi^2\left(Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2\right) \\ &= \psi^2 \det Q\end{aligned}$$

elde edilir.

iii. $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3$ ve $P = P_0E_0 + P_1E_1 + P_2E_2 + P_3E_3$ kompleks kuaterniyon matrisleri için

$$QP = \left(Q_0P_0 - Q_1P_1 - Q_2P_2 - Q_3P_3\right)E_0 + \left(Q_0P_1 + Q_1P_0 + Q_2P_3 - Q_3P_2\right)E_1$$

$$+\left(Q_0P_2+Q_2P_0-Q_1P_3+Q_3P_1\right)E_2+\left(Q_0P_3+Q_3P_0+Q_1P_2-Q_2P_1\right)E_3$$

bulunur. 2.20 tanımından

$$\det\left(QP\right)=Q_0^2P_0^2+Q_0^2P_1^2+Q_0^2P_2^2+Q_0^2P_3^2+Q_1^2P_0^2+Q_1^2P_1^2+Q_1^2P_2^2+Q_1^2P_3^2$$

$$+Q_2^2P_0^2+Q_2^2P_1^2+Q_2^2P_2^2+Q_2^2P_3^2+Q_3^2P_0^2+Q_3^2P_1^2+Q_3^2P_2^2+Q_3^2P_3^2$$

elde edilir. Diğer yandan, Q ve P kompleks kuaterniyon matrislerinin determinantları sırasıyla, $Q_0^2+Q_1^2+Q_2^2+Q_3^2$ ve $P_0^2+P_1^2+P_2^2+P_3^2$ olduğundan

$$\det Q\det P=Q_0^2P_0^2+Q_0^2P_1^2+Q_0^2P_2^2+Q_0^2P_3^2+Q_1^2P_0^2+Q_1^2P_1^2+Q_1^2P_2^2+Q_1^2P_3^2$$

$$+Q_2^2P_0^2+Q_2^2P_1^2+Q_2^2P_2^2+Q_2^2P_3^2+Q_3^2P_0^2+Q_3^2P_1^2+Q_3^2P_2^2+Q_3^2P_3^2$$

olarak bulunur. Böylece

$$\det\left(QP\right)=\det Q\det P$$

olur.

Tanım 2.21 Bir $Q=Q_0E_0+Q_1E_1+Q_2E_2+Q_3E_3$ kompleks kuaterniyon matrisinin determinantı Q'nun kompleks eşleniği ve transpozu kullanılarak bulunur. Q'nun kompleks eşleniği ile transpozunun çarpımı

$$Q^tQ^C=Q^CQ^t=\left(Q_0^2+Q_1^2+Q_2^2+Q_3^2\right)E_0$$

olup, 2.20 tanımından

$$\det\left(Q^tQ^C\right)=\left(Q_0^2+Q_1^2+Q_2^2+Q_3^2\right)^2$$

elde edilir. Böylece Q kompleks kuaterniyon matrisinin determinantı

$$\det Q=\sqrt{\det\left(Q^tQ^C\right)}$$

olarak yazılabilir.

Teorem 2.2 Her $Q\in\mathbb{H}'_{\mathbb{C}}$ için aşağıdakiler sağlanır:

i. Herhangi bir c kompleks sayısı için $E_1c=cE_1$, $E_2c=cE_2$, $E_3c=cE_3$ dir.

ii. $Q^2 = S_Q^2 - \det\left(ImQ\right)E_0 + 2S_Q ImQ.$

iii. Her Q kompleks kuaterniyon matrisi, $C_1, C_2 \in M_2\left(\mathbb{C}\right)$ olmak üzere $Q = C_1 + C_2 E_2$ olarak tek türlü ifade edilebilir.

İspat

ii. Bir $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3$ kompleks kuaterniyon matrisi için

$$Q^2 = \left(Q_0^2 - Q_1^2 - Q_2^2 - Q_3^2\right)E_0 + 2\left(Q_0Q_1\right)E_1 + 2\left(Q_0Q_2\right)E_2 + 2\left(Q_0Q_3\right)E_3$$

$$= \left(Q_0^2 - Q_1^2 - Q_2^2 - Q_3^2\right)E_0 + 2\left(Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3\right)$$

olarak bulunur.

$S_Q = Q_0E_0$, $ImQ = Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3$ ve $\det\left(ImQ\right) = Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2$ olduğundan

$$Q^2 = S_Q^2 - \det\left(ImQ\right)E_0 + 2S_Q ImQ$$

elde edilir.

i ve iii ispatları kolaylıkla gösterilebilir.

Tanım 2.22 Bir Q kompleks kuaterniyon matrisinin tersi Q^{-1} ile gösterilir. $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3$ kompleks kuaterniyon matrisi için $\det Q \neq 0$ olmak üzere

$$Q^{-1} = \frac{1}{\det Q}\bar{Q}$$

ya da

$$Q^{-1} = \frac{\bar{Q}}{\sqrt{\det\left(Q^t Q^C\right)}}$$

olarak tanımlanır. Daha açık bir ifadeyle, Q kompleks kuaterniyon matrisinin tersi

$$Q^{-1} = \frac{1}{Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2}\left(Q_0E_0 - Q_1E_1 - Q_2E_2 - Q_3E_3\right) \tag{2.8}$$

yazılır.

Örnek 2.1 $Q = E_0 + iE_2 + E_3$ bir kompleks kuaterniyon matrisi olsun. Q kompleks kuaterniyon matrisi $Q = \begin{bmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ şeklinde yazılabilir. Böylece (2.8) eşitliğinden Q kompleks kuaterniyon matrisinin tersi

$$Q^{-1} = E_0 - iE_2 - E_3$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Teorem 2.3 $Q, P \in \mathbb{H}'_{\mathbb{C}}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. $Q = \left[\left(\bar{Q} \right)^t \right]^C$ dir.

ii. $Q^t = \overline{\left(Q^C \right)}$ dir.

iii. $\det Q = \|Q\|^2$ dir, [4-5].

iv. Q terslenebilir ise $\left(Q^C \right)^{-1} = \left(Q^{-1} \right)^C$ dir.

v. Q terslenebilir ise $\left(\bar{Q} \right)^{-1} = \overline{\left(Q^{-1} \right)}$ dir.

vi. Q terslenebilir ise $\left(Q^t \right)^{-1} = \left(Q^{-1} \right)^t$ dir.

vii. $\left(QP \right)^C = Q^C P^C$ dir.

viii. Q ve P terslenebilir ise $\left(QP \right)^{-1} = P^{-1} Q^{-1}$ dir.

İspat

i. Bir $Q = Q_0 E_0 + Q_1 E_1 + Q_2 E_2 + Q_3 E_3$ kompleks kuaterniyon matrisinin eşleniği

$$\bar{Q} = Q_0 E_0 - Q_1 E_1 - Q_2 E_2 - Q_3 E_3$$

dir. (2.4) eşitliğinden

$$\left(\bar{Q} \right)^t = Q_0 E_0 - Q_1 E_1 - Q_2 E_2 - Q_3 E_3$$

bulunur ve (2.2) eşitliği yardımıyla

$$\left[\left(\bar{Q}\right)^t\right]^C = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3$$

elde edilir. Böylece

$$Q = \left[\left(\bar{Q}\right)^t\right]^C$$

olduğu görülür.

ii. $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3 \in \mathbb{H}'_{\mathbb{C}}$ için (2.4) eşitliğinden

$$Q^t = Q_0E_0 + Q_1E_1 - Q_2E_2 + Q_3E_3$$

dir.

Öte yandan, $Q \in \mathbb{H}'_{\mathbb{C}}$ için (2.2) ve (2.3) eşitliklerinden, sırasıyla

$$Q^C = Q_0E_0 - Q_1E_1 + Q_2E_2 - Q_3E_3$$

ve

$$\overline{\left(Q^C\right)} = Q_0E_0 + Q_1E_1 - Q_2E_2 + Q_3E_3$$

olup

$$Q^t = \overline{\left(Q^C\right)}$$

olduğu görülür.

iii. $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3$ kompleks split kuaterniyon matrisi olsun. Q'nun normu ve determinantı, sırasıyla

$$\|Q\| = \sqrt{Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2}$$

ve

$$\det Q = Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2$$

olup

$$\det Q = \|Q\|^2$$

dir.

iv. $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3 \in \mathbb{H}'_{\mathbb{C}}$ ve $\det Q \neq 0$ olsun. (2.2) eşitliğinden $Q^C = Q_0E_0 - Q_1E_1 + Q_2E_2 - Q_3E_3$ olup (2.8) eşitliği yardımıyla

$$\left(Q^C\right)^{-1} = \frac{Q_0E_0 + Q_1E_1 - Q_2E_2 + Q_3E_3}{Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2}$$

olarak bulunur.

Diğer yandan

$$Q^{-1} = \frac{Q_0E_0 - Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3}{Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2}$$

olup, (2.2) eşitliğinden

$$\left(Q^{-1}\right)^C = \frac{Q_0E_0 + Q_1E_1 - Q_2E_2 + Q_3E_3}{Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2}$$

elde edilir. O halde

$$\left(Q^C\right)^{-1} = \left(Q^{-1}\right)^C$$

dir.

v. $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3 \in \mathbb{H}'_{\mathbb{C}}$ ve $\det Q \neq 0$ olsun. (2.8) ve (2.1) eşitliklerinden

$$\left(\bar{Q}\right)^{-1} = \overline{\left(Q^{-1}\right)} = \frac{Q_0E_0 + Q_1E_1 - Q_2E_2 + Q_3E_3}{Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2}$$

olduğu görülür.

vi. $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3 \in \mathbb{H}'_{\mathbb{C}}$ ve $\det Q \neq 0$ olsun. (2.4) ve (2.8) eşitliklerinden

$$\left(Q^t\right)^{-1} = \left(Q^{-1}\right)^t = \frac{Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 - Q_3E_3}{Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2}$$

dir.

vii. $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3$ ve $P = P_0E_0 + P_1E_1 + P_2E_2 + P_3E_3$ kompleks kuaterniyon matrisleri için

$$QP=\left(Q_0P_0-Q_1P_1-Q_2P_2-Q_3P_3\right)E_0+\left(Q_0P_1+Q_1P_0+Q_2P_3-Q_3P_2\right)E_1$$

$$+\left(Q_0P_2+Q_2P_0-Q_1P_3+Q_3P_1\right)E_2+\left(Q_0P_3+Q_3P_0+Q_1P_2-Q_2P_1\right)E_3$$

olup QP'nin kompleks eşleniği (2.2) eşitliğinden

$$\left(QP\right)^C=\left(Q_0P_0-Q_1P_1-Q_2P_2-Q_3P_3\right)E_0+\left(-Q_0P_1-Q_1P_0-Q_2P_3+Q_3P_2\right)E_1$$

$$+\left(Q_0P_2+Q_2P_0-Q_1P_3+Q_3P_1\right)E_2+\left(-Q_0P_3-Q_3P_0-Q_1P_2+Q_2P_1\right)E_3$$

olarak bulunur.

Diğer yandan, Q ve P kompleks kuaterniyon matrislerinin kompleks eşlenikleri, sırasıyla

$Q^C=Q_0E_0-Q_1E_1+Q_2E_2-Q_3E_3$ ve $P^C=P_0E_0-P_1E_1+P_2E_2-P_3E_3$ olup

$$Q^CP^C=\left(Q_0P_0-Q_1P_1-Q_2P_2-Q_3P_3\right)E_0+\left(-Q_0P_1-Q_1P_0-Q_2P_3+Q_3P_2\right)E_1$$

$$+\left(Q_0P_2+Q_2P_0-Q_1P_3+Q_3P_1\right)E_2+\left(-Q_0P_3-Q_3P_0-Q_1P_2+Q_2P_1\right)E_3$$

şeklindedir. Böylece

$$\left(QP\right)^C=Q^CP^C$$

dir.

viii. $Q=Q_0E_0+Q_1E_1+Q_2E_2+Q_3E_3$ ve $P=P_0E_0+P_1E_1+P_2E_2+P_3E_3$ terslenebilir kompleks kuaterniyon matrisleri olsun.

$$QP=\left(Q_0P_0-Q_1P_1-Q_2P_2-Q_3P_3\right)E_0+\left(Q_0P_1+Q_1P_0+Q_2P_3-Q_3P_2\right)E_1$$

$$+\left(Q_0P_2+Q_2P_0-Q_1P_3+Q_3P_1\right)E_2+\left(Q_0P_3+Q_3P_0+Q_1P_2-Q_2P_1\right)E_3$$

şeklindedir. Kolaylık açısından

$$QP=AE_0+BE_1+CE_2+DE_3$$

biçiminde ifade edilsin. Burada

$$A=Q_0P_0-Q_1P_1-Q_2P_2-Q_3P_3,\ B=Q_0P_1+Q_1P_0+Q_2P_3-Q_3P_2,$$
$$C=Q_0P_2+Q_2P_0-Q_1P_3+Q_3P_1,\ D=Q_0P_3+Q_3P_0+Q_1P_2-Q_2P_1$$

dir. QP'nin determinantı ise

$$A^2+B^2+C^2+D^2=Q_0^2P_0^2+Q_0^2P_1^2+Q_0^2P_2^2+Q_0^2P_3^2+Q_1^2P_0^2+Q_1^2P_1^2+Q_1^2P_2^2+Q_1^2P_3^2$$
$$+Q_2^2P_0^2+Q_2^2P_1^2+Q_2^2P_2^2+Q_2^2P_3^2+Q_3^2P_0^2+Q_3^2P_1^2+Q_3^2P_2^2+Q_3^2P_3^2$$

olduğundan

$$\det\left(QP\right)=A^2+B^2+C^2+D^2$$

dir. (2.8) eşitliğinden

$$\left(QP\right)^{-1}=\frac{\overline{\left(QP\right)}}{\det\left(QP\right)}=\frac{AE_0-BE_1-CE_2-DE_3}{A^2+B^2+C^2+D^2}$$

bulunur.

Diğer yandan, (2.8)'den P ve Q kompleks kuaterniyon matrislerinin tersleri, sırasıyla

$$P^{-1}=\frac{1}{P_0^2+P_1^2+P_2^2+P_3^2}\left(P_0E_0-P_1E_1-P_2E_2-P_3E_3\right)$$

ve

$$Q^{-1}=\frac{1}{Q_0^2+Q_1^2+Q_2^2+Q_3^2}\left(Q_0E_0-Q_1E_1-Q_2E_2-Q_3E_3\right)$$

dir. Buradan

$$P^{-1}Q^{-1}=\frac{AE_0-BE_1-CE_2-DE_3}{A^2+B^2+C^2+D^2}$$

elde edilir. Böylece

$$\left(QP\right)^{-1}=P^{-1}Q^{-1}$$

dir.

Tanım 2.23 Herhangi bir $Q=Q_0E_0+Q_1E_1+Q_2E_2+Q_3E_3\in\mathbb{H}_{\mathbb{C}}'$ için

i. Q bir diyagonal matris[1] ise $Q=Q_0E_0+Q_1E_1$,

[1] Bir kare matrisin esas köşegeni dışındaki bütün elemanları sıfır ise A matrisine diyagonal matris denir, [7].

ii. Q bir simetrik matris[1] ise $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_3E_3$,

iii. Q bir ortogonal matris[2] ise $\det Q = 1$ olmak üzere $Q = Q_0E_0 + Q_2E_2$,

iv. Q bir hermityan matris[3] ise $Q = Q_0E_0 + Q_2E_2$,

v. Q bir üniter matris[4] ise $\det Q = 1$ olmak üzere $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_3E_3$,

şeklinde ifade edilir.

Örnek 2.2 $Q = E_0 + E_1, P = E_0 + E_2$ kompleks kuaterniyon matrisleri olsun.

i. $(QP)^C = E_0 - E_1 + E_2 - E_3 \neq E_0 - E_1 + E_2 + E_3 = P^C Q^C$

ii. $(QP)^{-1} = \frac{1}{4}(E_0 - E_1 - E_2 - E_3) \neq \frac{1}{4}(E_0 - E_1 - E_2 + E_3) = Q^{-1}P^{-1}$

Örnek 2.3 $Q = E_0 + E_1 + E_2$ kompleks kuaterniyon matrisi için

$$Q(\bar{Q})^C = E_0 + 2E_1 - 2E_3 \neq E_0 + 2E_1 + 2E_3 = (\bar{Q})^C Q$$

dir.

Bu örnekler yardımıyla kompleks kuaterniyon matrisleri için Sonuç 2.1 elde edilir.

