T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONTROL SİSTEMİ OLARAK SABİT NOKTA İTERASYONLARI VE KAOTİK DİSKRİT DİNAMİK SİSTEMLER

Derya SEKMAN

DOKTORA TEZİ
Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı
Matematik Mühendisliği Programı

Danışman
Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

Ocak, 2023

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONTROL SİSTEMİ OLARAK SABİT NOKTA İTERASYONLARI VE KAOTİK DİSKRİT DİNAMİK SİSTEMLER

Derya SEKMAN tarafından hazırlanan tez çalışması 09.01.2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı Matematik Mühendisliği Programı **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Vatan KARAKAYA
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Vatan KARAKAYA, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Fatih TAŞÇI, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Necip ŞİMŞEK, Üye
İstanbul Ticaret Üniversitesi _____

Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Murat KİRİŞÇİ, Üye
İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa _____

Danışmanım Prof. Dr. Vatan KARAKAYA sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Kontrol Sistemi Olarak Sabit Nokta İterasyonları ve Kaotik Diskrit Dinamik Sistemler başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Derya SEKMAN

İmza

Bu çalışma Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından FDK-2018-3348 nolu proje kapsamında desteklenmiştir.

Akademik hayatım boyunca en büyük destekçim
Canım Babam Eyüp SEKMAN'a ithafen...

TEŞEKKÜR

Akademik hayatıma adım attığım ilk günden bugüne kadar beni yetiştiren, anlayışı ve desteğiyle her zaman yolumu açan, bitmek tükenmek bilmeyen çalışma aşkı ile tüm öğrencilerine ilham olan, yaşam felsefesi ile bizlere bir ideale tutunmayı öğreten, danışmanım olarak gösterdiği özverisi ve nezaketiyle akademik çalışmalarımdaki tüm incelikleri bana öğreten ve ufkumu açan, kendisiyle çalışmaktan büyük onur duyduğum kıymetli ve saygıdeğer hocam Sayın Prof. Dr. Vatan KARAKAYA'ya en kalbî duygularımla sonsuz teşekkür ederim.

Doktora tez sürecimde, anlayışlarını benden esirgemeyen ve bu süreçte yaptığımız toplantılarda bir arada olmaktan mutluluk duyduğum tez izleme komite üyeleri hocalarım Sayın Prof. Dr. Necip ŞİMŞEK ve Sayın Prof. Dr. Fatih TAŞÇI'ya desteklerinden dolayı çok teşekkür ederim. Tez savunma sınavı jüri üyeliğini kabul ederek beni onurlandıran değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY ve Sayın Prof. Dr. Murat KİRİŞÇİ'ye çok teşekkürlerimi sunarım.

Kızlarının okumasına büyük önem veren, eğitim hayatımın her aşamasında üzerime titreyen, maddi ve manevi her türlü desteğiyle bugünlere gelmeme sebep olan, kendi ayaklarımın üzerinde güçlü durmayı bana öğreten, bugünlerin hayalini birlikte kurduğumuz ve hakkını asla bu dünyada ödeyemeyeceğim canım babam Eyüp SEKMAN'a tüm kalbimle çok teşekkür ederim.

Bizleri büyütmek için gösterdiği fedakarlıklarla her zaman yanımda olan, bu süreçte sevgisini ve desteğini benden esirgemeyen sevgili annem Seyhan SEKMAN'a tüm içtenliğimle çok teşekkür ederim. Varlıklarını her daim hisssettiğim canım kardeşlerim Ayşegül, Aysel, Aysun, Enes ve Elanur'uma en samimi duygularımla teşekkür ederim.

Doktora tez sürecimi maddi olarak destekleyen YTÜ Bilimsel Araştırmalar Proje Koordinatörlüğü'ne ayrıca teşekkürlerimi sunarım.

Derya SEKMAN

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ **ix**

KISALTMA LİSTESİ **x**

ŞEKİL LİSTESİ **xi**

TABLO LİSTESİ **xiv**

ÖZET **xv**

ABSTRACT **xvii**

1 GİRİŞ **1**

1.1 Literatür Özeti 1

1.2 Tezin Amacı 8

1.3 Hipotez 8

2 BAZI MATEMATİKSEL NESNELER ÜZERİNE TARTIŞMALAR VE FONKSİYONLAR TEORİSİ **9**

2.1 Matematiksel Nesneler 9

2.2 Kavram-Model İlişkisi 12

2.3 Matematiksel Analiz ve Fonksiyonel Analiz ile İlgili Bazı Temel Kavramlar 16

3 DİSKRİT DİNAMİK SİSTEMLER VE KAOS TEORİ **23**

3.1 Matematiksel Modellerde Büyüme Kavramı 23

3.1.1 Üstel Büyüme ve Lojistik Büyüme Modeli 23

3.2 Diskrit Dinamik Sistemlerde Sabit Nokta ve Yörüngeler 28

3.3 Çatallanma Teorisi ve Kaosa Geçiş 34

3.3.1 Kaotik Yapılar 36

3.4 Kaos ve Lyapunov Üstelleri 39

3.5 Lojistik Popülasyon Büyümesinin Yörünge Dinamikleri 40

4 SABİT NOKTA TEORİ VE DİSKRİT DİNAMİK SİSTEMLERDE KAOS KONTROL **44**

4.1 Sabit Nokta Teorinin Önemli Teoremleri 45
4.2 Literatürdeki Bazı Sabit Nokta İterasyon Yöntemleri 47
4.3 Sabit Nokta İterasyon Yöntemleri ile Kaos Kontrol 50
4.4 İterasyon Yöntemleri için Lyapunov Üsteli 54

5 ISHIKAWA İTERASYON YÖNTEMİ İLE KAOS KONTROL 56
5.1 Ishikawa Sabit Nokta Kontrol Mekanizması 56
5.2 Kararsız Sabit Noktaların Stabilize Edilmesi 58
5.2.1 Kaotik Fonksiyon Olarak Lojistik Sistem Uygulaması 63
5.3 Kararsız Periyodik Noktaların Stabilize Edilmesi 81
5.3.1 Lojistik Sistemin Kararsız Periyodik Noktalarının Stabilize Edilmesi 84
5.4 Ishikawa İterasyon Yöntemi için Lyapunov Üsteli 87
5.5 Uygulama: Trafik Akış Modellerinin Ishikawa İterasyon Yöntemi ile Kaos Kontrolü 90