Sonuç 2.1 $Q, P \in \mathbb{H}'_{\mathbb{C}}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. $(QP)^C \neq P^C Q^C$

ii. $(QP)^{-1} \neq Q^{-1}P^{-1}$

iii. $Q(\bar{Q})^C \neq (\bar{Q})^C Q$

---

[1] Bir A matrisinin transpozu kendisine eşit ise A'ya simetrik matris denir, [7].

[2] $A^t = A^{-1}$ ise A matrisine ortogonal matris denir, [7].

[3] $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}_n^n, a_{ij} \in \mathbb{C}$ matrisi verilmiş olsun. $(\bar{A})^t = A$ ise A'ya Hermit matris denir. Burada $\bar{A}$ matrisine A kompleks matrisinin eşleniği denir ve $\bar{A} = [\bar{a}_{ij}]$ şeklinde tanımlanır, [7].

[4] $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi verilsin. $(\bar{A})^t = A^{-1}$ ise A'ya üniter matris denir, [7].

2.2.2 Kompleks Kuaterniyonların 4×4 Kompleks Matris Temsili

$Q = Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1 + Q_2\boldsymbol{e}_2 + Q_3\boldsymbol{e}_3$ bir kompleks kuaterniyon olsun.

$$f_Q : \mathbb{H}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$$
$$P \to f_Q(P) = QP$$

lineer dönüşümü tanımlansın.

$$f_Q(\boldsymbol{e}_0) = Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1 + Q_2\boldsymbol{e}_2 + Q_3\boldsymbol{e}_3$$
$$f_Q(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1(Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1 + Q_2\boldsymbol{e}_2 + Q_3\boldsymbol{e}_3) = -Q_1\boldsymbol{e}_0 + Q_0\boldsymbol{e}_1 - Q_3\boldsymbol{e}_2 + Q_2\boldsymbol{e}_3$$
$$f_Q(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_2(Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1 + Q_2\boldsymbol{e}_2 + Q_3\boldsymbol{e}_3) = -Q_2\boldsymbol{e}_0 + Q_3\boldsymbol{e}_1 + Q_0\boldsymbol{e}_2 - Q_1\boldsymbol{e}_3$$
$$f_Q(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_3(Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1 + Q_2\boldsymbol{e}_2 + Q_3\boldsymbol{e}_3) = -Q_3\boldsymbol{e}_0 - Q_2\boldsymbol{e}_1 + Q_1\boldsymbol{e}_2 + Q_0\boldsymbol{e}_3$$

eşitliklerinden kompleks kuaterniyonlar $M_2(\mathbb{C})$'nin

$$\mathbb{Q} = \left\{ \begin{bmatrix} Q_0 & Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ -Q_1 & Q_0 & -Q_3 & Q_2 \\ -Q_2 & Q_3 & Q_0 & -Q_1 \\ -Q_3 & -Q_2 & Q_1 & Q_0 \end{bmatrix}_{4\times 4} : Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{C} \right\}$$

alt kümesi olarak yazılabilir, [8].

2.2.3 Kompleks Kuaterniyonların 8×8 Reel Matris Temsili

Bir $Q = Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1 + Q_2\boldsymbol{e}_2 + Q_3\boldsymbol{e}_3$ kompleks kuaterniyonu için $Q_0 = a_0 + ib_0$, $Q_1 = a_1 + ib_1$, $Q_2 = a_2 + ib_2$, $Q_3 = a_3 + ib_3 \in \mathbb{C}$ olduğundan Q kompleks kuaterniyonu

$$Q = a_0\boldsymbol{e}_0 + a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 + b_0i\boldsymbol{e}_0 + b_1i\boldsymbol{e}_1 + b_2i\boldsymbol{e}_2 + b_3i\boldsymbol{e}_3$$

şekinde ifade edilebilir.

Her $Q \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ için

$$G_Q : \mathbb{H}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$$
$$P \to G_Q(P) = QP$$

lineer dünüşümü tanımlansın. $G_Q : \mathbb{H}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ dönüşümü bire birdir.

$Q = a_0\boldsymbol{e}_0 + a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 + b_0i\boldsymbol{e}_0 + b_1i\boldsymbol{e}_1 + b_2i\boldsymbol{e}_2 + b_3i\boldsymbol{e}_3 \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ için

$$G_Q(\boldsymbol{e}_0) = a_0\boldsymbol{e}_0 + a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 + b_0i\boldsymbol{e}_0 + b_1i\boldsymbol{e}_1 + b_2i\boldsymbol{e}_2 + b_3i\boldsymbol{e}_3$$

$$G_Q(\boldsymbol{e}_1) = -a_1\boldsymbol{e}_0 + a_0\boldsymbol{e}_1 - a_3\boldsymbol{e}_2 + a_2\boldsymbol{e}_3 - b_1 i\boldsymbol{e}_0 + b_0 i\boldsymbol{e}_1 - b_3 i\boldsymbol{e}_2 + b_2 i\boldsymbol{e}_3$$

$$G_Q(\boldsymbol{e}_2) = -a_2\boldsymbol{e}_0 + a_3\boldsymbol{e}_1 + a_0\boldsymbol{e}_2 - a_1\boldsymbol{e}_3 - b_2 i\boldsymbol{e}_0 + b_3 i\boldsymbol{e}_1 + b_0 i\boldsymbol{e}_2 - b_1 i\boldsymbol{e}_3$$

$$G_Q(\boldsymbol{e}_3) = -a_3\boldsymbol{e}_0 - a_2\boldsymbol{e}_1 + a_1\boldsymbol{e}_2 + a_0\boldsymbol{e}_3 - b_3 i\boldsymbol{e}_0 - b_2 i\boldsymbol{e}_1 + b_1 i\boldsymbol{e}_2 + b_0 i\boldsymbol{e}_3$$

$$G_Q(i\boldsymbol{e}_0) = -b_0\boldsymbol{e}_0 - b_1\boldsymbol{e}_1 - b_2\boldsymbol{e}_2 - b_3\boldsymbol{e}_3 + a_0 i\boldsymbol{e}_0 + a_1 i\boldsymbol{e}_1 + a_2 i\boldsymbol{e}_2 + a_3 i\boldsymbol{e}_3$$

$$G_Q(i\boldsymbol{e}_1) = b_1\boldsymbol{e}_0 - b_0\boldsymbol{e}_1 + b_3\boldsymbol{e}_2 - b_2\boldsymbol{e}_3 - a_1 i\boldsymbol{e}_0 + a_0 i\boldsymbol{e}_1 - a_3 i\boldsymbol{e}_2 + a_2 i\boldsymbol{e}_3$$

$$G_Q(i\boldsymbol{e}_2) = b_2\boldsymbol{e}_0 - b_3\boldsymbol{e}_1 - b_0\boldsymbol{e}_2 + b_1\boldsymbol{e}_3 - a_2 i\boldsymbol{e}_0 + a_3 i\boldsymbol{e}_1 + a_0 i\boldsymbol{e}_2 - a_1 i\boldsymbol{e}_3$$

$$G_Q(i\boldsymbol{e}_3) = b_3\boldsymbol{e}_0 + b_2\boldsymbol{e}_1 - b_1\boldsymbol{e}_2 - b_0\boldsymbol{e}_3 - a_3 i\boldsymbol{e}_0 - a_2 i\boldsymbol{e}_1 + a_1 i\boldsymbol{e}_2 + a_0 i\boldsymbol{e}_3$$

eşitlikleri sağlanır. Bu dönüşüm yardımı ile $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ ve

$$\left\{ \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ -a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 & -b_1 & b_0 & -b_3 & b_2 \\ -a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 & -b_2 & b_3 & b_0 & -b_1 \\ -a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 & -b_3 & -b_2 & b_1 & b_0 \\ -b_0 & -b_1 & -b_2 & -b_3 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & -b_0 & b_3 & -b_2 & -a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ b_2 & -b_3 & -b_0 & b_1 & -a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ b_3 & b_2 & -b_1 & -b_0 & -a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}_{8\times 8} : a_n, b_n \in \mathbb{R} \right\}$$

matrisi arasında bir izomorfizma tanımlanır, [9-10].

BÖLÜM 3

REEL VE KOMPLEKS SPLİT KUATERNİYONLAR

Bu bölümde reel ve kompleks split kuaterniyonlar tanıtılmış ve temel özellikleri verilmiştir. Bu bölümün orijinal kısmında kompleks split kuaterniyonların 2×2 kompleks matris temsili incelenmiştir.

3.1 Reel Split Kuaterniyonlar

Hamilton'un 1843 yılında kuaterniyonları keşfetmesinin ardından James Cockle 1849 yılında reel split kuaterniyonlar kümesini

$$\mathbb{H}_S = \{q = q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3 : q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\}$$

olarak tanıtmıştır. Burada reel split kuaterniyonun baz elemanları $\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$

$$\boldsymbol{e}_1^{\,2} = -1,\ \boldsymbol{e}_2^{\,2} = \boldsymbol{e}_3^{\,2} = 1,$$

$$\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_3,$$

$$\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_1,$$

$$\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_2$$

eşitliklerini sağlar, [11,12]. Bir $q = q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3$ reel split kuaterniyonunun $S_q = q_0\boldsymbol{e}_0$ ile skaler kısmı ve $V_q = q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3$ ile vektörel kısmı gösterilir. Eğer $S_q = 0$ ise q'ya pure reel split kuaterniyon adı verilir, [13]. Reel sayılar üzerinde $4-$

boyutlu bir vektör uzayı olan reel split kuaterniyonlar kümesi $\mathbb{E}_2^4$ uzayına izomorftur. Pure reel split kuaterniyonların kümesi ise $\mathbb{E}_1^3$ uzayına izomorftur, [12-13].

Tanım 3.1 $q = q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3$ ve $p = p_0\boldsymbol{e}_0 + p_1\boldsymbol{e}_1 + p_2\boldsymbol{e}_2 + p_3\boldsymbol{e}_3$ reel split kuaterniyonlarının toplamı

$$q + p = \left(S_q + S_p\right) + \left(V_q + V_p\right)$$

ya da

$$q + p = \left(q_0 + p_0\right)\boldsymbol{e}_0 + \left(q_1 + p_1\right)\boldsymbol{e}_1 + \left(q_2 + p_2\right)\boldsymbol{e}_2 + \left(q_3 + p_3\right)\boldsymbol{e}_3$$

şeklinde tanımlanır, [13].

Tanım 3.2 $q = q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3$ reel split kuaterniyonunun $\lambda \in \mathbb{R}$ skaleri ile çarpımı

$$\lambda q = \left(\lambda q_0\right)\boldsymbol{e}_0 + \left(\lambda q_1\right)\boldsymbol{e}_1 + \left(\lambda q_2\right)\boldsymbol{e}_2 + \left(\lambda q_3\right)\boldsymbol{e}_3$$

eşitliği ile tanımlanır, [13].

Tanım 3.3 Reel split kuaterniyonların çarpımı

$$\begin{aligned} \times : \mathbb{H}_S \times \mathbb{H}_S &\to \mathbb{H}_S \\ \left(q, p\right) &\to q \times p = qp \end{aligned}$$

biçiminde bir işlem olup $q = q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3$ ve $p = p_0\boldsymbol{e}_0 + p_1\boldsymbol{e}_1 + p_2\boldsymbol{e}_2 + p_3\boldsymbol{e}_3$ reel split kuaterniyonları için

$$\begin{aligned} qp = &\left(q_0p_0 - q_1p_1 + q_2p_2 + q_3p_3\right)\boldsymbol{e}_0 + \left(q_0p_1 + q_1p_0 - q_2p_3 + q_3p_2\right)\boldsymbol{e}_1 \\ &+ \left(q_0p_2 + q_2p_0 - q_1p_3 + q_3p_1\right)\boldsymbol{e}_2 + \left(q_0p_3 + q_3p_0 - q_2p_1 + q_1p_2\right)\boldsymbol{e}_3 \end{aligned}$$

ya da

$$qp = S_qS_p + \left\langle V_q, V_p \right\rangle_L + S_qV_p + S_pV_q + V_q \times_L V_p$$

olarak tanımlanır. Burada $\left\langle\ \right\rangle_L$ ve $\times_L$ $\mathbb{E}_1^3$ Lorentz uzayında sırasıyla Lorentz iç çarpımını ve vektörel çarpımını ifade etmektedir, [13].

Tanım 3.4 Bir q reel split kuaterniyonunun eşleniği

$$\overline{(,)}: \mathbb{H}_S \to \mathbb{H}_S$$
$$q \to \bar{q} = S_q - V_q$$

olmak üzere $q = q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3$ için

$$\bar{q} = q_0\boldsymbol{e}_0 - q_1\boldsymbol{e}_1 - q_2\boldsymbol{e}_2 - q_3\boldsymbol{e}_3$$

olarak tanımlanır, [11].

Tanım 3.5 Bir q reel split kuaterniyonunun normu

$$\| \ \| : \mathbb{H}_S \to \mathbb{R}$$
$$q \to \|q\| = \sqrt{|q\bar{q}|} = \sqrt{|\bar{q}q|}$$

olmak üzere $q = q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3$ için

$$\|q\| = \sqrt{|q\bar{q}|} = \sqrt{|\bar{q}q|} = \sqrt{\left|q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2\right|}$$

olarak tanımlanır,[11]. Eğer $\|q\| = 1$ ise q'ya birim reel split kuaterniyon denir. Ayrıca

$q \in \mathbb{H}_S$ için $p = \dfrac{q}{\|q\|}$ de birim reel split kuaterniyondur, [13].

Tanım 3.6 Bir q reel split kuaterniyonunun tersi

$$(\ )^{-1} : \mathbb{H}_S \to \mathbb{H}_S$$
$$q \to q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|}, \ \|q\| \neq 0$$

olmak üzere $q = q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3$ için

$$q^{-1} = \frac{q_0\boldsymbol{e}_0 - q_1\boldsymbol{e}_1 - q_2\boldsymbol{e}_2 - q_3\boldsymbol{e}_3}{\sqrt{\left|q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2\right|}}$$

şeklinde tanımlanır, [11], [13].

3.1.1 Reel Split Kuaterniyonların Matris Temsilleri

Teorem 3.1 Her reel split kuaterniyon 2×2 tipinde kompleks matris olarak temsil edilebilir.

İspat

$q = q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3$ reel split kuaterniyonu z_1 ve z_2 kompleks sayıları için $q = z_1\boldsymbol{e}_0 + z_2\boldsymbol{e}_2$ olacak şekilde tek türlü yazılabilir.

$f_q : \mathbb{H}_S \to \mathbb{H}_S$ lineer dönüşümü her $p \in \mathbb{H}_S$ için $f_q(p) = qp$ şeklinde tanımlansın. Bu dönüşüm bire bir dönüşümdür ve

$$f_q(\boldsymbol{e}_0) = \boldsymbol{e}_0(z_1\boldsymbol{e}_0 + z_2\boldsymbol{e}_2) = z_1\boldsymbol{e}_0 + z_2\boldsymbol{e}_2$$

$$f_q(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_2(z_1\boldsymbol{e}_0 + z_2\boldsymbol{e}_2) = \overline{z_2}\boldsymbol{e}_0 + \overline{z_1}\boldsymbol{e}_2$$

dir. Bu dönüşümle reel split kuaterniyonlar, $M_2(\mathbb{C})$ matris halkasının

$$\left\{\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ \overline{z_2} & \overline{z_1} \end{bmatrix} : z_1, z_2 \in \mathbb{C}\right\}$$

alt kümesi olarak tanımlanır, [14].

q bir reel split kuaterniyon olsun.

$$L_q : \mathbb{H}_S \to \mathbb{H}_S$$
$$p \to L_q(p) = qp$$

dönüşümü tanımlansın. L_q dönüşümü lineer bir dönüşümdür ve bu dönüşüme $\{\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ bazına göre karşılık gelen matris

$$L_q(\boldsymbol{e}_0) = (q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}_0 = q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3$$

$$L_q(\boldsymbol{e}_1) = (q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}_1 = -q_1\boldsymbol{e}_0 + q_0\boldsymbol{e}_1 + q_3\boldsymbol{e}_2 - q_2\boldsymbol{e}_3$$

$$L_q(\boldsymbol{e}_2) = (q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}_2 = q_2\boldsymbol{e}_0 + q_3\boldsymbol{e}_1 + q_0\boldsymbol{e}_2 + q_1\boldsymbol{e}_3$$

$$L_q(\boldsymbol{e}_3) = (q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}_3 = q_3\boldsymbol{e}_0 - q_2\boldsymbol{e}_1 - q_1\boldsymbol{e}_2 + q_0\boldsymbol{e}_3$$

eşitliklerinden

$$\Phi(q)=\begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & q_2 & q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

$M=\left\{\begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & q_2 & q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} : q_0,q_1,q_2,q_3 \in \mathbb{R}\right\}$ olmak üzere

$$\Phi : \mathbb{H}_S \to M$$
$$q \to \Phi(\mathrm{q})$$

dönüşümü lineer izomorfizmdir, [13],[15].

Önerme 3.1 Her $q, p \in \mathbb{H}_S$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. $\Phi(q+p)=\Phi(q)+\Phi(p)$

ii. $\Phi(qp)=\Phi(q)\Phi(p)$

iii. $\Phi(\lambda q)=\lambda\Phi(q)$

iv. $\Phi(\boldsymbol{e}_0)=I_4$, [13],[15].

İspat

$q=q_0\boldsymbol{e}_0+q_1\boldsymbol{e}_1+q_2\boldsymbol{e}_2+q_3\boldsymbol{e}_3,\ p=p_0\boldsymbol{e}_0+p_1\boldsymbol{e}_1+p_2\boldsymbol{e}_2+p_3\boldsymbol{e}_3 \in \mathbb{H}_S$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun.

i. $$\Phi(q+p)=\begin{bmatrix} q_0+p_0 & -(q_1+p_1) & q_2+p_2 & q_3+p_3 \\ q_1+p_1 & q_0+p_0 & q_3+p_3 & -(q_2+p_2) \\ q_2+p_2 & q_3+p_3 & q_0+p_0 & -(q_1+p_1) \\ q_3+p_3 & -(q_2+p_2) & q_1+p_1 & q_0+p_0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & q_2 & q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_0 & p_3 & -p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix}$$

$$= \Phi(q) + \Phi(p).$$

ii. $qp = (q_0 p_0 - q_1 p_1 + q_2 p_2 + q_3 p_3)\boldsymbol{e}_0 + (q_1 p_0 + q_0 p_1 - q_2 p_3 + q_3 p_2)\boldsymbol{e}_1$

$$+ (q_0 p_2 + q_2 p_0 - q_1 p_3 + q_3 p_1)\boldsymbol{e}_2 + (q_0 p_3 + q_3 p_0 - q_2 p_1 + q_1 p_2)\boldsymbol{e}_3$$

denklemi

$A = q_0 p_0 - q_1 p_1 + q_2 p_2 + q_3 p_3,\ B = q_1 p_0 + q_0 p_1 - q_2 p_3 + q_3 p_2,$

$C = q_0 p_2 + q_2 p_0 - q_1 p_3 + q_3 p_1,\ D = q_0 p_3 + q_3 p_0 - q_2 p_1 + q_1 p_2$

ile

$qp = A\boldsymbol{e}_0 + B\boldsymbol{e}_1 + C\boldsymbol{e}_2 + D\boldsymbol{e}_3$

olarak ifade edilirse

$$\Phi(qp) = \begin{bmatrix} A & -B & C & D \\ B & A & D & -C \\ C & D & A & -B \\ D & -C & B & A \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & q_2 & q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_0 & p_3 & -p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix}$$

$$= \Phi(q)\Phi(p).$$

iii. $\Phi(\lambda q) = \begin{bmatrix} \lambda q_0 & -\lambda q_1 & \lambda q_2 & \lambda q_3 \\ \lambda q_1 & \lambda q_0 & \lambda q_3 & -\lambda q_2 \\ \lambda q_2 & \lambda q_3 & \lambda q_0 & -\lambda q_1 \\ \lambda q_3 & -\lambda q_2 & \lambda q_1 & \lambda q_0 \end{bmatrix}$

$$= \lambda \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & q_2 & q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda\Phi(q).$$

iv. $\Phi(\boldsymbol{e}_0)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=I_4.$

$R_q:\mathbb{H}_S\to\mathbb{H}_S$

$p\ \to L_q(p)=pq$

dönüşümü tanımlansın. R_q lineer bir dönüşümdür ve bu lineer dönüşüme $\{\boldsymbol{e}_0,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ bazına göre karşılık gelen matris

$$R_q(\boldsymbol{e}_0)=\boldsymbol{e}_0(q_0\boldsymbol{e}_0+q_1\boldsymbol{e}_1+q_2\boldsymbol{e}_2+q_3\boldsymbol{e}_3)=q_0\boldsymbol{e}_0+q_1\boldsymbol{e}_1+q_2\boldsymbol{e}_2+q_3\boldsymbol{e}_3$$

$$R_q(\boldsymbol{e}_1)=\boldsymbol{e}_1(q_0\boldsymbol{e}_0+q_1\boldsymbol{e}_1+q_2\boldsymbol{e}_2+q_3\boldsymbol{e}_3)=-q_1\boldsymbol{e}_0+q_0\boldsymbol{e}_1-q_3\boldsymbol{e}_2+q_2\boldsymbol{e}_3$$

$$R_q(\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{e}_2(q_0\boldsymbol{e}_0+q_1\boldsymbol{e}_1+q_2\boldsymbol{e}_2+q_3\boldsymbol{e}_3)=q_2\boldsymbol{e}_0-q_3\boldsymbol{e}_1+q_0\boldsymbol{e}_2-q_1\boldsymbol{e}_3$$

$$R_q(\boldsymbol{e}_3)=\boldsymbol{e}_3(q_0\boldsymbol{e}_0+q_1\boldsymbol{e}_1+q_2\boldsymbol{e}_2+q_3\boldsymbol{e}_3)=q_3\boldsymbol{e}_0+q_2\boldsymbol{e}_1+q_1\boldsymbol{e}_2+q_0\boldsymbol{e}_3$$

eşitliklerinden

$$\Psi(q)=\begin{bmatrix}q_0&-q_1&q_2&q_3\\q_1&q_0&-q_3&q_2\\q_2&-q_3&q_0&q_1\\q_3&q_2&-q_1&q_0\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

$N=\left\{\begin{bmatrix}q_0&-q_1&q_2&q_3\\q_1&q_0&-q_3&q_2\\q_2&-q_3&q_0&q_1\\q_3&q_2&-q_1&q_0\end{bmatrix}:q_0,q_1,q_2,q_3\in\mathbb{R}\right\}$ olmak üzere

$\Psi:\mathbb{H}_S\to N$

$q\ \to\Psi(q)$

dönüşümü lineer izomorfizmdir, [13],[15].

Önerme 3.2 Her $q, p\in\mathbb{H}_S$ ve $\lambda\in\mathbb{R}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. $\Psi(q+p)=\Psi(q)+\Psi(p)$

ii. $\Psi(qp)=\Psi(q)\Psi(p)$

iii. $\Psi(\lambda q)=\lambda\Psi(q)$

iv. $\Psi(\boldsymbol{e}_0)=I_4$, [13],[15].

İspat

$q=q_0\boldsymbol{e}_0+q_1\boldsymbol{e}_1+q_2\boldsymbol{e}_2+q_3\boldsymbol{e}_3,\ p=p_0\boldsymbol{e}_0+p_1\boldsymbol{e}_1+p_2\boldsymbol{e}_2+p_3\boldsymbol{e}_3\in\mathbb{H}_S$ ve $\lambda\in\mathbb{R}$ olsun.

i.
$$\Psi(q+p)=\begin{bmatrix} q_0+p_0 & -(q_1+p_1) & q_2+p_2 & q_3+p_3 \\ q_1+p_1 & q_0+p_0 & -(q_3+p_3) & q_2+p_2 \\ q_2+p_2 & -(q_3+p_3) & q_0+p_0 & q_1+p_1 \\ q_3+p_3 & q_2+p_2 & -(q_1+p_1) & q_0+p_0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & q_2 & q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & -p_3 & p_0 & p_1 \\ p_3 & p_2 & -p_1 & p_0 \end{bmatrix}$$

$$=\Psi(q)+\Psi(p).$$

ii. $qp=(q_0p_0-q_1p_1+q_2p_2+q_3p_3)\boldsymbol{e}_0+(q_1p_0+q_0p_1-q_2p_3+q_3p_2)\boldsymbol{e}_1$

$$+(q_0p_2+q_2p_0-q_1p_3+q_3p_1)\boldsymbol{e}_2+(q_0p_3+q_3p_0-q_2p_1+q_1p_2)\boldsymbol{e}_3$$

denklemi

$A=q_0p_0-q_1p_1+q_2p_2+q_3p_3,\ B=q_1p_0+q_0p_1-q_2p_3+q_3p_2,$

$C=q_0p_2+q_2p_0-q_1p_3+q_3p_1,\ D=q_0p_3+q_3p_0-q_2p_1+q_1p_2$

ile

$qp=A\boldsymbol{e}_0+B\boldsymbol{e}_1+C\boldsymbol{e}_2+D\boldsymbol{e}_3$

olarak ifade edilirse

$$\Psi(qp)=\begin{bmatrix} A & -B & C & D \\ B & A & -D & C \\ C & -D & A & B \\ D & C & -B & A \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & q_2 & q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & -p_3 & p_0 & p_1 \\ p_3 & p_2 & -p_1 & p_0 \end{bmatrix}$$

$$=\Psi(q)\Psi(p).$$

iii. $\Psi(\lambda q)=\begin{bmatrix} \lambda q_0 & -\lambda q_1 & \lambda q_2 & \lambda q_3 \\ \lambda q_1 & \lambda q_0 & -\lambda q_3 & \lambda q_2 \\ \lambda q_2 & -\lambda q_3 & \lambda q_0 & \lambda q_1 \\ \lambda q_3 & \lambda q_2 & -\lambda q_1 & \lambda q_0 \end{bmatrix}$

$$=\lambda\begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & q_2 & q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix}$$

$$=\lambda\Psi(q).$$

iv. $\Psi(\boldsymbol{e}_0)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=I_4.$

$\Phi:\mathbb{H}_S\to M$ dönüşümünden aşağıdaki eşitlikler verilebilir:

$$\Phi(\boldsymbol{e}_0)=I_4,\ \Phi(\boldsymbol{e}_1)=\Gamma_1,\ \Phi(\boldsymbol{e}_2)=\Gamma_2,\ \Phi(\boldsymbol{e}_3)=\Gamma_3$$

Burada $I_4, 4\times 4$ birim matris ve

$$\Gamma_1=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ \Gamma_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \Gamma_3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisleri 4×4 reel matrislerdir.

$\Psi : \mathbb{H}_S \to N$ dönüşümünden aşağıdaki eşitlikler verilebilir:

$$\Psi(\boldsymbol{e}_0) = I_4,\ \Psi(\boldsymbol{e}_1) = \Omega_1,\ \Psi(\boldsymbol{e}_2) = \Omega_2,\ \Psi(\boldsymbol{e}_3) = \Omega_3$$

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},\ \Omega_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \Omega_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisleri de 4×4 reel matrislerdir. Ayrıca

$$\Gamma_1^{\,2} = -I_4,\ \Gamma_2^{\,2} = \Gamma_3^{\,2} = I_4,$$

$$\Gamma_1\Gamma_2 = -\Gamma_2\Gamma_1 = \Gamma_3,$$

$$\Gamma_2\Gamma_3 = -\Gamma_3\Gamma_2 = -\Gamma_1,$$

$$\Gamma_3\Gamma_1 = -\Gamma_1\Gamma_3 = \Gamma_2$$

ve

$$\Omega_1^{\,2} = -I_4,\ \Omega_2^{\,2} = \Omega_3^{\,2} = I_4,$$

$$\Omega_1\Omega_2 = -\Omega_2\Omega_1 = \Omega_3,$$

$$\Omega_2\Omega_3 = -\Omega_3\Omega_2 = -\Omega_1,$$

$$\Omega_3\Omega_1 = -\Omega_1\Omega_3 = \Omega_2$$

eşitlikleri sağlanır, [13],[15].

3.2 Kompleks Split Kuaterniyonlar

$q = q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3$ ve $q' = q_0'\boldsymbol{e}_0 + q_1'\boldsymbol{e}_1 + q_2'\boldsymbol{e}_2 + q_3'\boldsymbol{e}_3$ reel split kuaterniyon olmak üzere

Q kompleks split kuaterniyonu

$$Q = q + iq'$$

ile tanımlanır. Daha açık bir ifadeyle; Q kompleks split kuaterniyonu

$$Q = \left(q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3\right) + i\left(q_0'\boldsymbol{e}_0 + q_1'\boldsymbol{e}_1 + q_2'\boldsymbol{e}_2 + q_3'\boldsymbol{e}_3\right)$$
$$= \left(q_0 + q_0'\right)\boldsymbol{e}_0 + \left(q_1 + q_1'\right)\boldsymbol{e}_1 + \left(q_2 + q_2'\right)\boldsymbol{e}_2 + \left(q_3 + q_3'\right)\boldsymbol{e}_3$$
$$= Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1 + Q_2\boldsymbol{e}_2 + Q_3\boldsymbol{e}_3$$

şeklinde yazılır. Burada $\boldsymbol{e}_1^2 = -1,\ \boldsymbol{e}_2^2 = \boldsymbol{e}_3^2 = 1$ olup, Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 katsayıları kompleks sayılardır. Diğer bir ifadeyle, nasıl katsayıları reel ve kompleks olan bir kuaterniyon sırasıyla, reel kuaterniyon ve kompleks kuaterniyon olarak adlandırılıyorsa katsayıları kompleks sayılar olan bir split kuaterniyon da kompleks split kuaterniyon olarak adlandırılır. Kompleks split kuaterniyonların kümesi

$$\mathbb{H}_S^{\mathbb{C}} = \left\{Q = Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1 + Q_2\boldsymbol{e}_2 + Q_3\boldsymbol{e}_3 \,|\, Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{C},\ \boldsymbol{e}_1^2 = -1,\ \boldsymbol{e}_2^2 = \boldsymbol{e}_3^2 = \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 = 1\right\}$$

olarak tanımlanır. Burada $\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ baz elemanlarının çarpımı aşağıdaki gibidir:

$\boldsymbol{e}_1^2 = -1,\ \boldsymbol{e}_2^2 = \boldsymbol{e}_3^2 = 1,$

$\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_3,$

$\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_1,$

$\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_2$, [16].

Tanım 3.7 Bir $Q = Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1 + Q_2\boldsymbol{e}_2 + Q_3\boldsymbol{e}_3$ kompleks split kuaterniyonunun skaler kısmı $S_Q = Q_0\boldsymbol{e}_0$ ve vektörel kısmı $V_Q = Q_1\boldsymbol{e}_1 + Q_2\boldsymbol{e}_2 + Q_3\boldsymbol{e}_3$ olmak üzere

$$Q = S_Q + V_Q$$

şeklinde ifade edilebilir, [16].

Tanım 3.8 $P = P_0\boldsymbol{e}_0 + P_1\boldsymbol{e}_1 + P_2\boldsymbol{e}_2 + P_3\boldsymbol{e}_3$ ve $Q = Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1 + Q_2\boldsymbol{e}_2 + Q_3\boldsymbol{e}_3$ kompleks split kuaterniyonlarının toplamı

$$P + Q = \left(S_P + S_Q\right) + \left(V_P + V_Q\right)$$

ya da

$$P + Q = \left(P_0 + Q_0\right)\boldsymbol{e}_0 + \left(P_1 + Q_1\right)\boldsymbol{e}_1 + \left(P_2 + Q_2\right)\boldsymbol{e}_2 + \left(P_3 + Q_3\right)\boldsymbol{e}_3$$

olarak tanımlanır, [16-17].

Tanım 3.9 Kompleks split kuaterniyonların çarpımı

$$\times : \mathbb{H}_S^{\mathbb{C}} \times \mathbb{H}_S^{\mathbb{C}} \to \mathbb{H}_S^{\mathbb{C}}$$
$$(P,Q) \to P \times Q = PQ$$

biçiminde bir işlem olup $P = P_0\boldsymbol{e}_0 + P_1\boldsymbol{e}_1 + P_2\boldsymbol{e}_2 + P_3\boldsymbol{e}_3$ ve $Q = Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1 + Q_2\boldsymbol{e}_2 + Q_3\boldsymbol{e}_3$ kompleks split kuaterniyonlarının çarpımı

$$PQ = \left(P_0Q_0 - P_1Q_1 + P_2\overline{Q}_2 + P_3\overline{Q}_3\right)\boldsymbol{e}_0 + \left(P_0Q_1 + P_1Q_0 - P_2\overline{Q}_3 + P_3\overline{Q}_2\right)\boldsymbol{e}_1$$
$$+\left(P_0Q_2 - P_1Q_3 + P_2\overline{Q}_0 + P_3\overline{Q}_1\right)\boldsymbol{e}_2 + \left(P_0Q_3 + P_1Q_2 - P_2\overline{Q}_1 + P_3\overline{Q}_0\right)\boldsymbol{e}_3$$

şeklinde tanımlıdır, [16].