6 NOOR İTERASYON YÖNTEMİ İLE KAOS KONTROL 95
6.1 Noor Sabit Nokta Kaos Kontrol Mekanizması 95
6.2 Kararsız Sabit Noktaların Stabilize Edilmesi 97
6.2.1 Kaotik Fonksiyon Olarak Kübik Sistem Uygulaması 103
6.3 Kararsız Periyodik Noktaların Stabilize Edilmesi 113
6.3.1 Kübik Sistemin Kararsız Periyodik Noktalarının Stabilize Edilmesi 116
6.4 Noor İterasyon Yöntemi için Lyapunov üsteli 119
6.5 Uygulama: Trafik Akış Modellerinin Noor İterasyon Yöntemi ile Kaos Kontrolü 120

7 MULTI-STEP İTERASYON YÖNTEMİ İLE KAOS KONTROL 125
7.1 Multi-step Sabit Nokta Kaos Kontrol Mekanizması 125
7.2 Kararsız Sabit Noktaların Stabilize Edilmesi 127
7.3 Kararsız Periyodik Noktaların Stabilize Edilmesi 135

8 BANACH UZAYLARINDA FRÉCHET VE GÂTEAUX TÜREVLERİ İLE BELİRLİ İTERASYON SINIFLARININ KAOS KONTROLÜ 139
8.1 Picard-S ve Thakur İterasyon Yöntemleri ile Kaos Kontrol 143
8.1.1 Picard-S ve Thakur Kontrol Mekanizmalarının Lojistik Sistem Uygulaması 153
8.2 S ve Normal-S İterasyon Yöntemleri ile Kaos Kontrol 156
8.2.1 S ve Normal-S Kontrol Mekanizmalarının Lojistik Sistem Uygulaması 164
8.3 Karakaya ve M İterasyon Yöntemleri ile Kaos Kontrol 167

8.3.1 Karakaya ve M Kontrol Mekanizmalarının Lojistik Sistem Uygulaması 175
8.4 K^* ve Piri İterasyon Yöntemleri ile Kaos Kontrol 177
8.5 CR, Kadıoğlu ve Sahu İterasyon Yöntemleri ile Kaos Kontrol 178
8.6 JF ve M* İterasyon Yöntemleri ile Kaos Kontrol 179

9 SONUÇ VE ÖNERİLER **181**

KAYNAKÇA **183**

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR **193**

SİMGE LİSTESİ

$\mathbb{K}$	Cisim ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$)
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
F_f	f fonksiyonunun Sabit Noktalar Kümesi
$I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)$	Ishikawa Kontrol Mekanizması
$\mathbb{I}$	İrrasyonel Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
$M\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)$	Multi-step Kontrol Mekanizması
$N\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)$	Noor Kontrol Mekanizması
$\mathbb{Q}$	Rasyonel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}^*$	Sıfırın dahil olmadığı Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^*$	Sıfırın dahil olmadığı Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar Kümesi
$\|\|\cdot\|\| : X \to \mathbb{R}$	X üzerinde tanımlı Norm Fonksiyonu

KISALTMA LİSTESİ

bkz.	bakınız
f.p.t.	sabit nokta tipi
ve ark.	ve arkadaşları

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1 Matematiksel uzay tanımları 10
Şekil 2.2 Matematiksel modelleme diyagramı 12
Şekil 3.1 Popülasyon artışının aşırı düzeyde olunca düşmesi ve dengelenmesi 26
Şekil 3.2 $f(x) = x^3$ kübik fonksiyonunun sabit noktaları 30
Şekil 3.3 $f(x) = x^2$ için $x_1 = 0$ çekici sabit nokta iken $x_2 = 1$ itici sabit nokta olduğunu gösteren cobweb diyagramı 31
Şekil 3.4 Mayıs sinekleri popülasyonunun çatallanma diyagramı 43
Şekil 4.1 Sabit nokta örnekleri 45
Şekil 5.1 f_μ lojistik sisteminin x_2^* sabit noktasının itici ve kararsız yörünge davranışı 68
Şekil 5.2 f_μ lojistik sisteminin x_2^* sabit noktasının $I\left(\alpha, \beta, f_\mu\right)$ kontrol mekanizmasının parametreleriyle çekici ve kararlı yörüngelere dönüştürülmesi 68
Şekil 5.3 $I\left(\alpha, \beta, f_\mu\right)$ kontrol mekanizmasının $x_0 = 0.7333$ başlangıç noktası için $\alpha_n = 0.67, \beta_n \in [0.5, 1)$ kontrol parametre değerleri için çatallanma diyagramı 71
Şekil 5.4 $I\left(\alpha, \beta, f_\mu\right)$ kontrol mekanizmasının $x_0 = 0.7333$ başlangıç noktası için $\alpha_n = 0.67, \beta_n \in [0.5, 1)$ kontrol parametre değerleri için yörünge analizi 78
Şekil 5.5 $\alpha_n = 0.75, 0.85, 0.95$, $\beta_n \in [0.5, 1)$ kontrol parametre değerleri için çatallanma diyagramları 79
Şekil 5.6 Lojistik dönüşüm altında Picard ve Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizmasının yörüngeleri 80
Şekil 5.7 Lojistik dönüşüm altında Mann ve Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizmasının yörüngeleri 80
Şekil 5.8 $x_{n+1} = f_\mu^2(x_n)$ sisteminin $x_1^{*(2)}$ ve $x_2^{*(2)}$ periyodik sabit noktalarının itici ve kararsız yörünge davranışı 86
Şekil 5.9 $x_{n+1} = f_\mu^2(x_n)$ sisteminin $x_1^{*(2)}$ ve $x_2^{*(2)}$ periyodik sabit noktalarının $I_{(2)}\left(\alpha, \beta, f_\mu\right)$ kontrol mekanizması ile çekici ve kararlı hale getirilmesi 86
Şekil 5.10 $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$ lojistik sisteminin $\mu \in [1, 4]$ aralığındaki Lyapunov üsteli diyagramı 90

Şekil 5.11 $f_\mu(x)=\mu x(1-x)$ lojistik sisteminin $\mu\in[3.55,4]$ aralığındaki kaotik bölgenin büyültülmüş hali 90
Şekil 5.12 $I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)$ kontrol mekanizmasının $\alpha_n=0.4$, $\beta_n=0.25$ için $\mu\in[1,4]$ aralığındaki Lyapunov üsteli diyagramı 90
Şekil 5.13 $I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)$ kontrol mekanizmasının $\alpha_n=\beta_n=0.2$ için $\mu\in[1,4]$ aralığındaki Lyapunov üsteli diyagramı 90
Şekil 5.14 $v_{n+1}=\frac{u_f}{\overline{u}}v_n(1-v_n)$ trafik akış modelininin $\frac{u_f}{\overline{u}}\in[0,4]$ kontrol parametresi için çatallanma diyagramı 91
Şekil 6.1 g_μ kübik sisteminin x_2^* sabit noktasının itici ve kararsız yörünge davranışı 110
Şekil 6.2 g_μ kübik sisteminin x_2^* sabit noktasının $N\left(\alpha,\beta^i,g_\mu\right)(i=1,2)$ kontrol mekanizmasının parametreleriyle çekici ve kararlı yörüngelere dönüşmesi 110
Şekil 6.3 $N\left(\alpha,\beta^i,g_\mu\right)$ $(i=1,2)$ kontrol mekanizmasının $x_0=1.3333$ başlangıç noktası için $\alpha_n=0.5$, $\beta_n^1=0.3333$,$\beta_n^2\in[0.3333,1)$ parametre aralığında çatallanma diyagramı 111
Şekil 6.4 $N\left(\alpha,\beta^i,g_\mu\right)$ $(i=1,2)$ kontrol mekanizmasının $x_0=1.3333$ başlangıç noktasındaki periyodik yörüngeleri 113
Şekil 6.5 Noor trafik akış modelinin $\frac{u_f}{\overline{u}}=4$ iken $x_0=0.7333$, $\alpha_n=0.75$, $\beta_n^1=0.9$,$\beta_n^2\in(0,1)$ parametre aralığındaki çatallanma diyagramı . 123
Şekil 8.1 Picard-S kontrol mekanizmasının $x_0=0.7333$, $\alpha_n=0.3$, $\beta_n\in(0.8333,1)$ için kararlı (çekici) yörüngeleri 155
Şekil 8.2 Picard-S kontrol mekanizmasının $x_0=0.7333$, $\alpha_n=0.3$, $\beta_n\in(0,1)$ için çatallanma diyagramı 155
Şekil 8.3 Thakur kontrol mekanizmasının $x_0=0.7333$, $\alpha_n=0.3$, $\beta_n\in(0.8333,1)$ için kararlı (çekici) yörüngeleri 155
Şekil 8.4 Thakur kontrol mekanizmasının $x_0=0.7333$, $\alpha_n=0.3$, $\beta_n\in(0,1)$ için çatallanma diyagramı 155
Şekil 8.5 S kontrol mekanizmasının $x_0=0.7333$, $\alpha_n=0.25$, $\beta_n\in(0.6666,1)$ için kararlı (çekici) yörüngeleri 166
Şekil 8.6 S kontrol mekanizmasının $x_0=0.7333$, $\beta_n\in(0,1)$ için çatallanma diyagramı 166
Şekil 8.7 Normal-S kontrol mekanizmasının $x_0=0.7333$, $\beta_n\in(0.6666,0.5)$ için kararlı (çekici) yörüngeleri 167
Şekil 8.8 Normal-S kontrol mekanizmasının $x_0=0.7333$, $\beta_n\in(0,1)$ için çatallanma diyagramı 167
Şekil 8.9 Karakaya kontrol mekanizmasının $x_0=0.7333$, $\alpha_n\in(0.25,0.41661)$ için kararlı (çekici) yörüngeleri 176

Şekil 8.10 Karakaya kontrol mekanizmasının $x_0 = 0.7333$, $\alpha_n \in (0.25, 1)$ için çatallanma diyagramı 176
Şekil 8.11 M kontrol mekanizmasının $x_0 = 0.7333$, $\alpha_n \in (0.25, 0.41661)$ için kararlı (çekici) yörüngeleri 177
Şekil 8.12 M kontrol mekanizmasının $x_0 = 0.7333$, $\alpha_n \in (0.25, 1)$ için çatallanma diyagramı 177

TABLO LİSTESİ

Tablo 3.1 $f(x) = 2x$ üstel büyüme modeliyle $g(x) = 2x(1-x)$ lojistik büyüme modelinin karşılaştırılması 27
Tablo 5.1 $\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta$ kararlılık aralığının dışında $I(\alpha, \beta, f_\mu)$ kontrol mekanizmasında oluşan dinamik bölgeler 79
Tablo 5.2 $x_0 = 0.7333$, $\alpha_n = 0.6, \beta_n = 0.25$ için Picard, Mann ve Ishikawa iterasyonları ile kurulan dinamik sistemlerin ilk 30 iterasyonu 81
Tablo 6.1 $\Gamma_\alpha, \Gamma_{\beta^i}$ kararlılık aralığının dışında $N(\alpha, \beta^i, g_\mu)$ $(i = 1, 2)$ kontrol mekanizmasında oluşan dinamik bölgeler 111

ÖZET

Kontrol Sistemi Olarak Sabit Nokta İterasyonları ve Kaotik Diskrit Dinamik Sistemler

Derya SEKMAN

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı
Doktora Tezi

Danışman: Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

Bilinmezlik ve tahmin edilemezlik olarak ortaya konan kaotik sistemler doğal olarak yapılarında dinamik sistemleri barındırmaktadır. Mevcut çalışmada, diskrit dinamik sistemleri temel alarak bilinmezlik olarak ortaya çıkan kaotik sistemler sabit nokta teorinin dinamik yapısıyla göz önüne alınmıştır. Evrende büyüme oranıyla birlikte fenomenler üzerinde meydana gelen kontrol edilemez büyüme oranları bir taraftan dinamik bir sistem iken sınırsızlıktan kaynaklı olarak da kaotik davranışlıdır. Çalışmamızın ana hipotezi, geniş bir çalışma alanı olan sabit nokta iterasyon yöntemlerini dinamik sistem olarak göz önüne alıp bu dinamik sistemlerde meydana gelen kaotik davranışların parametrelere bağlı olarak kontrol aralıklarını elde etmeyi içermektedir. Genel olarak, reel uzayda keyfi kaotik fonksiyonların belirli iterasyonlar altında adi türev yoluyla kontrol aralıklarının bulunması ile birlikte Banach uzaylarında da keyfi kaotik operatörlerin belirli iterasyon sınıfları altında Gâteaux ve Fréchet türevleri ile kontrol parametre aralıklarını elde etmek çalışmanın temel hedeflerindendir. Bununla birlikte; çalışmada büyümeye karşılık gelen sabit nokta iterasyon metotları multi-step adıma kadar genellenerek hiyerarşik bir kapsam ilişkisi kurulmuştur. Ayrıca, sabit nokta iterasyon sınıflarının en belirleyici karakteristiği olan algoritmik olarak hızlı olma özelliklerine göre literatürde var olan hızlı iterasyonlar Banach uzaylarında incelenmiştir. Diğer taraftan, uygulamaya dönük olan kaos kontrol parametreleri kaotik lojistik fonksiyon üzerinden örneklendirilip güncel bir problem olan trafik akış modeline uygulanmıştır. Benzer kontrol sistemlerinden, dinamik yörüngelerin başlangıç koşullarına bağlı olarak ıraksamasını ölçen Lyapunov üsteli tekniği ile ıraksayan sabit ve periyodik yörüngelerin yakınsaması