Tanım 3.10 Bir Q kompleks split kuaterniyonun kuaterniyon eşleniği

$$\overline{(,)} : \mathbb{H}_S^{\mathbb{C}} \to \mathbb{H}_S^{\mathbb{C}}$$
$$Q \to \overline{Q} = S_Q - V_Q$$

olmak üzere $Q = Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1 + Q_2\boldsymbol{e}_2 + Q_3\boldsymbol{e}_3$ için

$$\overline{Q} = Q_0\boldsymbol{e}_0 - Q_1\boldsymbol{e}_1 - Q_2\boldsymbol{e}_2 - Q_3\boldsymbol{e}_3$$

olarak tanımlanır, [17].

3.2.1 Kompleks Split Kuaterniyonların 2×2 Matris Temsili

Bir $Q = Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1 + Q_2\boldsymbol{e}_2 + Q_3\boldsymbol{e}_3 \in \mathbb{H}_S^{\mathbb{C}}$ kompleks split kuaterniyonu $Z_1 = Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1$ ve $Z_2 = Q_2\boldsymbol{e}_0 + Q_3\boldsymbol{e}_1$ kompleks sayıları için $Q = Z_1\boldsymbol{e}_0 + Z_2\boldsymbol{e}_2$ olacak şekilde yazılabilir.

$f_Q : \mathbb{H}_S^{\mathbb{C}} \to \mathbb{H}_S^{\mathbb{C}}$ lineer dönüşümü $f_Q(P) = QP$ şeklinde tanımlansın. Bu dönüşüm bire birdir ve

$$f_Q(\boldsymbol{e}_0) = \boldsymbol{e}_0(Z_1\boldsymbol{e}_0 + Z_2\boldsymbol{e}_2) = Z_1\boldsymbol{e}_0 + Z_2\boldsymbol{e}_2$$

$$f_Q(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_2(Z_1\boldsymbol{e}_0 + Z_2\boldsymbol{e}_2) = \overline{Z_2}\boldsymbol{e}_0 + \overline{Z_1}\boldsymbol{e}_2$$

dir. Böylece bu dönüşümle kompleks split kuaterniyonlar $M_2(\mathbb{C})$ matris halkasının

$$\mathbb{Q}' = \left\{ \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \\ \overline{Z_2} & \overline{Z_1} \end{bmatrix} : Z_1, Z_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

alt kümesi olarak tanımlanır.

$F : \mathbb{H}_S^{\mathbb{C}} \to \mathbb{Q}',\ F(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) \mapsto \begin{bmatrix} Q_0 \boldsymbol{e}_0 + Q_1 \boldsymbol{e}_1 & Q_2 \boldsymbol{e}_0 + Q_3 \boldsymbol{e}_1 \\ \overline{Q}_2 \boldsymbol{e}_0 - \overline{Q}_3 \boldsymbol{e}_1 & \overline{Q}_0 \boldsymbol{e}_0 - \overline{Q}_1 \boldsymbol{e}_1 \end{bmatrix}$ dönüşümü bir lineer izomorfizma olup,

$$F(\boldsymbol{e}_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_0$$
$$F(\boldsymbol{e}_1) = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = E_1$$
$$F(\boldsymbol{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = E_2$$
$$F(\boldsymbol{e}_3) = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} = E_3$$

şeklindedir.

Tanım 3.11 Bir kompleks split kuaterniyon matrisi Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 kompleks katsayılarının ve

$$E_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E_1 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \text{[11]}$$

baz matrislerinin lineer birleşimi olarak $Q = Q_0 E_0 + Q_1 E_1 + Q_2 E_2 + Q_3 E_3$ şeklinde ifade edilebilir. Burada E_0, E_1, E_2, E_3 baz matrisleri, kompleks split kuaterniyonun $\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ baz elemanları gibi aynı çarpım kurallarını sağlar:

$$E_1^2 = -E_0,\ E_2^2 = E_3^2 = E_0,$$
$$E_1 E_2 = -E_2 E_1 = E_3,$$
$$E_2 E_3 = -E_3 E_2 = -E_1,$$
$$E_3 E_1 = -E_1 E_3 = E_2,$$
$$E_0 E_j = E_j E_0 = E_j\ (j = 1, 2, 3).$$

Kompleks split kuaterniyonların 2×2 matris temsilinin kümesi

$$\mathbb{H}_S^{\mathbb{C}'} = \left\{ Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3 = \begin{bmatrix} Q_0 + iQ_1 & Q_2 + iQ_3 \\ Q_2 - iQ_3 & Q_0 - iQ_1 \end{bmatrix} : Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{C},\ E_1^2 = -E_0,\ E_2^2 = E_3^2 = E_0 \right\}$$

ile tanımlanır ve bu kümenin her bir elemanı kompleks split kuaterniyon matrisi olarak adlandırılır.

Tanım 3.12 Bir Q kompleks split kuaterniyon matrisinin skaler matris kısmı $S_Q = Q_0E_0$ ve imajiner matris kısmı $ImQ = Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3$ ile gösterilir. Böylece Q kompleks split kuaterniyon matrisi

$$Q = S_Q + ImQ$$

şeklinde ifade edilebilir.

Tanım 3.13 Bir Q kompleks split kuaterniyon matrisinin kuaterniyon eşleniği $\overline{Q}$ ile gösterilir ve

$$\begin{aligned} \overline{(,)} &: \mathbb{H}_S^{\mathbb{C}'} \to \mathbb{H}_S^{\mathbb{C}'} \\ Q &\to \overline{Q} = S_Q - ImQ \end{aligned}$$

olmak üzere $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3$ kompleks split kuaterniyon matrisinin eşleniği

$$\overline{Q} = Q_0E_0 - Q_1E_1 - Q_2E_2 - Q_3E_3 \tag{3.1}$$

eşitliği ile tanımlanır.

Tanım 3.14 Bir Q kompleks split kuaterniyon matrisinin kompleks eşleniği Q^C ile gösterilir ve $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3$ kompleks split kuaterniyon matrisinin kompleks eşleniği

$$\begin{aligned} Q^C &= Q_0\overline{E_0} + Q_1\overline{E_1} + Q_2\overline{E_2} + Q_3\overline{E_3} \\ &= Q_0E_0 - Q_1E_1 + Q_2E_2 - Q_3E_3 \end{aligned} \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.15 Bir Q kompleks split kuaterniyon matrisinin total eşleniği $\left(\overline{Q}\right)^C$ ile gösterilir ve $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3$ kompleks split kuaterniyon matrisinin total eşleniği

$$\left(\bar{Q}\right)^{C} = \overline{\left(Q^{C}\right)} = Q_0\overline{E_0} - Q_1\overline{E_1} - Q_2\overline{E_2} - Q_3\overline{E_3}$$
$$= Q_0E_0 + Q_1E_1 - Q_2E_2 + Q_3E_3$$

ile tanımlanır.

Tanım 3.16 Bir $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3$ kompleks split kuaterniyon matrisinin transpozu Q^t ile gösterilir ve

$$Q^t = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 - Q_3E_3 \tag{3.3}$$

ile tanımlanır.

Tanım 3.17 Bir $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3$ kompleks split kuaterniyon matrisinin ek matrisi EkQ ile gösterilir ve

$$EkQ = Q_0E_0 - Q_1E_1 - Q_2E_2 - Q_3E_3$$

olarak tanımlanır. Ayrıca

$$EkQ = \bar{Q}$$

dir.

Tanım 3.18 Bir $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3 = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ \bar{q}_{12} & \bar{q}_{11} \end{bmatrix}$ kompleks split kuaterniyon matrisinin normu

$$\|Q\| = \sqrt{\left|\|q_{11}\|^2 - |q_{12}|^2\right|}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.19 Bir $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3 = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ \bar{q}_{12} & \bar{q}_{11} \end{bmatrix}$ kompleks split kuaterniyon matrisinin determinantı

$$\det Q = q_{11}\bar{q}_{11} - q_{12}\bar{q}_{12}$$

dir.

Tanım 3.20 Bir Q kompleks split kuaterniyon matrisinin determinantı

$$\det Q = Q_0^2 \det E_0 + Q_1^2 \det E_1 + Q_2^2 \det E_2 + Q_3^2 \det E_3$$

olup, kompleks split kuaterniyon matrisinin bazlarının determinantları yardımıyla

$$\det Q = Q_0^2 + Q_1^2 - Q_2^2 - Q_3^2 \tag{3.4}$$

şeklinde tanımlanabilir.

Teorem 3.2 Q ve P kompleks split kuaterniyon matrisleri için aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. $\det Q = \det\left(\bar{Q}\right) = \det Q^C$

ii. $\det\left(\psi Q\right) = \psi^2 \det Q,\ \psi \in \mathbb{C}$

iii. $\det\left(PQ\right) = \det P \det Q$

İspat

i. Bir $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3 \in \mathbb{H}_S^{\mathbb{C}'}$ için 3.20 tanımından

$$\det Q = \det\left(\bar{Q}\right) = \det Q^C = Q_0^2 + Q_1^2 - Q_2^2 - Q_3^2$$

bulunur.

ii. Bir $\psi \in \mathbb{C}$ ve $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3 \in \mathbb{H}_S^{\mathbb{C}'}$ için

$$\psi Q = \left(\psi Q_0\right)E_0 + \left(\psi Q_1\right)E_1 + \left(\psi Q_2\right)E_2 + \left(\psi Q_3\right)E_3$$

olarak bulunur. Böylece 3.20 tanımından

$$\begin{aligned}\det\left(\psi Q\right) &= \psi^2 Q_0^2 + \psi^2 Q_1^2 - \psi^2 Q_2^2 - \psi^2 Q_3^2 \\ &= \psi^2\left(Q_0^2 + Q_1^2 - Q_2^2 - Q_3^2\right) \\ &= \psi^2 \det Q\end{aligned}$$

elde edilir.

iii. $P = P_0E_0 + P_1E_1 + P_2E_2 + P_3E_3$ ve $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3$ kompleks split kuaterniyon matrisleri için

$$PQ=\left(P_0Q_0-P_1Q_1+P_2Q_2+P_3Q_3\right)E_0+\left(P_0Q_1+P_1Q_0-P_2Q_3+P_3Q_2\right)E_1$$
$$+\left(P_0Q_2+P_2Q_0-P_1Q_3+P_3Q_1\right)E_2+\left(P_0Q_3+P_3Q_0+P_1Q_2-P_2Q_1\right)E_3$$

bulunur ve 3.20 tanımından

$$\det\left(PQ\right)=P_0^2Q_0^2+P_0^2Q_1^2+P_1^2Q_0^2+P_1^2Q_1^2+P_2^2Q_2^2+P_2^2Q_3^2+P_3^2Q_2^2+P_3^2Q_3^2$$
$$-P_0^2Q_2^2-P_0^2Q_3^2-P_1^2Q_2^2-P_1^2Q_3^2-P_2^2Q_0^2-P_2^2Q_1^2-P_3^2Q_0^2-P_3^2Q_1^2$$

olarak elde edilir. Diğer yandan, P ve Q kompleks split kuaterniyon matrislerinin determinantları sırasıyla, $P_0^2+P_1^2-P_2^2-P_3^2$ ve $Q_0^2+Q_1^2-Q_2^2-Q_3^2$ olduğundan

$$\det P\det Q=P_0^2Q_0^2+P_0^2Q_1^2+P_1^2Q_0^2+P_1^2Q_1^2+P_2^2Q_2^2+P_2^2Q_3^2+P_3^2Q_2^2+P_3^2Q_3^2$$
$$-P_0^2Q_2^2-P_0^2Q_3^2-P_1^2Q_2^2-P_1^2Q_3^2-P_2^2Q_0^2-P_2^2Q_1^2-P_3^2Q_0^2-P_3^2Q_1^2$$

olarak bulunur. Böylece

$$\det\left(PQ\right)=\det P\det Q$$

olduğu görülür.

Tanım 3.21 Bir $Q=Q_0E_0+Q_1E_1+Q_2E_2+Q_3E_3$ kompleks split kuaterniyon matrisinin determinantı Q'nun kompleks eşleniği ve total eşleniği yardımıyla bulunabilir. Burada

$$Q^C\left(\bar{Q}\right)^C=\left(\bar{Q}\right)^CQ^C=\left(Q_0^2+Q_1^2-Q_2^2-Q_3^2\right)E_0$$

olup, 3.20 tanımından

$$\det\left(Q^C\left(\bar{Q}\right)^C\right)=\left(Q_0^2+Q_1^2-Q_2^2-Q_3^2\right)^2$$

bulunur. Böylece Q kompleks split kuaterniyon matrisinin determinantı

$$\det Q=\sqrt{\det\left(Q^C\left(\bar{Q}\right)^C\right)}$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 3.3 Her $Q\in\mathbb{H}_S^{\mathbb{C}'}$ kompleks split kuaterniyon matrisi için aşağıdakiler sağlanır:

i. Herhangi bir c kompleks sayısı için $E_1c=cE_1,\ E_2c=cE_2,\ E_3c=cE_3$ dir.

ii. $Q^2=S_Q^2-\det\left(ImQ\right)E_0+2S_QImQ.$

iii. Her Q kompleks split kuaterniyon matrisi, $C_1, C_2 \in M_2(\mathbb{C})$ olmak üzere $Q = C_1 + C_2 E_2$ olarak tek türlü ifade edilebilir.

Teoremin ispatı Teorem 2.2'nin ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Tanım 3.22 Bir Q kompleks split kuaterniyon matrisinin tersi Q^{-1} ile gösterilir. $Q = Q_0 E_0 + Q_1 E_1 + Q_2 E_2 + Q_3 E_3$ kompleks split kuaterniyon matrisi için $\det Q \neq 0$ olmak üzere

$$Q^{-1} = \frac{1}{\det Q} \bar{Q}$$

ya da

$$Q^{-1} = \frac{\bar{Q}}{\sqrt{\det\left(Q^C \left(\bar{Q}\right)^C\right)}}$$

şeklinde tanımlanır. Daha açık bir ifadeyle, Q kompleks split kuaterniyon matrisinin tersi

$$Q^{-1} = \frac{1}{Q_0^2 + Q_1^2 - Q_2^2 - Q_3^2}\left(Q_0 E_0 - Q_1 E_1 - Q_2 E_2 - Q_3 E_3\right) \tag{3.5}$$

şeklinde yazılabilir.

Örnek 3.1 $Q = \left(\frac{1-i}{2}\right)E_0 + \left(\frac{1-i}{2}\right)E_1 - \frac{1}{2}E_2 + \frac{i}{2}E_3$ bir kompleks split kuaterniyon matrisi olsun. Q kompleks split kuaterniyon matrisi $Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ şeklinde yazılabilir. Böylece (3.5) eşitliğinden Q kompleks split kuaterniyon matrisinin tersi

$$\begin{aligned} Q^{-1} &= \left(\frac{1+i}{2}\right)E_0 + \left(\frac{-1-i}{2}\right)E_1 + \frac{i}{2}E_2 + \frac{1}{2}E_3 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Teorem 3.4 $Q, P \in \mathbb{H}_S^{\mathbb{C}'}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. $\det Q = \|Q\|^2$ dir.

ii. Q terslenebilir ise $\left(\bar{Q}\right)^{-1} = \overline{\left(Q^{-1}\right)}$ dir.

iii. Q terslenebilir ise $\left(Q^C\right)^{-1} = \left(Q^{-1}\right)^C$ dir.

iv. Q terslenebilir ise $\left[\left(\bar{Q}\right)^t\right]^{-1} = \left[\overline{\left(Q^{-1}\right)}\right]^t$ dir.

v. $\left(QP\right)^C = Q^C P^C$ dir.

vi. Q ve P terslenebilir ise $\left(QP\right)^{-1} = P^{-1}Q^{-1}$ dir.

İspat

i. $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3$ bir kompleks split kuaterniyon matrisi olsun. Q'nun normu ve determinantı, sırasıyla

$$\|Q\| = \sqrt{\left|Q_0^2 + Q_1^2 - Q_2^2 - Q_3^2\right|}$$

ve

$$\det Q = Q_0^2 + Q_1^2 - Q_2^2 - Q_3^2$$

olduğundan

$$\det Q = \|Q\|^2$$

elde edilir.

ii. $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3 \in \mathbb{H}_S^{\mathbb{C}'}$ ve $\det Q \neq 0$ olsun. (3.1) ve (3.5) eşitlikleri yardımıyla

$$\left(\bar{Q}\right)^{-1} = \overline{\left(Q^{-1}\right)} = \frac{1}{Q_0^2 + Q_1^2 - Q_2^2 - Q_3^2}\left(Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3\right)$$

bulunur.

iii. $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3 \in \mathbb{H}_S^{\mathbb{C}'}$ ve $\det Q \neq 0$ olsun. Bir kompleks split kuaterniyon matrisinin kompleks eşleniğinin

$$Q^C = Q_0E_0 - Q_1E_1 + Q_2E_2 - Q_3E_3$$

olduğunu biliyoruz. (3.5) eşitliğinden

$$\left(Q^C\right)^{-1} = \frac{1}{Q_0^2 + Q_1^2 - Q_2^2 - Q_3^2}\left(Q_0E_0 + Q_1E_1 - Q_2E_2 + Q_3E_3\right)$$

bulunur.

Ayrıca (3.5) ve (3.1) eşitliklerinden

$$\left(Q^{-1}\right)^C = \frac{1}{Q_0^2 + Q_1^2 - Q_2^2 - Q_3^2}\left(Q_0E_0 + Q_1E_1 - Q_2E_2 + Q_3E_3\right)$$

olduğundan

$$\left(Q^C\right)^{-1} = \left(Q^{-1}\right)^C$$

elde edilir.

iv. $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3 \in \mathbb{H}_S^{\mathbb{C}'}$ ve $\det Q \neq 0$ olsun. (3.3), (3.1) ve (3.5) eşitliklerinden

$$\left[\left(\bar{Q}\right)^t\right]^{-1} = \left[\overline{\left(Q^{-1}\right)}\right]^t = \frac{1}{Q_0^2 + Q_1^2 - Q_2^2 - Q_3^2}\left(Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 - Q_3E_3\right)$$

olduğu kolaylıkla görülebilir.

v. $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3$ ve $P = P_0E_0 + P_1E_1 + P_2E_2 + P_3E_3$ kompleks split kuaterniyon matrisleri olsun.

$$\begin{aligned} QP = {} & \left(Q_0P_0 - Q_1P_1 + Q_2P_2 + Q_3P_3\right)E_0 + \left(Q_0P_1 + Q_1P_0 - Q_2P_3 + Q_3P_2\right)E_1 \\ & + \left(Q_0P_2 - Q_1P_3 + Q_2P_0 + Q_3P_1\right)E_2 + \left(Q_0P_3 + Q_1P_2 - Q_2P_1 + Q_3P_0\right)E_3 \end{aligned}$$

olup (3.5) eşitliğinden QP 'nin kompleks eşleniği

$$\begin{aligned} \left(QP\right)^C = {} & \left(Q_0P_0 - Q_1P_1 + Q_2P_2 + Q_3P_3\right)E_0 + \left(-Q_0P_1 - Q_1P_0 + Q_2P_3 - Q_3P_2\right)E_1 \\ & + \left(Q_0P_2 - Q_1P_3 + Q_2P_0 + Q_3P_1\right)E_2 + \left(-Q_0P_3 - Q_1P_2 + Q_2P_1 - Q_3P_0\right)E_3 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Öte yandan, $Q \in \mathbb{H}_S^{\mathbb{C}'}$ 'nin kompleks eşleniği $Q^C = Q_0E_0 - Q_1E_1 + Q_2E_2 - Q_3E_3$ ve

$P \in \mathbb{H}_S^{\mathbb{C}'}$'nin kompleks eşleniği $P^C = P_0E_0 - P_1E_1 + P_2E_2 - P_3E_3$ için

$$Q^C P^C = \left(Q_0P_0 - Q_1P_1 + Q_2P_2 + Q_3P_3\right)E_0 + \left(-Q_0P_1 - Q_1P_0 + Q_2P_3 - Q_3P_2\right)E_1$$
$$+ \left(Q_0P_2 - Q_1P_3 + Q_2P_0 + Q_3P_1\right)E_2 + \left(-Q_0P_3 - Q_1P_2 + Q_2P_1 - Q_3P_0\right)E_3$$

olup, buradan

$$\left(QP\right)^C = Q^C P^C$$

elde edilir.

vi. $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3$ ve $P = P_0E_0 + P_1E_1 + P_2E_2 + P_3E_3$ terslenebilir kompleks split kuaterniyon matrisleri olsun.

$$QP = \left(Q_0P_0 - Q_1P_1 + Q_2P_2 + Q_3P_3\right)E_0 + \left(Q_0P_1 + Q_1P_0 - Q_2P_3 + Q_3P_2\right)E_1$$
$$+ \left(Q_0P_2 - Q_1P_3 + Q_2P_0 + Q_3P_1\right)E_2 + \left(Q_0P_3 + Q_1P_2 - Q_2P_1 + Q_3P_0\right)E_3$$

dir. Kolaylık açısından

$$A = Q_0P_0 - Q_1P_1 + Q_2P_2 + Q_3P_3,\ B = Q_0P_1 + Q_1P_0 - Q_2P_3 + Q_3P_2,$$

$$C = Q_0P_2 - Q_1P_3 + Q_2P_0 + Q_3P_1,\ D = Q_0P_3 + Q_1P_2 - Q_2P_1 + Q_3P_0$$

olmak üzere

$$QP = AE_0 + BE_1 + CE_2 + DE_3$$

şeklinde ifade edilsin.

$$A^2 + B^2 - C^2 - D^2 = Q_0^2P_0^2 + Q_1^2P_1^2 + Q_2^2P_2^2 + Q_3^2P_3^2 + Q_0^2P_1^2 + Q_1^2P_0^2 + Q_2^2P_3^2 + Q_3^2P_2^2$$
$$- Q_0^2P_2^2 - Q_1^2P_3^2 - Q_2^2P_0^2 - Q_3^2P_1^2 - Q_0^2P_3^2 - Q_1^2P_2^2 - Q_2^2P_1^2 - Q_3^2P_0^2$$

olup QP'nin determinantı

$$\det\left(QP\right) = A^2 + B^2 - C^2 - D^2$$

dir. (3.5) eşitliğinden

$$\left(QP\right)^{-1} = \frac{\overline{\left(QP\right)}}{\det\left(QP\right)} = \frac{AE_0 - BE_1 - CE_2 - DE_3}{A^2 + B^2 - C^2 - D^2}$$

elde edilir.

Diğer yandan, (3.5) eşitliğinden Q ve P kompleks split kuaterniyon matrislerinin tersleri, sırasıyla

$$Q^{-1}=\frac{1}{Q_0^2+Q_1^2-Q_2^2-Q_3^2}\left(Q_0E_0-Q_1E_1-Q_2E_2-Q_3E_3\right)$$

ve

$$P^{-1}=\frac{1}{P_0^2+P_1^2-P_2^2-P_3^2}\left(P_0E_0-P_1E_1-P_2E_2-P_3E_3\right)$$

dir. Buradan

$$P^{-1}Q^{-1}=\frac{AE_0-BE_1-CE_2-DE_3}{A^2+B^2-C^2-D^2}$$

bulunur. O halde

$$\left(QP\right)^{-1}=P^{-1}Q^{-1}$$

dir.

Tanım 3.23 Herhangi bir $Q=Q_0E_0+Q_1E_1+Q_2E_2+Q_3E_3\in\mathbb{H}_S^{\mathbb{C}'}$ için

i. Q bir diyagonal matris ise $Q=Q_0E_0+Q_1E_1$,

ii. Q bir simetrik matris ise $Q=Q_0E_0+Q_1E_1+Q_2E_2$,

iii. Q bir ortogonal matris ise $\det Q=1$ ve $Q=Q_0E_0+Q_3E_3$,

iv. Q bir Hermityan matris ise $Q=Q_0E_0+Q_3E_3$,

v. Q bir üniter matris ise $\det Q=1$ ve $Q=Q_0E_0+Q_1E_1+Q_2E_2$

şeklinde ifade edilir.

Örnek 3.2 $P=E_0+E_2+E_3$ ve $Q=E_0+E_1$ kompleks split kuaterniyon olsun.

i. $\left(PQ\right)^C=E_0-E_1+2E_2\neq E_0-E_1-2E_3=Q^CP^C$

ii. $P\left(\bar{P}\right)^C=E_0-2E_1+2E_3\neq E_0+2E_1+2E_3=\left(\bar{P}\right)^C P$

Örnekleri yardımıyla kompleks split kuaterniyon matrisleri için Sonuç 3.1 elde edilir.

Sonuç 3.1 $P,Q \in \mathbb{H}_S^{\mathbb{C}'}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. $(PQ)^C \neq Q^C P^C$

ii. $P(\bar{P})^C \neq (\bar{P})^C P$

3.2.2 Kompleks Split Kuaterniyonların 4×4 Kompleks Matris Temsili

Teorem 3.5 Her kompleks split kuaterniyon bir 4×4 kompleks matris olarak temsil edilebilir.

İspat

$Q = Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1 + Q_2\boldsymbol{e}_2 + Q_3\boldsymbol{e}_3$ bir kompleks split kuaterniyon olsun.

$$f_Q : \mathbb{H}_S^{\mathbb{C}} \to \mathbb{H}_S^{\mathbb{C}}$$
$$P \to f_Q(P) = QP$$

lineer dönüşümünü tanımlayalım.

$$f_Q(\boldsymbol{e}_0) = Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1 + Q_2\boldsymbol{e}_2 + Q_3\boldsymbol{e}_3$$

$$f_Q(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1(Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1 + Q_2\boldsymbol{e}_2 + Q_3\boldsymbol{e}_3) = -Q_1\boldsymbol{e}_0 + Q_0\boldsymbol{e}_1 - Q_3\boldsymbol{e}_2 + Q_2\boldsymbol{e}_3$$

$$f_Q(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_2(Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1 + Q_2\boldsymbol{e}_2 + Q_3\boldsymbol{e}_3) = \overline{Q_2}\boldsymbol{e}_0 - \overline{Q_3}\boldsymbol{e}_1 + \overline{Q_0}\boldsymbol{e}_2 - \overline{Q_1}\boldsymbol{e}_3$$

$$f_Q(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_3(Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1 + Q_2\boldsymbol{e}_2 + Q_3\boldsymbol{e}_3) = \overline{Q_3}\boldsymbol{e}_0 + \overline{Q_2}\boldsymbol{e}_1 + \overline{Q_1}\boldsymbol{e}_2 + \overline{Q_0}\boldsymbol{e}_3$$

eşitliklerinden, kompleks split kuaterniyonlar kümesi, $M_4(\mathbb{C})$'nin

$$\left\{ \begin{bmatrix} Q_0 & Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ -Q_1 & Q_0 & -Q_3 & Q_2 \\ \overline{Q_2} & -\overline{Q_3} & \overline{Q_0} & -\overline{Q_1} \\ \overline{Q_3} & \overline{Q_2} & \overline{Q_1} & \overline{Q_0} \end{bmatrix}_{4\times4} \mid Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{C} \right\}$$

alt kümesi olarak yazılabilir, [16].

3.2.3 Kompleks Split Kuaterniyonların 8×8 Reel Matris Temsili

Bir $Q = Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1 + Q_2\boldsymbol{e}_2 + Q_3\boldsymbol{e}_3$ kompleks split kuaterniyonu için $Q_0 = a_0 + ib_0,\ Q_1 = a_1 + ib_1,\ Q_2 = a_2 + ib_2,\ Q_3 = a_3 + ib_3 \in \mathbb{C}$ olduğundan

$$Q = a_0\boldsymbol{e}_0 + a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 + b_0i\boldsymbol{e}_0 + b_1i\boldsymbol{e}_1 + b_2i\boldsymbol{e}_2 + b_3i\boldsymbol{e}_3$$

şekinde ifade edilebilir.

Her $Q \in \mathbb{H}_S^{\mathbb{C}}$ için

$$G_Q : \mathbb{H}_S^{\mathbb{C}} \to \mathbb{H}_S^{\mathbb{C}}$$

$$G_Q(P) = QP$$

lineer dönüşümünü tanımlayalım. $G_Q : \mathbb{H}_S^{\mathbb{C}} \to \mathbb{H}_S^{\mathbb{C}}$ dönüşümü bire birdir.

$Q = a_0\boldsymbol{e}_0 + a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 + b_0i\boldsymbol{e}_0 + b_1i\boldsymbol{e}_1 + b_2i\boldsymbol{e}_2 + b_3i\boldsymbol{e}_3 \in \mathbb{H}_S^{\mathbb{C}}$ için

$$G_Q(\boldsymbol{e}_0) = a_0\boldsymbol{e}_0 + a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 + b_0i\boldsymbol{e}_0 + b_1i\boldsymbol{e}_1 + b_2i\boldsymbol{e}_2 + b_3i\boldsymbol{e}_3$$

$$G_Q(\boldsymbol{e}_1) = -a_1\boldsymbol{e}_0 + a_0\boldsymbol{e}_1 + a_3\boldsymbol{e}_2 - a_2\boldsymbol{e}_3 - b_1i\boldsymbol{e}_0 + b_0i\boldsymbol{e}_1 + b_3i\boldsymbol{e}_2 - b_2i\boldsymbol{e}_3$$

$$G_Q(\boldsymbol{e}_2) = a_2\boldsymbol{e}_0 + a_3\boldsymbol{e}_1 + a_0\boldsymbol{e}_2 + a_1\boldsymbol{e}_3 + b_2i\boldsymbol{e}_0 + b_3i\boldsymbol{e}_1 + b_0i\boldsymbol{e}_2 + b_1i\boldsymbol{e}_3$$

$$G_Q(\boldsymbol{e}_3) = a_3\boldsymbol{e}_0 - a_2\boldsymbol{e}_1 - a_1\boldsymbol{e}_2 + a_0\boldsymbol{e}_3 + b_3i\boldsymbol{e}_0 - b_2i\boldsymbol{e}_1 - b_1i\boldsymbol{e}_2 + b_0i\boldsymbol{e}_3$$

$$G_Q(i\boldsymbol{e}_0) = -b_0\boldsymbol{e}_0 - b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3 + a_0i\boldsymbol{e}_0 + a_1i\boldsymbol{e}_1 - a_2i\boldsymbol{e}_2 - a_3i\boldsymbol{e}_3$$

$$G_Q(i\boldsymbol{e}_1) = b_1\boldsymbol{e}_0 - b_0\boldsymbol{e}_1 + b_3\boldsymbol{e}_2 - b_2\boldsymbol{e}_3 - a_1i\boldsymbol{e}_0 + a_0i\boldsymbol{e}_1 - a_3i\boldsymbol{e}_2 + a_2i\boldsymbol{e}_3$$

$$G_Q(i\boldsymbol{e}_2) = b_2\boldsymbol{e}_0 + b_3\boldsymbol{e}_1 - b_0\boldsymbol{e}_2 - b_1\boldsymbol{e}_3 - a_2i\boldsymbol{e}_0 - a_3i\boldsymbol{e}_1 + a_0i\boldsymbol{e}_2 + a_1i\boldsymbol{e}_3$$

$$G_Q(i\boldsymbol{e}_3) = b_3\boldsymbol{e}_0 - b_2\boldsymbol{e}_1 + b_1\boldsymbol{e}_2 - b_0\boldsymbol{e}_3 - a_3i\boldsymbol{e}_0 + a_2i\boldsymbol{e}_1 - a_1i\boldsymbol{e}_2 + a_3i\boldsymbol{e}_3$$

eşitlikleri sağlanır. Bu dönüşüm yardımı ile $\mathbb{H}_S^{\mathbb{C}}$ ve

$$\left\{ \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & a_2 & a_3 & -b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 & -b_1 & -b_0 & b_3 & -b_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 & b_2 & b_3 & -b_0 & b_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 & b_3 & -b_2 & -b_1 & -b_0 \\ b_0 & -b_1 & b_2 & b_3 & a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ b_1 & b_0 & b_3 & -b_2 & a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ b_2 & b_3 & b_0 & -b_1 & -a_2 & -a_3 & a_0 & -a_1 \\ b_3 & -b_2 & b_1 & b_0 & -a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}_{8\times 8} : a_n, b_n \in \mathbb{R} \right\}$$

matrisi arasında bir izomorfizma tanımlanır, [17].