sağlanmıştır. Dokuz bölüm olarak planlanmış bu çalışmada, ilk bölümde tezin literatür özeti, ikinci ve üçüncü bölümlerde matematiksel kavramların felsefi temelleri ve günlük hayat ilişkileri verilmiştir. Daha sonraki bölümler tezin orijinal bölümleri olarak çalışılmıştır. Son olarak da sonuç bölümü eklenmiştir.

Anahtar Kelimeler:

Kaos kontrol, diskrit dinamik sistem, sabit nokta, iterasyon yöntemleri, Lyapunov üsteli

ABSTRACT

Fixed Point Iterations as Control Systems and Chaotic Discrete Dynamical Systems

Derya SEKMAN

Department of Mathematical Engineering
Doctor of Philosophy Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

Chaotic systems, which are revealed as obscurity and unpredictability, naturally contain dynamical systems in their structures. In our current study, chaotic systems that emerge as obscurity based on discrete dynamical systems are considered with the dynamic structure of fixed point theory. While the uncontrollable growth rates that occur on the phenomena with the growth rate in the universe are on the one hand a dynamical system, it also has a chaotic behavior due to infinity. The main hypothesis of our study is to consider the fixed point iteration methods, which is a wide field of study, as a dynamical system and to obtain the control ranges of the chaotic behaviors occurring in these dynamical systems depending on the parameters. In general, control parameter ranges are obtained by Gâteaux and Fréchet derivatives of arbitrary chaotic operators under certain iteration classes in Banach spaces, together with finding control intervals of arbitrary chaotic functions in real space by means of ordinary derivatives under certain iterations. However, a hierarchical scope relationship was established by generalizing the growth corresponding fixed point iteration methods up to the multi-step. In addition, fast iterations in the literature are examined in Banach spaces according to their fastness, which is the most decisive characteristic of fixed point iteration classes. On the other hand, application-oriented chaos control parameters were exemplified over the chaotic logistic function and applied to the traffic flow model, which is a current problem. Among similar control systems, the convergence of the diverging fixed and periodic trajectories is achieved by the Lyapunov exponent technique, which measures the divergence of dynamic trajectories depending on the initial conditions. In this study, which is planned as

nine chapters, the literature summary of the thesis is given in the first chapter, the philosophical foundations of mathematical concepts and daily life relations are given in the second and third chapters. The following chapters were studied as the original chapters of the thesis. Finally, the conclusion section has been added.

Keywords: Controlling chaos, discrete dynamical system, fixed point, iteration methods, Lyapunov exponent

1
GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Dinamik sistemlerin tarihsel süreci 1600'lerin ortalarında Newton'un diferansiyel hesabı keşfetmesi ile başlamıştır. Newton (1643-1727), hareket ve yerçekimi yasalarını keşfederek bu yasaları Kepler'in açıkladığı gezegen hareket yasalarıyla birleştirmiştir ve 2-cisim problemini, yani dünya ve ayın hareketini hesaplama problemini çözmüştür. Matematikçiler ve fizikçiler Newton'un analitik metotlarını ilerleyen zamanlarda 3-cisim problemine (Güneş, Dünya ve Ay) genişletmeye çalışmışlardır; ancak bu problemi çözmenin sanıldığından çok daha zor olduğunu farketmişlerdir. 1800'lerin sonunda Kral II. Oscar'ın n-cisim problemini çözen bilim adamlarına ödül vereceğini açıklamasıyla, J. Henri Poincaré (1854-1912) yaptığı çalışmalarıyla büyük bir atılım göstermiştir. Poincaré, topoloji ve geometriyi kullanarak n=3 için böyle bir diferansiyel denklemin çözümünün olmadığını ispatlamıştır. Ayrıca Poincaré niceliksel sorulardan ziyade niteliksel bir vurgu yaparak yeni bir bakış açısı tanımlamıştır. Bu yaklaşım modern dinamiğin başlangıcı olmuştur. Aynı zamanda, Poincaré, deterministik bir sistemin başlangıç koşullarına hassas bağımlı olarak periyodik olmayan davranış sergilediği ve dolayısıyla uzun vadeli öngörüyü imkansız hale getirdiği kaos olasılığını da ilk fark eden kişidir.

Daha sonra, 1920-1930 yılları arasında Fransız matematikçiler P. Fatou [1] ve G. Julia [2], kompleks analitik dönüşümleri kullanarak Julia kümeleri üzerinde kaotik yapıyı ortaya çıkarmışlardır; ancak bilgisayar desteği kullanamadıkları için gerçek kaosu sınıflandıramamışlardır. Aynı tarihlerde Amerikalı matematikçi G.D. Birkhoff, Poincaré'in niteliksel bakış açısını baz alarak, diferansiyel denklemlerin dinamik davranışlarını anlamanın en basit yolu olarak iteratif süreçler üzerinde çalışmıştır. 1950'lerde yüksek hızlı bilgisayarın keşfi dinamik sistemler tarihinde bir dönüm noktası olmuştur. Bu bilgisayarlar daha önce imkansız olan denklemlerle deney yapma ve lineer olmayan sistemler hakkında tahminler geliştirmeye izin vermiştir.

Dinamik sistemler üzerine ikinci büyük gelişme olarak sayılabilecek olay 1960'lı yıllarda gerçekleşmiştir. Amerikalı matematikçi Stephen Smale [3], Poincaré'nin kararlı ve kararsız geçişlerini iterasyon süreçlerine bağlı olarak göz önüne almış, sembolik dinamiği kullanarak kaotik hareketi bir örnekle göstermiştir. 1963 yılında Amerikalı meteorolog Edward Lorenz [4]'in çok kaba bir bilgisayar yardımıyla ilginç bir çekici üzerindeki kaotik hareketi keşfetmesiyle deneysel çalışmalar yapılmaya başlanmıştır. Lorenz, öngörülemezliğiyle bilinen hava durumuna ışık tutmak için atmosferdeki ısı yayılım rulolarının basitleştirilmiş bir modeli üzerine çalışmıştır. Ancak daha sonra "Lorenz sistemi" olarak adlandırılan bu meteorolojik sistemin başlangıç koşullarına duyarlı bağımlılık sergilediğini, diğer bir ifadeyle başlangıç koşullarındaki çok küçük bir değişikliğin tahmin edilemez sonuçlara yol açabileceği çıkarımına varmıştır.

Birbirine çok yakın yörüngelerin ıraksamasının lineer olmayan sistemlerin davranışı üzerindeki etkisi "kelebek etkisi" olarak ifade edilmektedir. Bu metafor, ilk olarak 1972'de Lorenz [5] tarafından Wachington DC'de *American Association for the Advancement of Science* toplantısında "Tahmin Edilebilirlik: Bir Kelebeğin Kanat Çırpışı Teksas'daki Tornado'yu etkiler mi?" başlıklı konuşmada ortaya atılmıştır. Lorenz'in anlatmaya çalıştığı şey; eğer atmosfer yani hava, yakın yörüngelerin ıraksaması veya başlangıç koşullarına hassas bağımlılık ile kaotik davranış sergiliyorsa bu durumda bir kelebeğin (veya bir kuş türünün) kanat çırpması gibi küçük bir etki uzun vadeli hava tahminlerinin mümkün olmadığını göstermektedir [6].

Lorenz'in çalışmaları 1970'lere kadar çok az etkiye sahipken kaos teori için bu yıllar patlama yılları olmuştur. 1971'de Ruelle ve Takens [7] ilginç çekicilerle ilgili soyut düşüncelere dayanarak akışkanlardaki türbülansın başlangıcı için yeni bir teori önermişlerdir. 1975 yılında T. Li ve J.A. Yorke isimli matematikçiler "Periyod-3, Kaos Demektir" [8] makale başlığı ile şaşırtıcı bir teorem kanıtlayarak literatürde ilk kez "kaos" kelimesini kullanmışlardır. Li-Yorke'nin çalışmasına göre; bir dinamik sistemde 3-periyodlu periyodik bir yörüngenin varlığı, sayılamaz çoklukta periyodik olmayan ve kararsız yörüngenin varlığını ima etmektedir. Ancak Li-Yorke'nin çalışmasından tam 11 yıl önce Rus matematikçi A.N. Sarkovskii [9] çok daha önemli sonuçları olan bir araştırma makalesi yayınlamıştır. Sarkovskii Teoremi'ne göre; sürekli reel bir dönüşüm n-periyodlu bir yörünge içeriyorsa bu dönüşümün sahip olması gereken diğer tüm periyodlar tam olarak sıralanabilir. Ancak, Sarkovskii'nin teoremi kendi ana dilinde basıldığından dolayı diğer araştırmacılar tarafından Li-Yorke'nin makalesi yayınlandıktan sonra farkedilmiştir ve modern dinamik sistemler teorisindeki en ilginç sonuçlardan biri haline gelmiştir.

1970'lerde yeni bir bilim olarak kaosun ortaya çıkmasıyla biyologların kullandıkları matematiksel modeller, örneğin Lorenz'in denklemi bir fizikçi için çok basit iken biyologlara göre içinden çıkılamayacak ölçüde karmaşık, üç-boyutlu, sürekli değişen ve analitik açıdan çözümsüz denklemler haline gelmişti. Bilim insanları, belli bir hızla öldüren ve popülasyonun nüfus yoğunluğuna göre belli bir hızla yayılan bir virüsün sonunun ne olacağına dair soruların yanıtlanabileceği ideal koşulları temel alarak yepyeni formüller uygulamaya başlamışlardır [10]. 1976 yılında, Li-Yorke'nin makalesinden sadece bir yıl sonra, biyolog Robert M. May [11], biyolojik popülasyonların büyümelerinin sergilediği ilginç ve bir o kadar karmaşık davranışlarını anlatan etkili bir araştırma makalesi yayınlamıştır. Bu makale ile May, lojistik denklemin gerçek hayattaki bir-boyutlu bir dinamik sistemin şaşırtıcı derecede karmaşık yörüngelerini göstererek ilginç davranışlarının araştırılmasını sağlamıştır. Böylece popülasyonların büyümesini tanımlamak için sıklıkla kullanılan basit bir matematiksel modeli ele alarak, nüfus dinamiklerindeki kaos üzerine yeni bir alan açmıştır.

Tüm zamanların en şaşırtıcı keşfini fizikçi Mitchell Feigenbaum [12] yaparak kaos sabitini -her kaotik sistemin bir sabite ulaşabildiğini- kanıtlamıştır ve düzenden kaotik yapıya geçişi koruyan evrensel yasaların olduğunu söylemiştir. Diğer bir ifadeyle, periyodları ikiye katlanarak ilerleyen bütün fonksiyonların aynı geometrik oranda davrandıklarını gözlemlemiştir. Ayrıca tamamen farklı sistemlerin aynı şekilde kaotik hale gelebileceğini göstermiştir. Feigenbaum'un çalışmaları kaos ve faz geçişi arasında bağ kurmayı gerçekleştirmiştir [13, 14]. Daha sonra Libchaber [15], Linsay [16] ve Moon [17] gibi araştırmacılar akışkanlar, kimyasal reaksiyonlar, elektronik devreler, mekaniksel salınımlar ve yarı iletkenler üzerinde deneyler yaparak kaos hakkında çalışmalar yapmışlardır. Mandelbrot [18], fraktalları kodlayarak bilgisayar grafiklerini çizmiş ve farklı alanlara nasıl uygulanabileceğini göstermiştir. Gelişmekte olan matematiksel biyoloji alanında, Winfree [19] biyolojik titreşimlere, dinamiklerin geometrik metotlarını özellikle sirkadiyen (24 saatlik) ritimlere ve kalp ritimlerine uygulamıştır.