BÖLÜM 4

REEL VE KOMPLEKS YARI KUATERNİYONLAR

Bu bölümde reel ve kompleks yarı kuaterniyonlar hakkında temel bilgiler verilmiştir. Bu bölümün orijinal kısmında kompleks yarı kuaterniyonların 2×2 kompleks matris temsili incelenmiş ve 4×4 kompleks matris temsili ile 8×8 reel matris temsili ifade edilmiştir.

4.1 Reel Yarı Kuaterniyonlar

Reel yarı kuaterniyonların kümesi

$$\mathcal{H}=\{q=q_0\boldsymbol{e}_0+q_1\boldsymbol{e}_1+q_2\boldsymbol{e}_2+q_3\boldsymbol{e}_3 \mid q_0,q_1,q_2,q_3\in\mathbb{R}\}$$

ile gösterilsin. Burada $\boldsymbol{e}_0,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ baz elemanları

$$\boldsymbol{e}_1^2=-1,\ \boldsymbol{e}_2^2=\boldsymbol{e}_3^2=0,$$

$$\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2=-\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_3,$$

$$\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2=0,$$

$$\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1=-\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_2,$$

eşitliklerini sağlar, [11]. Bir $q=q_0\boldsymbol{e}_0+q_1\boldsymbol{e}_1+q_2\boldsymbol{e}_2+q_3\boldsymbol{e}_3$ reel yarı kuaterniyonunun skaler kısmı $S_q=a_0\boldsymbol{e}_0$ ve vektörel kısmı $V_q=q_1\boldsymbol{e}_1+q_2\boldsymbol{e}_2+q_3\boldsymbol{e}_3$ ile tanımlanır, [18]. Reel yarı kuaterniyonlar kümesi $\langle q,p\rangle=q_0p_0-q_1p_1$ dejenere skaler çarpım ile $\mathbb{R}_2^4$ yarı-Öklid uzayı yapısındadır, [19].

Tanım 4.1 $q = q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3$ ve $p = q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3$ reel yarı kuaterniyonlarının toplamı

$$q + p = \left(S_q + S_p\right) + \left(V_q + V_p\right)$$

ya da

$$q + p = \left(q_0 + p_0\right)\boldsymbol{e}_0 + \left(q_1 + p_1\right)\boldsymbol{e}_1 + \left(q_2 + p_2\right)\boldsymbol{e}_2 + \left(q_3 + p_3\right)\boldsymbol{e}_3$$

şeklinde tanımlanır, [18].

Tanım 4.2 Bir $q = q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3$ reel yarı kuaterniyonunun $\lambda \in \mathbb{R}$ skaleri ile çarpımı

$$\lambda q = \left(\lambda q_0\right)\boldsymbol{e}_0 + \left(\lambda q_1\right)\boldsymbol{e}_1 + \left(\lambda q_2\right)\boldsymbol{e}_2 + \left(\lambda q_3\right)\boldsymbol{e}_3$$

ile tanımlanır, [18].

Tanım 4.3 Reel yarı kuaterniyonların çarpımı

$$\begin{aligned} &\times : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H} \\ &\quad (q, p) \to q \times p = qp \end{aligned}$$

biçiminde bir işlem olup $q = q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3$ ve $p = q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3$ reel yarı kuaterniyonlarının çarpımı

$$\begin{aligned} qp = &\left(q_0 p_0 - q_1 p_1\right)\boldsymbol{e}_0 + \left(q_0 p_1 + q_1 p_0\right)\boldsymbol{e}_1 + \left(q_0 p_2 - q_1 p_3 + q_2 p_0 + q_3 p_1\right)\boldsymbol{e}_2 \\ &+ \left(q_0 p_3 + q_1 p_2 - q_2 p_1 + q_3 p_0\right)\boldsymbol{e}_3 \end{aligned}$$

olarak tanımlanır, [18].

Tanım 4.4 Bir q reel yarı kuaterniyonunun eşleniği

$$\begin{aligned} &\overline{(,)} : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \\ &\quad q \to \overline{q} = S_q - V_q \end{aligned}$$

olmak üzere $q = q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3$ için

$$\overline{q} = q_0\boldsymbol{e}_0 - q_1\boldsymbol{e}_1 - q_2\boldsymbol{e}_2 - q_3\boldsymbol{e}_3$$

olarak tanımlanır ve

$$q\bar{q} = \bar{q}q = \left(q_0^2 + q_1^2\right)\boldsymbol{e}_0$$

şeklindedir, [11].

Tanım 4.5 Bir q reel yarı kuaterniyonunun normu

$$\| \ \| : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$$
$$q \to \|q\| = \sqrt{|q\bar{q}|}$$

olmak üzere $q = q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3$ için

$$\|q\| = \sqrt{|q\bar{q}|} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2}$$

şekilde tanımlıdır, [11].

Tanım 4.6 Bir q reel yarı kuaterniyonunun tersi

$$(\ )^{-1} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$
$$q \to q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|},\ q \neq 0$$

olmak üzere $q = q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3$ için

$$q^{-1} = \frac{q_0\boldsymbol{e}_0 - q_1\boldsymbol{e}_1 - q_2\boldsymbol{e}_2 - q_3\boldsymbol{e}_3}{\sqrt{q_0^2 + q_1^2}}$$

şeklinde tanımlanır, [11].

4.1.1 Reel Yarı Kuaterniyonların Matris Temsilleri

Her $q = q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3$ reel yarı kuaterniyonu $z_1 = q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1$ ve $z_2 = q_2\boldsymbol{e}_0 + q_3\boldsymbol{e}_1$ kompleks sayıları için $q = z_1\boldsymbol{e}_0 + z_2\boldsymbol{e}_2$ olacak şekilde tek türlü yazılabilir. O halde

$$f_q : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$
$$p \to f_q(p) = pq$$

lineer dönüşümü tanımlansın. Bu dönüşüm bire bir dönüşümdür ve

$$f_q\left(\boldsymbol{e}_0\right) = \boldsymbol{e}_0\left(z_1\boldsymbol{e}_0 + z_2\boldsymbol{e}_2\right) = z_1\boldsymbol{e}_0 + z_2\boldsymbol{e}_2$$

$$f_q(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_2(z_1\boldsymbol{e}_0 + z_2\boldsymbol{e}_2) = 0\boldsymbol{e}_0 + \overline{z_1}\boldsymbol{e}_2$$

dir. Bu dönüşümle reel yarı kuaterniyonlar, $M_2(\mathbb{C})$ matris halkasının

$$\left\{\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ 0 & \overline{z_1} \end{bmatrix} : z_1, z_2 \in \mathbb{C}\right\}$$

alt kümesi olarak tanımlanır.

$q = q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3$ bir reel yarı kuaterniyon olsun.

$$L_q : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$
$$p \to L_q(p) = qp$$

dönüşümü tanımlansın. L_q lineer bir dönüşümdür ve bu dönüşüme $\{\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ bazına göre karşılık gelen matris

$$L_q(\boldsymbol{e}_0) = q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3$$

$$L_q(\boldsymbol{e}_1) = -q_1\boldsymbol{e}_0 + q_0\boldsymbol{e}_1 + q_3\boldsymbol{e}_2 - q_2\boldsymbol{e}_3$$

$$L_q(\boldsymbol{e}_2) = 0\boldsymbol{e}_0 + 0\boldsymbol{e}_1 + q_0\boldsymbol{e}_2 + q_1\boldsymbol{e}_3$$

$$L_q(\boldsymbol{e}_3) = 0\boldsymbol{e}_0 + 0\boldsymbol{e}_1 - q_1\boldsymbol{e}_2 + q_0\boldsymbol{e}_3$$

eşitliklerinden

$$\Phi(q) = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & 0 & 0 \\ q_1 & q_0 & 0 & 0 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

$$M = \left\{\begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & 0 & 0 \\ q_1 & q_0 & 0 & 0 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} : q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\right\}$$ olmak üzere

$$\Phi : \mathcal{H} \to M$$
$$q \to \Phi(q)$$

dönüşümü lineer izomorfizmdir, [20].

Önerme 4.1 Her $q, p \in \mathcal{H}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. $\Phi(q+p) = \Phi(q) + \Phi(p)$

ii. $\Phi(qp) = \Phi(q)\Phi(p)$

iii. $\Phi(\lambda q) = \lambda\Phi(q)$

iv. $\Phi(\boldsymbol{e}_0) = I_4$, [20].

İspatı Önerme 3.1'in ispatına benzer şekilde gösterilebilir.

Bir $q = q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3$ reel yarı kuaterniyonu için

$$R_q : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$
$$p \to R_q(p) = pq$$

dönüşümü tanımlansın. R_q lineer bir dönüşümdür ve bu lineer dönüşüme $\{\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ bazına göre karşılık gelen matris

$$R_q(\boldsymbol{e}_0) = q_0\boldsymbol{e}_0 + q_1\boldsymbol{e}_1 + q_2\boldsymbol{e}_2 + q_3\boldsymbol{e}_3$$

$$R_q(\boldsymbol{e}_1) = -q_1\boldsymbol{e}_0 + q_0\boldsymbol{e}_1 - q_3\boldsymbol{e}_2 + q_2\boldsymbol{e}_3$$

$$R_q(\boldsymbol{e}_2) = 0\boldsymbol{e}_0 + 0\boldsymbol{e}_1 + q_0\boldsymbol{e}_2 - q_1\boldsymbol{e}_3$$

$$R_q(\boldsymbol{e}_3) = 0\boldsymbol{e}_0 + 0\boldsymbol{e}_1 + q_1\boldsymbol{e}_2 + q_0\boldsymbol{e}_3$$

eşitliklerinden

$$\Psi(q) = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & 0 & 0 \\ q_1 & q_0 & 0 & 0 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

$$N=\left\{\begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & 0 & 0 \\ q_1 & q_0 & 0 & 0 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} : q_0,q_1,q_2,q_3 \in \mathbb{R}\right\}$$ olmak üzere

$$\Psi : \mathcal{H} \to N$$
$$q \to \Psi(q)$$

dönüşümü lineer izomorfizmdir, [20].

Önerme 4.2 Her $q, p \in \mathcal{H}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. $\Psi(q+p)=\Psi(q)+\Psi(p)$

ii. $\Psi(qp)=\Psi(q)\Psi(p)$

iii. $\Psi(\lambda q)=\lambda\Psi(q)$

iv. $\Psi(\boldsymbol{e}_0)=I_4$, [20].

İspatı Önerme 3.1'in ispatına benzer şekilde gösterilebilir.

$\Phi : \mathcal{H} \to M$ dönüşümünden aşağıdaki eşitlikler verilebilir.

$$\Phi(\boldsymbol{e}_0)=I_4,\ \Phi(\boldsymbol{e}_1)=\Gamma_1,\ \Phi(\boldsymbol{e}_2)=\Gamma_2,\ \Phi(\boldsymbol{e}_3)=\Gamma_3.$$

$$\Gamma_1=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ \Gamma_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \Gamma_3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisleri 4×4 reel matrislerdir.

$\Psi : \mathcal{H} \to N$ dönüşümünden aşağıdaki eşitlikler verilebilir.

$$\Psi(\boldsymbol{e}_0)=I_4,\ \Psi(\boldsymbol{e}_1)=\Omega_1,\ \Psi(\boldsymbol{e}_2)=\Omega_2,\ \Psi(\boldsymbol{e}_3)=\Omega_3.$$

$$\Omega_1=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},\ \Omega_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \Omega_3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisleri de 4×4 reel matrislerdir. Ayrıca

$$\Gamma_1^2=-I_4,\ \Gamma_2^2=\Gamma_3^2=0_4,$$
$$\Gamma_1\Gamma_2=-\Gamma_2\Gamma_1=\Gamma_3,$$
$$\Gamma_2\Gamma_3=\Gamma_3\Gamma_2=0_4,$$
$$\Gamma_3\Gamma_1=-\Gamma_1\Gamma_3=\Gamma_2$$

ve

$$\Omega_1^2=-I_4,\ \Omega_2^2=\Omega_3^2=0_4$$
$$\Omega_1\Omega_2=-\Omega_2\Omega_1=\Omega_3,$$
$$\Omega_2\Omega_3=\Omega_3\Omega_2=0_4,$$
$$\Omega_3\Omega_1=-\Omega_1\Omega_3=\Omega_2$$

eşitlikleri sağlanır, [21].

4.2 Kompleks Yarı Kuaterniyonlar

Kompleks yarı kuaterniyonların kümesi

$$\mathcal{H}_{\mathbb{C}}=\left\{Q_0\boldsymbol{e}_0+Q_1\boldsymbol{e}_1+Q_2\boldsymbol{e}_2+Q_3\boldsymbol{e}_3 : Q_0,Q_1,Q_2,Q_3\in\mathbb{C}\right\}$$

olarak tanımlanır. Burada $\boldsymbol{e}_0,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ baz elemanlarının çarpımı aşağıdaki gibidir:

$$\boldsymbol{e}_1^2=-1,\ \boldsymbol{e}_2^2=\boldsymbol{e}_3^2=0,$$

$$\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2=-\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_3,$$

$$\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2=0,$$

$\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1=-\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_2$, [22].

Tanım 4.7 Bir $Q=Q_0\boldsymbol{e}_0+Q_1\boldsymbol{e}_1+Q_2\boldsymbol{e}_2+Q_3\boldsymbol{e}_3$ kompleks yarı kuaterniyonunun skaler kısmı $S_Q=Q_0\boldsymbol{e}_0$ ve vektörel kısmı $V_Q=Q_1\boldsymbol{e}_1+Q_2\boldsymbol{e}_2+Q_3\boldsymbol{e}_3$ olmak üzere

$$Q=S_Q+V_Q$$

şeklinde ifade edilir, [22].

Tanım 4.8 $Q=Q_0\boldsymbol{e}_0+Q_1\boldsymbol{e}_1+Q_2\boldsymbol{e}_2+Q_3\boldsymbol{e}_3$ ve $P=P_0\boldsymbol{e}_0+P_1\boldsymbol{e}_1+P_2\boldsymbol{e}_2+P_3\boldsymbol{e}_3$ kompleks yarı kuaterniyonlarının toplamı

$$Q+P=\left(S_Q+S_P\right)+\left(V_Q+V_P\right)$$

ya da

$$Q+P=\left(Q_0+P_0\right)\boldsymbol{e}_0+\left(Q_1+P_1\right)\boldsymbol{e}_1+\left(Q_2+P_2\right)\boldsymbol{e}_2+\left(Q_3+P_3\right)\boldsymbol{e}_3$$

olarak tanımlanır, [22].

Tanım 4.9 Kompleks yarı kuaterniyonların çarpımı

$$\begin{aligned}\times&:\mathcal{H}_{\mathbb{C}}\times\mathcal{H}_{\mathbb{C}}\to\mathcal{H}_{\mathbb{C}}\\&\left(Q,P\right)\to Q\times P=QP\end{aligned}$$

biçiminde bir işlem olup $Q=Q_0\boldsymbol{e}_0+Q_1\boldsymbol{e}_1+Q_2\boldsymbol{e}_2+Q_3\boldsymbol{e}_3$ ve $P=P_0\boldsymbol{e}_0+P_1\boldsymbol{e}_1+P_2\boldsymbol{e}_2+P_3\boldsymbol{e}_3$ kompleks yarı kuaterniyonlarının çarpımı

$$\begin{aligned}QP=&\left(Q_0P_0-Q_1P_1\right)\boldsymbol{e}_0+\left(Q_0P_1+Q_1P_0\right)\boldsymbol{e}_1+\left(Q_0P_2-Q_1P_3+Q_2P_0+Q_3P_1\right)\boldsymbol{e}_2\\&+\left(Q_0P_3+Q_1P_2-Q_2P_1+Q_3P_0\right)\boldsymbol{e}_3\end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır, [22].