Kaos üzerinde çalışan bir çok araştırmacı bu teoriyi farklı yönlerden incelemişlerdir. Bilgisayar programlarının gelişmesiyle, literatürde "kaos kontrolü" olarak yeni bir çalışma alanı açılmış ve reel dünyadaki kaosun kontrolüne ilişkin yeni metotlar sunulmuştur [20–22]. Bilimsel çalışmalarda kaotik diskrit dinamik sistemlerin tahmin edilemezliği ve karmaşıklığı nedeniyle, kaosun kontrolü için yeni teknikler geliştirmeye ihtiyaç duyulmuştur. Geri-bildirim tekniği (feedback technique) kullanılarak kaosu kontrol etme fikri ilk kez 1990 yılında Ott ve ark. [23] tarafından ortaya atılmıştır. Bu çalışma kaotik sistemlere gömülü kararsız periyodik durumların stabilize edilmesi için sistemin parametresinin düzenlenmesini

içermektedir. Bununla birlikte, kontrol teorisindeki modern araştırmalar Pyragas'ın [24] sürekli ve diskrit dinamik sistemleri kullanarak elde ettiği teorik ve sayısal simülasyon sonuçlarını oluşturan çalışmasına bağlı olarak gelişmiştir. Daha sonra, gecikmeli geri-bildirim kontrol sistemlerinin analitik özelliklerinin araştırılması [25], entropi kontrol teknikleriyle kaotik dönüşümlerin sabit noktalarının stabilizasyonu [26], genişletilmiş geri-bildirim kontrol yönteminde kaotik dönüşümlerin kararsız periyodik yörüngelerinin stabilizasyonu [27], tahmine dayalı kontrolle kaosun stabilizasyonu [28], sabit orantılı geri-bildirim kullanılarak kaotik davranışın kontrolü [29] ve salınımlı geri-bildirim yöntemi [30] gibi kaotik sistemleri kontrol etmek için çeşitli teknikler oluşturulmuştur.

Kaos teorinin ana konusu tahmin edilememezlik ve belirsizlik üzerine kurulu olduğundan yukarıda bahsedilmişti. Kaotik sistemler ilk farkedildiği zamanlarda tarif edilemez bir matematik problemi olarak ifade ediliyordu. Diğer bir ifadeyle, doğal oluşan olayların arasındaki ilişkiler belirsiz ve matematiksel metotlarla açıklanamıyordu. Kaosun keşfedilmesiyle dinamik ve kaotik sistemler reel dünya problemlerinde etkin olarak kullanılmaya başlamıştır. Modern dönemde yapılan çalışma alanlarının en başında lineer olmayan dinamik sistemlerin araştırılması ve kaotikleştirilmesinde kaosun kontrolü yer almaktadır. Kaos kontrol teorinin uygulama alanları yaygın olarak; ekolojide nüfus dinamikleri, kriptografide görüntü şifreleme ve şifre çözme, trafik akış sistemleri, termodinamik, elektronik devreler, akışkanlar dinamiği, lineer olmayan optik, kimyasal reaksiyonlar, lazer teknolojileri, kardiyoloji, kalp ritimlerini düzenleme, sinyal görüntü işleme, ekonomik modelleme, insan beyni analizleri gibi birçok bilimsel disiplinin modellenmesinde ve işlenmesinde kullanılan alanlardır [31–37].

Kaos kontrol teorisinin uygulamalarıyla ilgili literatürde mevcut önemli çalışmalar şu şekilde sıralanabilir: 1991 yılında, Azevedo [38] ve Ditto [22], ortak bir fikirle, birinci periyodun periyodik yörüngelerini kontrol ederek manyeto-elastik şeritlerin dinamiklerindeki kararlılığı elde etmişlerdir. 1991'de Hunt [39], döngülerin 23 katı uzunluktaki karmaşık periyodik yörüngeleri kontrol etmek için ciddi çalışmalar yapmıştır. Ertesi yıl, Garfinkel [40] biyokimyasal sistemlerde kaos kontrol tekniğini ilk kez kullanmış ve kalp ritimlerinde stabilizasyonu sağlamıştır. Kimyasal reaksiyonları kontrol etmek için bir geri-bildirim prosedürü Peng [41] tarafından tanıtılmıştır. Ayrıca, bir toroidal dikey döngüde termal konveksiyonun karakteristiğini değiştirmek için ilk geri-bildirim kontrol deneyi Singer ve Bau [42] tarafından yapılmıştır. 1997'de Sinha [43] biyolojik sistemlerde kaotik yörüngeleri kontrol etmek ve düzensiz dinamik davranışları stabilize etmek için çeşitli teknikler geliştirmiştir. Ayrıca, trafik akış sistemindeki düzensiz dinamik davranış nedeniyle, karayolunda kararlı trafik sistemini elde etmek için çeşitli kontrol teknikleri geliştirilmiştir. 1993'te Jarett

ve Zhang [44], trafik akışının dinamik özelliklerini gözden geçirmişler ve yolculuk dağılımındaki kaosun kanıtlarını incelemişlerdir. Yine 1997 yılında bir araba takip modeli üzerinde çalışmışlar ve yoldaki stabilitesini araştırmışlardır [45]. Yukarıda bahsedilen çalışmalardan elde edilen trafik sonuçları, araba takip modelinde kaosun varlığını tespit etmek için bir metodoloji tanımlayan Disbro ve Frame [46] tarafından da desteklenmiştir. 2012'de Grether [47], bir ulaşım sistemi içindeki iki kontrol parametresine bağlı olan verimli bir kuyruk trafik kontrol modeli tanıtmıştır. Ayrıca 2010 yılından itibaren Liz ve ark. [48–51] tahmine dayalı kontrol ve orantılı geri-bildirim kontrolü kullanarak tek boyutlu diskrit sistemlerin periyodik ve sabit durumlardaki stabilizasyonunu incelemişlerdir. Kaosu kontrol etmenin geniş bilimsel uygulamaları için ayrıca şu kaynaklar incelenebilir bkz. [6, 52–56].

Son yıllarda, lojistik dönüşüm lineer olmayan dinamik sistemlerin incelenmesinde bir kilometre taşı olmuştur. Lojistik dönüşümlerin dinamik davranışına ilişkin çalışmalarda da çeşitli geri-bildirim teknikleri kullanılmıştır. Bu teknikler yaklaşık 300 yıl önce Newton ve Leibniz tarafından tanıtılmıştır ve reel dünyadaki olayları modellemek için standart metotlar haline gelmiştir. Geri-bildirim tekniği, "iterasyon" ve "yörünge" terimleri ile aynı anlama gelmektedir. Kaotik lojistik dönüşüm, örneğin, iletişim sistemlerini güvence altına almak ve kaotik sinyaller üretmek, gürültü üreteç sistemleri ve kuadratik translineer (QT) devreleri tasarlamak ve görüntü şifrelemeyi modellemek gibi çeşitli amaçlar için kullanılmıştır. Lojistik dönüşümün uygulamalarının ayrıntılı açıklamaları için bkz. [57–62].

Günümüzde dinamik sistemler üzerine araştırmaların sürdürüldüğü en aktif çalışma alanlarından biri sabit nokta teoridir. Dinamik sistemlerin temel kavramları; sabit nokta, kararlılık ve kararsızlıktır. Reel dünyadaki sistemler sürekli olarak küçük bozulmalara maruz kalır. Bu nedenle, reel sistemler için dengede kalma veya kararlı olma önemlidir. Bir sistemde gözlemlenen denge hali kararlı bir sabit noktaya karşılık gelmektedir. Kararsız sabit noktada ise sistemdeki hatalar veya bozulmalar yörüngenin sabit noktadan uzaklaşmasına neden olur ve bu durumda gözlemlenemez hale gelir. Örneğin; bir vadinin dibindeki bir top kararlı iken bir dağın zirvesinde dengede duran bir top kararsızdır. Bu kavramlara dayanarak dinamik sistemler ile sabit nokta teori arasında yakın bir ilişki olduğu bilinmektedir. Bir dinamik sistem olarak sabit nokta teorinin en güçlü çalışma alanı sabit nokta iterasyon yöntemleridir. Sabit nokta iterasyon yöntemleri; birçok bilim dalında karşılaşılan lineer ya da lineer olmayan problemlerin çözümlerinde yaygın olarak kullanılan çok önemli matematiksel araçlardır. Geniş bir uygulama alanına sahip olan sabit nokta iterasyon yöntemlerine ait literatürde yapılan bazı çalışmalar için bkz. [63–69].

Sabit nokta teori ve dinamik sistemlerin birleştirilmesiyle yapılan çalışmalarda önemli bir husus da sabit nokta teori içinde gelişen iterasyon metotlarının diskrit dinamik sistemlerde kaos durumları için kontrol mekanizmaları oluşturulmasında kullanılmış olmalarıdır. Sabit nokta iterasyon yöntemlerinin kaos kontrol mekanizması olarak kullanılması iterasyonun parametreleriyle kaosa sebep olan büyümenin kontrol altına alınması anlamına gelmektedir. İterasyon yöntemlerinin dinamik yörüngelere etkisi büyümeyi etkileyen parametrelerle sağlanmaktadır. Bu yaklaşımdan esinlenerek, 2002 yılındaki çalışmasıyla W. Huang [70] varlıkların büyüme oranlarıyla ilgili kurmuş olduğu iteratif fonksiyon ile, ekonomistler tarafından dinamik bir ekonomik sürecin stabilizesi için kullanılan "feedback adjustment" metodunu baz alarak, lineer olmayan bir büyüme oranı kontrol mekanizması geliştirmiştir. Aynı zamanda sabit noktaları aynı olan ve büyüme oranını temsil eden başka bir fonksiyon daha tanımlayarak, büyümeyi temsil eden fonksiyonun türeviyle bu sistemi kontrol etmiştir. Huang'ın çalışmasında kullanılan keyfi iteratif fonksiyon, 2009 yılında yayınlanan Berinde'nin makalesinde [71] sabit nokta teoride iyi bilinen tek adımlı iterasyon yöntemi alınarak parametre içeren fonksiyonlar için kontrol mekanizmaları oluşturulmuştur. Daha sonra, 2019 yılında Ashish ve ark. [72] tek parametreye bağlı geri-bildirim tekniği ile lojistik dönüşümleri kullanarak trafik akış problemlerinin kaos kontrolü için uygulamasını yapılmışlardır. Literatürde iteratif süreçlerle diskrit dinamik sistemlerdeki kaotik yapılar ve kontrol mekanizmaları ile ilgili çalışmalar şu şekilde verilmiştir [73–82].

Bu tez çalışmasında, iteratif süreçler basitten karmaşığa genellenerek çalışılmıştır ve basit sistemlerden elde edilen sonuçlar karmaşık ya da genel sonuçların doğrulanmasında kullanılmıştır. Bu düşünce altında, öncelikle Ishikawa [83] iterasyon süreci kaotik sistem olarak ele alınmış, daha sonra Noor [84] iterasyon sistemi çalışılmış ve bu iki iterasyon sisteminin sonuçlarına dayalı olarak Multi-step [85] iterasyon yöntemi için genellemeler yapılmıştır. Bu çalışmanın temel motivasyonu ile elde edilen sonuçlar yeni bir yaklaşımdır ve literatürde var olan çalışmalardan farklılıklar içermektedir. Multi-step iterasyon yöntemi ile oluşturulan kontrol mekanizması, pek çok açıdan bir genelleştirme altında kaos kontrol çalışmalarının sınıflandırılmasına olanak vermektedir. Multi-step iterasyon yöntemi [85], bir n-adımlı iterasyon algoritması olduğundan literatürde yaygın olarak kullanılan tek adımlı Mann [86] ve Krasnoselskii [87], iki adımlı Ishikawa [83], üç adımlı Noor [84] iterasyon yöntemleri ile ilişkili kaos kontrol mekanizmaları bu çalışmanın özel durumuna karşılık gelmektedir. Ayrıca, sabit nokta iterasyonlarının geniş uygulama sahası göz önüne alındığında $n \geq 4$ adımlı iterasyonların kontrol mekanizmaları, ihtiyaç duyulduğunda Multi-step iterasyonunun özel durumları olarak kolaylıkla elde edilebilir. Bunun yanı sıra, her bölümde ayrı ayrı olarak incelenen kontrol

mekanizmaları için Lyapunov üsteli tekniği kullanılarak sabit ve özellikle periyodik yörüngelerin ıraksak olup olmadığı belirlenmiştir.

Bu tez çalışmasının uygulaması olarak trafik akışı üzerindeki kaosu kontrol etmek için Ishikawa ve Noor tipi trafik akış modelleri sunulmuştur. Bir ağ üzerindeki yol trafiği dinamik bir sistem olarak kabul edilmektedir. Karayolu trafik akışının diskrit dinamik modelleri, modele dahil edilen değişkenlerin muhtemel dış parametrelerle nasıl değiştiğini açıklamaktadır. Bir kaotik dinamik trafik modeli, trafik akışının kararsız ve ön görülemez olması anlamına gelmektedir. Trafik akışı dış parametredeki değişikliklerle kaotik hale gelir. 2005 yılında Shang ve ark. [88], lineer olmayan zaman serisi modelleme tekniklerini kullanarak trafik verilerini analiz etmiş ve yoldaki trafik sisteminin kaotik davranış sergilediğini göstermiştir. Aynı yıl, Lo ve Cho [89], yoldaki kaotik trafiği kontrol etmek için akış-yoğunluk-hız ve Greenshield modellerinden elde edilen lojistik dönüşüm formunda bir diskrit dinamik trafik akış modeli ortaya atmışlardır. Bizim çalışmamızda, sabit nokta kontrol mekanizmaları ile kurulan trafik akış modellerine ait parametrelerin sunmuş olduğu imkanlardan faydalanılarak kaotik trafik akışının istikrarlı ve kararlı hale getirilmesi için muhtemel çözümler üzerine tartışmalar yapılmıştır.