Tanım 4.10 Bir Q kompleks yarı kuaterniyonunun Hamilton eşleniği

$$\begin{aligned}\overline{(,)}&:\mathcal{H}_{\mathbb{C}}\to\mathcal{H}_{\mathbb{C}}\\&Q\to\overline{Q}=S_Q-V_Q\end{aligned}$$

olmak üzere $Q=Q_0\boldsymbol{e}_0+Q_1\boldsymbol{e}_1+Q_2\boldsymbol{e}_2+Q_3\boldsymbol{e}_3$ için

$$\overline{Q}=Q_0\boldsymbol{e}_0-Q_1\boldsymbol{e}_1-Q_2\boldsymbol{e}_2-Q_3\boldsymbol{e}_3$$

olarak tanımlanır, [22].

Tanım 4.11 Bir Q kompleks yarı kuaterniyonunun normu

$$\begin{aligned}\|\ \|&:\mathcal{H}_{\mathbb{C}}\to\mathbb{C}\\&Q\ \to\|Q\|=\sqrt{Q\overline{Q}}=\sqrt{\overline{Q}Q}\end{aligned}$$

olmak üzere $Q=Q_0\boldsymbol{e}_0+Q_1\boldsymbol{e}_1+Q_2\boldsymbol{e}_2+Q_3\boldsymbol{e}_3$ için

$$\|Q\|=\sqrt{Q\overline{Q}}=\sqrt{Q_0^2+Q_1^2}$$

olarak tanımlanır, [22].

4.2.1 Kompleks Yarı Kuaterniyonların 2×2 Matris Temsili

Bir $Q = Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1 + Q_2\boldsymbol{e}_2 + Q_3\boldsymbol{e}_3$ kompleks yarı kuaterniyonu $Z_1 = Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1$ ve $Z_2 = Q_2\boldsymbol{e}_0 + Q_3\boldsymbol{e}_1$ kompleks sayıları için $Q = Z_1\boldsymbol{e}_0 + Z_2\boldsymbol{e}_2$ olacak şekilde tek türlü yazılabilir.

$f_Q : \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ lineer dönüşümü her $P \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ için $f_Q(P) = QP$ şeklinde tanımlansın. Bu dönüşüm bire birdir ve

$$\begin{aligned} f_Q(\boldsymbol{e}_0) &= \boldsymbol{e}_0\left[(Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_0 + (Q_2\boldsymbol{e}_0 + Q_3\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_2\right] \\ &= (Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_0 + (Q_2\boldsymbol{e}_0 + Q_3\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_Q(\boldsymbol{e}_2) &= \boldsymbol{e}_2\left[(Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_0 + (Q_2\boldsymbol{e}_0 + Q_3\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_2\right] \\ &= 0\boldsymbol{e}_0 + (Q_0\boldsymbol{e}_0 - Q_1\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_2 \end{aligned}$$

dir. Bu dönüşüm ile kompleks yarı kuaterniyonlar, $M_2(\mathbb{C})$ matris halkasının

$$\mathbb{Q} = \left\{ \begin{bmatrix} Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1 & Q_2\boldsymbol{e}_0 + Q_3\boldsymbol{e}_1 \\ 0 & Q_0\boldsymbol{e}_0 - Q_1\boldsymbol{e}_1 \end{bmatrix} : Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{C} \right\}$$

alt kümesi olarak tanımlanır.

$F : \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{Q},\ (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) \mapsto \begin{bmatrix} Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1 & Q_2\boldsymbol{e}_0 + Q_3\boldsymbol{e}_1 \\ 0 & Q_0\boldsymbol{e}_0 - Q_1\boldsymbol{e}_1 \end{bmatrix}$ dönüşümü lineer izomorfizmadır ve

$$F(\boldsymbol{e}_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_0$$

$$F(\boldsymbol{e}_1) = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = E_1$$

$$F(\boldsymbol{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = E_2$$

$$F(\boldsymbol{e}_3) = \begin{bmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = E_3$$

şeklindedir.

Tanım 4.12 Bir kompleks yarı kuaterniyon matrisi Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 kompleks sayılarının ve

$$E_0=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, E_1=\begin{bmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix}, E_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, E_3=\begin{bmatrix}0 & i\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$, [11]

baz matrislerinin lineer birleşimi olarak $Q=Q_0E_0+Q_1E_1+Q_2E_2+Q_3E_3$ şeklinde ifade edilebilir. Burada E_0, E_1, E_2, E_3 baz matrisleri, kompleks yarı kuaterniyonun $\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ baz elemanları ile aynı çarpım kurallarını sağlar:

$$E_1^2=-E_0,\ E_2^2=E_3^2=0_2,$$
$$E_1E_2=-E_2E_1=E_3,$$
$$E_2E_3=E_3E_2=0_2,$$
$$E_3E_1=-E_1E_3=E_2,$$
$$E_0E_j=E_jE_0=E_j\ (j=1,2,3).$$

Burada 0_2, 2×2 tipinde sıfır matristir. Kompleks yarı kuaterniyonların 2×2 matris temsilinin kümesi

$$\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{'}=\left\{Q_0E_0+Q_1E_1+Q_2E_2+Q_3E_3=\begin{bmatrix}Q_0+iQ_1 & Q_2+iQ_3\\ 0 & Q_0-iQ_1\end{bmatrix}: Q_0,Q_1,Q_2,Q_3\in\mathbb{C}, E_1^2=-E_0, E_2^2=E_3^2=0_2\right\}$$

ile tanımlanır. $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{'}$ kümesinin her bir elemanı kompleks yarı kuaterniyon matrisi olarak adlandırılır.

Tanım 4.13 $Q=Q_0E_0+Q_1E_1+Q_2E_2+Q_3E_3$ kompleks yarı kuaterniyon matrisinin skaler matris kısmı $S_Q=Q_0E_0$ ve imajiner matris kısmı $ImQ=Q_1E_1+Q_2E_2+Q_3E_3$ ile gösterilir. Böylece Q kompleks yarı kuaterniyon matrisi

$$Q=S_Q+ImQ$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 4.14 Bir Q kompleks yarı kuaterniyon matrisinin kuaterniyon eşleniği $\bar{Q}$ ile gösterilir ve

$$\overline{(,)}:\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{'}\to\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{'}$$
$$Q\ \to\bar{Q}=S_Q-ImQ$$

olmak üzere $Q=Q_0E_0+Q_1E_1+Q_2E_2+Q_3E_3$ kompleks yarı kuaterniyon matrisinin kuaterniyon eşleniği

$$\bar{Q} = Q_0 E_0 - Q_1 E_1 - Q_2 E_2 - Q_3 E_3$$

ile tanımlıdır.

Tanım 4.15 Bir Q kompleks yarı kuaterniyon matrisinin kompleks eşleniği Q^C ile gösterilir ve kompleks yarı kuaterniyon matrisinin kompleks eşleniği

$$\begin{aligned} Q^C &= Q_0 \overline{E_0} + Q_1 \overline{E_1} + Q_2 \overline{E_2} + Q_3 \overline{E_3} \\ &= Q_0 E_0 - Q_1 E_1 + Q_2 E_2 - Q_3 E_3 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 4.16 Bir Q kompleks yarı kuaterniyon matrisinin total eşleniği $\left(\bar{Q}\right)^C$ ile gösterilir ve $Q = Q_0 E_0 + Q_1 E_1 + Q_2 E_2 + Q_3 E_3$ kompleks yarı kuaterniyon matrisinin total eşleniği

$$\begin{aligned} \left(\bar{Q}\right)^C &= \overline{\left(Q^C\right)} = Q_0 \overline{E_0} - Q_1 \overline{E_1} - Q_2 \overline{E_2} - Q_3 \overline{E_3} \\ &= Q_0 E_0 + Q_1 E_1 - Q_2 E_2 + Q_3 E_3 \end{aligned}$$

ile tanımlanır.

Tanım 4.17 Bir $Q = Q_0 E_0 + Q_1 E_1 + Q_2 E_2 + Q_3 E_3$ kompleks yarı kuaterniyon matrisinin transpozu Q^t ile gösterilir ve

$$Q^t = Q_0 E_0 + Q_1 E_1 + Q_2 E_2^t + Q_3 E_3^t$$

olarak tanımlanır.

Tanım 4.18 Bir $Q = Q_0 E_0 + Q_1 E_1 + Q_2 E_2 + Q_3 E_3$ kompleks yarı kuaterniyon matrisinin ek matrisi EkQ ile gösterilir ve

$$EkQ = Q_0 E_0 - Q_1 E_1 - Q_2 E_2 - Q_3 E_3$$

ile tanımlanır. Ayrıca

$$EkQ = \bar{Q}$$

dir.

Tanım 4.19 Bir $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3 = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ 0 & \bar{q}_{11} \end{bmatrix}$ kompleks yarı kuaterniyon matrisinin normu

$$\|Q\| = \sqrt{|q_{11}|^2}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 4.20 Bir $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3 = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ 0 & \bar{q}_{11} \end{bmatrix}$ kompleks yarı kuaterniyon matrisinin determinantı

$$\det Q = q_{11}\bar{q}_{11}$$

şeklindedir.

Tanım 4.21 Bir Q kompleks yarı kuaterniyon matrisinin determinantı

$$\det Q = Q_0^2 \det E_0 + Q_1^2 \det E_1 + Q_2^2 \det E_2 + Q_3^2 \det E_3$$

olup kompleks yarı kuaterniyon matrisinin bazlarının determinantları yardımıyla

$$\det Q = Q_0^2 + Q_1^2$$

şeklinde tanımlanabilir.

Teorem 4.1 Q ve P kompleks yarı kuaterniyon matrisleri için aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. $\det Q = \det\left(\bar{Q}\right) = \det Q^C$

ii. $\det\left(\psi Q\right) = \psi^2 \det Q,\ \psi \in \mathbb{C}$

iii. $\det\left(QP\right) = \det Q \det P$

İspat

i. Bir $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3$ kompleks yarı kuaterniyon matrisi için 4.21 tanımından

$$\det Q = \det\left(\bar{Q}\right) = \det Q^C = Q_0^2 + Q_1^2$$

bulunur.

ii. $\psi \in \mathbb{C}$ ve $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3 \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{'}$ için

$$\psi Q = (\psi Q_0)E_0 + (\psi Q_1)E_1 + (\psi Q_2)E_2 + (\psi Q_3)E_3$$

olup 4.21 tanımından

$$\begin{aligned}\det(\psi Q) &= \psi^2 Q_0^2 + \psi^2 Q_1^2 \\ &= \psi^2\left(Q_0^2 + Q_1^2\right) \\ &= \psi^2 \det Q\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

iii. $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3$ ve $P = P_0E_0 + P_1E_1 + P_2E_2 + P_3E_3$ kompleks yarı kuaterniyon matrisleri için

$$\begin{aligned}QP = {} & (Q_0P_0 - Q_1P_1)E_0 + (Q_1P_0 + Q_0P_1)E_1 + (Q_2P_0 + Q_3P_1 + Q_0P_2 - Q_1P_3)E_2 \\ & + (Q_3P_0 - Q_2P_1 + Q_1P_2 + Q_0P_3)E_3\end{aligned}$$

olup 4.21 tanımından

$$\det(QP) = Q_0^2P_0^2 + Q_1^2P_1^2 + Q_1^2P_0^2 + Q_0^2P_1^2$$

bulunur.

Diğer yandan, Q ve P kompleks yarı kuaterniyon matrislerinin determinantları, sırasıyla, $\det Q = Q_0^2 + Q_1^2$ ve $\det P = P_0^2 + P_1^2$ olduğundan

$$\det Q \det P = Q_0^2P_0^2 + Q_1^2P_1^2 + Q_1^2P_0^2 + Q_0^2P_1^2$$

elde edilir. O halde

$$\det(QP) = \det Q \det P$$

dir.

Tanım 4.22 Bir Q kompleks yarı kuaterniyon matrisinin tersi Q^{-1} ile gösterilir ve $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3$ kompleks yarı kuaterniyon matrisi için $\det Q \neq 0$ olmak üzere

$$Q^{-1} = \frac{1}{\det Q}\bar{Q}$$

olarak tanımlanır. Daha açık bir ifadeyle, Q kompleks yarı kuaterniyon matrisinin tersi

$$Q^{-1} = \frac{1}{Q_0^2 + Q_1^2}\left(Q_0E_0 - Q_1E_1 - Q_2E_2 - Q_3E_3\right) \tag{4.1}$$

şeklinde yazılabilir.

Örnek 4.1 $Q = 2iE_0 + iE_1 + E_2 - E_3$ kompleks yarı kuaterniyon matrisi olsun. (4.1) eşitliğinden Q'nun tersi

$$Q^{-1} = \frac{2iE_0 - iE_1 - E_2 + E_3}{-5}$$

bulunur.

Teorem 4.2 $Q, P \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}'$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. $\det Q = \|Q\|^2$ dir.

ii. Q terslenebilir ise $\left(Q^C\right)^{-1} = \left(Q^{-1}\right)^C$ dir.

iii. $\left(QP\right)^C = Q^C P^C$ dir.

iv. Q ve P terslenebilir ise $\left(QP\right)^{-1} = P^{-1}Q^{-1}$ dir.

İspatı Teorem 3.4'ün ispatına benzer şekilde gösterilebilir.

Tanım 4.23 Herhangi bir $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_3E_3 \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}'$ için

i. Q bir diyagonal matris ise $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_2iE_3$,

ii. Q bir simetrik matris ise $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_2iE_3$,

iii. Q bir ortogonal matris ise $\det Q = 1$ ve $Q = Q_0E_0 + Q_2E_2 + Q_2iE_3$,

iv. Q bir Hermityan matris ise $Q = Q_0E_0 + Q_2E_2 + Q_2iE_3$,

v. Q bir üniter matris ise $\det Q = 1$ ve $Q = Q_0E_0 + Q_1E_1 + Q_2E_2 + Q_2iE_3$ şeklinde ifade edilir.

Örnek 4.2 $Q = E_0 + E_1 + E_2$ ve $P = E_0 - E_3$ olsun. O halde

i. $Q^C Q = 2E_0 + 2E_2 - 2E_2 \neq 2E_0 + 2E_2 + 2E_2 = QQ^C$

ii. $Q\left(\bar{Q}\right)^C = 2E_1 - 2E_3 \neq 2E_1 + 2E_3 = \left(\bar{Q}\right)^C Q$

iii. $\left(QP\right)^C = E_0 - E_1 + 2E_2 + E_3 \neq E_0 - E_1 + E_3 = P^C Q^C$

iv. $\left(QP\right)^{-1} = \frac{1}{2}\left(E_0 - E_1 - 2E_2 + E_3\right) \neq \frac{1}{2}\left(E_0 - E_1 + E_3\right) = Q^{-1}P^{-1}$

Bu örnekler yardımıyla kompleks yarı kuaterniyon matrisleri için Sonuç 4.1 elde edilir.

Sonuç 4.1 $Q, P \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}'$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. $Q^C Q \neq QQ^C$

ii. $Q\left(\bar{Q}\right)^C \neq \left(\bar{Q}\right)^C Q$

iii. $\left(QP\right)^C \neq P^C Q^C$

iv. $\left(QP\right)^{-1} \neq Q^{-1}P^{-1}$

4.2.2 Kompleks Yarı Kuaterniyonların 4×4 Kompleks Matris Temsili

$Q = Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1 + Q_2\boldsymbol{e}_2 + Q_3\boldsymbol{e}_3$ bir kompleks yarı kuaterniyon olsun.

$$f_Q : \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$$
$$P \to f_Q\left(P\right) = QP$$

lineer dönüşümü tanımlansın.

$$f_Q\left(\boldsymbol{e}_0\right) = Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1 + Q_2\boldsymbol{e}_2 + Q_3\boldsymbol{e}_3$$

$$f_Q\left(\boldsymbol{e}_1\right) = \boldsymbol{e}_1\left(Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1 + Q_2\boldsymbol{e}_2 + Q_3\boldsymbol{e}_3\right) = -Q_1\boldsymbol{e}_0 + Q_0\boldsymbol{e}_1 - Q_3\boldsymbol{e}_2 + Q_2\boldsymbol{e}_3$$

$$f_Q\left(\boldsymbol{e}_2\right) = \boldsymbol{e}_2\left(Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1 + Q_2\boldsymbol{e}_2 + Q_3\boldsymbol{e}_3\right) = 0\boldsymbol{e}_0 + 0\boldsymbol{e}_1 + Q_0\boldsymbol{e}_2 - Q_1\boldsymbol{e}_3$$

$$f_Q\left(\boldsymbol{e}_3\right) = \boldsymbol{e}_3\left(Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1 + Q_2\boldsymbol{e}_2 + Q_3\boldsymbol{e}_3\right) = 0\boldsymbol{e}_0 + 0\boldsymbol{e}_1 + Q_1\boldsymbol{e}_2 + Q_0\boldsymbol{e}_3$$

eşitliklerinden, kompleks yarı kuaterniyonlar $M_2\left(\mathbb{C}\right)$'nin

$$\mathbb{Q}=\left\{\begin{bmatrix} Q_0 & Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ -Q_1 & Q_0 & -Q_3 & Q_2 \\ 0 & 0 & Q_0 & -Q_1 \\ 0 & 0 & Q_1 & Q_0 \end{bmatrix}_{4\times 4} : Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{C}\right\}$$

alt kümesi olarak yazılabilir.

4.2.3 Kompleks Yarı Kuaterniyonların 8×8 Reel Matris Temsili

Bir $Q = Q_0\boldsymbol{e}_0 + Q_1\boldsymbol{e}_1 + Q_2\boldsymbol{e}_2 + Q_3\boldsymbol{e}_3$ kompleks yarı kuaterniyonu için $Q_0 = a_0 + ib_0,\ Q_1 = a_1 + ib_1,\ Q_2 = a_2 + ib_2,\ Q_3 = a_3 + ib_3 \in \mathbb{C}$ olduğundan

$$Q = a_0\boldsymbol{e}_0 + a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 + b_0i\boldsymbol{e}_0 + b_1i\boldsymbol{e}_1 + b_2i\boldsymbol{e}_2 + b_3i\boldsymbol{e}_3$$

şekinde ifade edilebilir.

Her $Q \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ için

$$G_Q : \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$$
$$P \to G_Q(P) = QP$$

lineer dönüşümü tanımlansın. $G_Q : \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ dönüşümü bire birdir.

$Q = a_0\boldsymbol{e}_0 + a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 + b_0i\boldsymbol{e}_0 + b_1i\boldsymbol{e}_1 + b_2i\boldsymbol{e}_2 + b_3i\boldsymbol{e}_3 \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ için

$$G_Q(\boldsymbol{e}_0) = a_0\boldsymbol{e}_0 + a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 + b_0i\boldsymbol{e}_0 + b_1i\boldsymbol{e}_1 + b_2i\boldsymbol{e}_2 + b_3i\boldsymbol{e}_3$$

$$G_Q(\boldsymbol{e}_1) = -a_1\boldsymbol{e}_0 + a_0\boldsymbol{e}_1 - a_3\boldsymbol{e}_2 + a_2\boldsymbol{e}_3 - b_1i\boldsymbol{e}_0 + b_0i\boldsymbol{e}_1 - b_3i\boldsymbol{e}_2 + b_2i\boldsymbol{e}_3$$

$$G_Q(\boldsymbol{e}_2) = 0\boldsymbol{e}_0 + 0\boldsymbol{e}_1 + a_0\boldsymbol{e}_2 - a_1\boldsymbol{e}_3 + 0i\boldsymbol{e}_0 + 0i\boldsymbol{e}_1 + b_0i\boldsymbol{e}_2 - b_1i\boldsymbol{e}_3$$

$$G_Q(\boldsymbol{e}_3) = 0\boldsymbol{e}_0 + 0\boldsymbol{e}_1 + a_1\boldsymbol{e}_2 + a_0\boldsymbol{e}_3 + 0i\boldsymbol{e}_0 + 0i\boldsymbol{e}_1 + b_1i\boldsymbol{e}_2 + b_0i\boldsymbol{e}_3$$

$$G_Q(i\boldsymbol{e}_0) = -b_0\boldsymbol{e}_0 - b_1\boldsymbol{e}_1 - b_2\boldsymbol{e}_2 - b_3\boldsymbol{e}_3 + a_0i\boldsymbol{e}_0 + a_1i\boldsymbol{e}_1 + a_2i\boldsymbol{e}_2 + a_3i\boldsymbol{e}_3$$

$$G_Q(i\boldsymbol{e}_1) = b_1\boldsymbol{e}_0 - b_0\boldsymbol{e}_1 + b_3\boldsymbol{e}_2 - b_2\boldsymbol{e}_3 - a_1i\boldsymbol{e}_0 + a_0i\boldsymbol{e}_1 - a_3i\boldsymbol{e}_2 + a_2i\boldsymbol{e}_3$$

$$G_Q(i\boldsymbol{e}_2) = 0\boldsymbol{e}_0 + 0\boldsymbol{e}_1 - b_0\boldsymbol{e}_2 + b_1\boldsymbol{e}_3 + 0i\boldsymbol{e}_0 + 0i\boldsymbol{e}_1 + a_0i\boldsymbol{e}_2 - a_1i\boldsymbol{e}_3$$

$$G_Q(i\boldsymbol{e}_3) = 0\boldsymbol{e}_0 + 0\boldsymbol{e}_1 - b_1\boldsymbol{e}_2 - b_0\boldsymbol{e}_3 + 0i\boldsymbol{e}_0 + 0i\boldsymbol{e}_1 + a_1i\boldsymbol{e}_2 + a_0i\boldsymbol{e}_3$$

eşitliklerinden

$$\left\{ \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ -a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 & -b_1 & b_0 & -b_3 & b_2 \\ 0 & 0 & a_0 & -a_1 & 0 & 0 & b_0 & -b_1 \\ 0 & 0 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & b_1 & b_0 \\ -b_0 & -b_1 & -b_2 & -b_3 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & -b_0 & b_3 & -b_2 & -a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & -b_0 & b_1 & 0 & 0 & a_0 & -a_1 \\ 0 & 0 & -b_1 & -b_0 & 0 & 0 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}_{8\times 8} : a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

elde edilir.

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER

Tezin ikinci, üçüncü ve dördüncü bölümlerinde sırasıyla, kompleks kuaterniyonlar, kompleks split kuaterniyonlar ve kompleks yarı kuaterniyonların 2×2 matris temsilinin bazı özellikleri incelenmiştir ve determinant hesabı için yeni bir yöntem verilmiştir.

Dördüncü bölümde, kompleks yarı kuaterniyonların 4×4 kompleks matris temsili ve 8×8 reel matris temsili hesaplanmıştır.

Bu tez çalışmasından yola çıkarak farklı kuaterniyon türleri için de matris temsilleri kullanılarak benzer çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Ebbinghaus, H.-D., Hermes, H., Hirzebruch, F., Koecher, M., Mainzer, K., Neukirche, J., Prestel, A. ve Remmert, R., (1991). Numbers, Springer-Verlag, New York.

[2] Kuipers, J.B., (1999). Quaternions and Rotations Sequences, Princenton University Press, New Jersey.

[3] Ward, J.P., (1997). Quaternions and Cayley Numbers Algebra and Applications, Kluwer Academic Publishers.

[4] Mehta, M.L., (1991). Random Matrices, Academic Press.

[5] Tian, Y., (2000). "Matrix Theory over the Complex Quaternion Algebra", arXiv:math/0004005v1.

[6] Demir, S., (2003). Kompleks ve Dual Kuaterniyonların Fiziksel Uygulamaları, Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

[7] Yüce, S., (2015). Lineer Cebir, Pegem Akademi, Ankara.

[8] Demir, S., (2007). "Lorentz Dönüşümlerinin Kompleks Kuaterniyonlarla İncelenmesi", C.B.Ü. Fen Bilimleri Dergisi, 3: 1-14.

[9] Negi, O.P.S., Bisht, S. ve Bisht, P.S., (1998). "Revisiting Quaternion Formulation and Electromagnetism", II Nuovo Cimento B, 113(12):1449-1468.

[10] Tanışlı, M. ve Özgür, G., (2003). "Biquaternionic Representations of Angular Momentum and Dirac Equation", Acta physica Slovaca, 53(3): 243-252.

[11] Rosenfeld, B., (1997). Geometry of Lie Groups, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

[12] Inoguchi, J., (1998). "Timelike Surfaces of Constant Mean Curvature in Minkowski 3-Space", Tokyo J. Math., 21(1): 141-152.

[13] Kula, L., (2003). Bölünmüş Kuaterniyonlar ve Geometrik Uygulamaları, Ankara.

[14] Alagöz, Y., Oral, K.H. ve Yüce, S., (2012). "Split Quaternion Matrices", Miskolc Mathematical Notes, 13(2): 223-232.

[15] Kula, L. ve Yaylı, Y., (2007). "Split Quaternions and Rotations in Semi Euclidean Space E_2^4", Journal of Korean Mathematical Society, 44(6): 1313-1327.

[16] Erdoğdu, M. ve Özdemir, M., (2013). “On Complex Split Quaternion Matrices”, Advances in Applied Clifford Algebras, 23: 625-638.

[17] Erdoğdu, M., (2015). Split Kuaterniyon Matrisleri, Doktora Tezi, Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Antalya.

[18] Mortazaasl, H. ve Jafari, M., (2013). “A Study on Semi-Quaternions in Semi-Euclidean 4-Space”, Mathematical Sciences and Applications E-Notes, 1(2): 20-27.

[19] Dyachkova, M., (2007). “On Hopf bundle analogue for semiquaternion algebra”, 10th International Conferance DGA, August 27-31, Olomouc, Czech Republic.

[20] Jafari, M., (2015). “Kinematic Mapping in Semi-Euclidean 4-Space”, Düzce University Journal of Science and Technology, 3: 173-179.

[21] Jafari, M., Advances in the Semi-quaternionic matrices, https://www.researchgate.net/publication/292986883_Advances_in_the_Semi-quaternionic_matrices, 3 Kasım 2017.

[22] Jafari, M., Complex Semi-quaternions and Their Algebraic Properties, https://www.researchgate.net/publication/308784164_Complex_Semi-quaternions_and_Their_Algebraic_Properties, 3 Kasım 2017.

[23] O’Neill, B., (1983). Semi-Riemann Geometry, Academic Press, New York.

[24] Flaut, C. ve Shpakivskyi, V., (2013). “Real Matrix Representations for the Complex Quaternions”, Advances in Applied Clifford Algebras, 23(3): 567-671.

EK-A

MİNKOWSKİ UZAYI

Bu bölümde [7], [23] kaynaklarından yararlanılarak Minkowski uzayı hakkında genel bilgiler verilmiştir.

A-1 $\mathbb{R}_v^n$ Minkowski Uzayı

Tanım A.1 V, $n-$ boyutlu reel vektör uzayı olsun. Bir

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu, $\forall a,b \in \mathbb{R}$ ve $\forall u,v,w \in V$ için

i. $g(u,v) = g(v,u)$,

ii. $g(au+bv,w) = ag(u,w) + bg(v,w)$

$$g(u,av+bw) = ag(u,v) + bg(u,w)$$

özelliklerine sahip ise bu fonksiyona V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form denir.

Tanım A.2 V sonlu boyutlu reel vektör uzayı üzerinde simetrik bilineer form g olsun.

i. $\forall v \in V$, $v \neq 0$ için $g(v,v) > 0$ ise g simetrik bilineer formuna pozitif tanımlı,

ii. $\forall v \in V$, $v \neq 0$ için $g(v,v) < 0$ ise g simetrik bilineer formuna negatif tanımlı,

iii. $\forall v \in V$ için $g(v,v) \geq 0$ ise g simetrik bilineer formuna pozitif yarı tanımlı,

iv. $\forall v \in V$ için $g(v,v) < 0$ ise g simetrik bilineer formuna negatif yarı tanımlı,

v. $\forall w \in V$ için $g(v,w)=0$ iken $v=0$ ise g simetrik bilineer formuna non-dejenere denir, [7].

Tanım A.3 g, V reel vektör uzayı üzerinde simetrik bilineer bir form olsun. g'nin indeksi; $g|_W$ negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu $W \subset V$ alt uzayının boyutu ile tanımlanır ve v ile gösterilir. $0 \le v \le boyV$ olduğu açıktır, [23].

Tanım A.4 V vektör uzayının bir bazı $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ olmak üzere bu baza göre g'nin matrisi için

$$\left[g_{ij}\right] = \left[g\left(e_i, e_j\right)\right]$$

yazılabilir. g simetrik olduğundan $\left[g_{ij}\right]$ matrisi de simetriktir, [23].

Teorem A.1 Bir g simetrik bilineer formun non-dejenere olması için gerek ve yeter şart her baza göre karşılık gelen matrisinin terslenebilir olmasıdır, [23].

Tanım A.5 Bir V vektör uzayı üzerinde g non-dejenere reel simetrik bilineer formuna skaler çarpım ve V reel vektör uzayına skaler çarpım uzayı denir. g, V üzerinde pozitif tanımlı skaler çarpım ise g formuna V üzerinde bir iç çarpım denir, [23].

Tanım A.6 V skaler çarpım uzayı ve $v \in V$ olsun.

$$\|v\| = \sqrt{|g(v,v)|}$$

eşitliği ile belirli $\|v\|$ sayısına v'nin normu denir. Normu 1 olan vektöre birim vektör denir, [23].

Tanım A.7 $v, w \in V$ vektörleri verilsin. Bu iki vektörün ortogonal olması için gerek ve yeter şart $g(v,w)=0$ olmasıdır, [7].

Teorem A.2 $V \neq \{0\}$ olmak üzere, V skaler çarpım uzayı bir ortonormal baza sahiptir. V'nin bir $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ortonormal bazına göre g bilineer formunun matrisi diyagonal matristir. Burada $g\left(e_i, e_j\right) = \delta_{ij}\varepsilon_j$, $\varepsilon_j = g\left(e_i, e_j\right) = \mp 1$ dir ve $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$ sistemine ortonormal baz işareti denir, [23].

Teorem A.3 $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, $\varepsilon_j = g(e_i, e_j)$ olacak şekilde V'nin bir ortonormal bazı olsun. Her bir $v \in V$ vektörü

$$v = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(v, e_i) e_i$$

şeklinde tek türlü olarak ifade edilebilir, [23].

Tanım A.8 V reel vektör uzayı üzerinde g skaler çarpımın v indeksi V'nin indeksi olarak tanımlanır ve $v = indV$ yazılır, [23].

Teorem A.4 g, V reel vektör uzayı üzerinde skaler çarpım olsun. V'nin bir $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ortonormal bazı için $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$ deki negatif işaretlerin sayısı V'nin v indeksine eşittir, [23].

Tanım A.9 $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı

$$\langle v, w \rangle = -\sum_{i=1}^{v} v_i w_i + \sum_{j=v+1}^{n} v_j w_j,\ 0 \le v \le n$$

metrik tensörü verilsin. Bu v indeksli metrik tensörle $\mathbb{R}^n$ uzayına yarı-Öklid uzayı denir ve $\mathbb{R}_v^n$ ile gösterilir. $v = 0$ ise $\mathbb{R}_v^n$ uzayı $\mathbb{R}^n$ uzayına indirgenir. Eğer $n \ge 2$ ve $n = 1$ ise $\mathbb{R}_1^n$ uzayına Minkowski (Lorentz) $n-$ uzayı adı verilir, [23].

Tanım A.10 Bir $v \in \mathbb{R}_v^n$ vektörüne

i. $\langle v, v \rangle > 0$ veya $v = 0$ ise spacelike (uzaysı) vektör,

ii. $\langle v, v \rangle < 0$ ise timelike (zamansı) vektör,

iii. $\langle v, v \rangle = 0$ ve $v \neq 0$ ise null (lightlike) vektör

denir, [23].

Tanım A.11 $\mathbb{R}^3$ uzayına, $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ vektörleri için üzerinde tanımlanan

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 - u_3 v_3$$

metrik ile beraber Lorentz-Minkowski uzayı denir ve $\mathbb{R}_1^3$ ile gösterilir. $\langle , \rangle$ metriğine de Lorentz metriği denir, [7],[23].

Tanım A.12 $u=(u_1,u_2,u_3), v=(v_1,v_2,v_3)\in\mathbb{R}^3$ vektörlerinin vektörel çarpımı

$$u\times v=\begin{vmatrix} i & j & -k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

ile tanımlanır, [23].

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı :Gözde ÖZYURT

Doğum Tarihi ve Yeri :16.03.1992/Ordu

Yabancı Dili :İngilizce

E-posta :gozdeozyurt1@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2015
Lise	Fen Bilimleri	Gültepe Lisesi	2010

YAYINLARI

Bildiri

1. Özyurt, G., ve Alagöz, Y., "On Complex Quaternion and Complex Split Quaternion Matrices", International Conference on Mathematics and Engineering, İSTANBUL, TÜRKİYE, 10-12 Mayıs 2017, pp.198-198.