Yukarıdaki açıklamalara ek olarak kaos, topolojik uzaylarda açıklar yardımıyla belirlenen matematiksel bir kavramdır. Literatürde kaosun topolojik olarak birçok tanımı vardır. Bir diskrit dinamik sistem için öne çıkan kaos tipleri; Devaney [90] tipi kaos, Li-Yorke [8] tipi kaos, Wiggins [91] tipi kaos ve Marotto [92] tipi kaos şeklinde verilmektedir. Bir topolojiye sahip ancak topolojik özellikleri göz önüne alınmadan çalışılabilecek uzaylar da mevcuttur. Reel uzay, metrik uzay ve normlu uzaylar bu uzaylara örnek olarak verilebilir. Bu üç uzay, kaosun incelenmesi gibi kaosun kontrolüne de imkan veren kullanışlılığa sahiptir. Bu uzaylarda kaosun kontrolünü; reel uzayda adi türev, metrik uzayda Fréchet türevi ve normlu uzayda Gâteaux türeviyle elde etmek mümkündür.

Bu bilgilere dayanarak; mevcut çalışmanın son bölümünde, genel olarak normlu uzaylarda, özel durumda da Banach uzaylarında sabit nokta iterasyon yöntemleri ele alınarak kontrol mekanizmalarının dinamiksel yapıları incelenmiştir. Ayrıca, sabit nokta teoride günümüzde en yaygın olarak kullanılan iterasyon sınıfları seçilerek daha önce çalışılmamış olan normlu uzaylar üzerinde Gâteaux ve Fréchet türevleri ile kaotik yapıya sahip bir T operatörünün kararsız sabit noktalarını kararlı hale getiren ve uygun parametre aralıklarının seçimine imkan veren sabit nokta iterasyon süreçlerinin kaos kontrol yapılarının bir sınıfı oluşturulmuştur.

1.2 Tezin Amacı

Tezin amacı, öncelikle sabit nokta teoriyle yakından ilişkili diskrit dinamik sistemlerin kaotik yapılarının incelenmesi ve kaotik davranışlar için kaos kontrol mekanizmaları geliştirmektir. Kontrol mekanizmalarıyla çalışma genel olarak iterasyonları oluşturan ve kaos yapısına sebep olan parametreler üzerine yoğunlaşmayı gerektirmektedir. Somut ya da soyut nesnelerin bir kural dahilinde büyüme oranı genellikle bir iterasyona karşılık gelmektedir. Ancak büyümenin dış etkileri büyümeyi oluşturan mekanizmadaki parametreler olarak ortaya çıkmaktadır. Bu sebepten, bir mekanizma bir değişken üzerinden anlamlı bir süreç oluştururken parametreler de sürecin değişkeninin maruz kaldığı dış etkilerin oluşturduğu davranışları göstermektedir. Bu açıklamalar altında, tezin esas amacı diskrit dinamik sistem olarak değerlendirilen iterasyon süreçleri parametreye bağlı kaotik davranışa ulaştığında parametrelerin kontrolünü sağlayan metotlarla iterasyon süreçlerinde parametre kontrol aralıklarının elde edilmesini amaçlamaktadır. Bu amaca erişmek için literatürde iyi bilinen iterasyon süreçlerinden Krasnoselskii [87], Ishikawa [83], Noor [84] ve Multi-step [85] genellemesiyle bir kapsam içerisinde kaotik bir fonksiyon için kontrol mekanizması olarak yukarıda bahsedilen iterasyonların kullanılması ve bu iterasyonların parametre kontrol aralıklarıyla kaotik fonksiyondan dinamik bir iterasyona dönüşen yeni sistemler inşa etmektir. Analitik olarak elde edilen kontrol parametre aralıklarını nümerik olarak elde etmek için kaos özellikli lojistik ve kübik fonksiyonlar kullanılarak süreçlerin kararsızlıktan kararlılığa dönüşüm aralıkları, periyodik davranış aralıkları ve kaotik davranış bölgeleri belirlenerek bilgisayar destekli analizlerle nümerik kontrol aralıkları elde edilmiştir. Ayrıca algoritmik hızlarıyla öne çıkan iterasyon sınıfları kontrol mekanizması olarak kullanılarak Banach uzayları üzerinde Gâteaux ve Fréchet türevleriyle kaotik operatörlerin kararlılık aralıkları elde edilmiş ve birçok yeni uygulama örnekleri verilmiştir. Bununla birlikte, kaotik fonksiyonun ya da operatörün periyodik davranışlarının hem türev yoluyla hem de Lyapunov üsteliyle yakınsaklık ya da ıraksaklık özellikleri incelenmiştir.

1.3 Hipotez

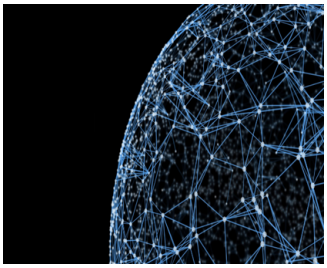
Tezin ana hipotezi; eğer bir diskrit dinamik sistem olarak sabit nokta iterasyon yöntemleri göz önüne alınırsa herhangi bir kaotik fonksiyon ya da operatör bu mekanizmaları oluşturan parametrelerin uygun seçimleriyle kaostan dinamik sisteme dönüştürülebilir mi sorusuna cevap bulmayı amaçlamaktadır.

2
BAZI MATEMATİKSEL NESNELER ÜZERİNE TARTIŞMALAR VE FONKSİYONLAR TEORİSİ

Giriş bölümü olarak tasarlanan mevcut çalışmada, matematiğin soyut ve duyulara kapalı nesneleriyle reel dünyanın varlıkları üzerinden üretilen kavramların ilişkileri tartışılacaktır. Ayrıca, soyut bir düşünme becerisi olan matematiğin tez ile ilgili olan kavramlarının gerçek dünya örnekleriyle nasıl açıklanabileceğine odaklanılacaktır. Böylece çalışma boyunca kullanılan matematiksel kavramların somut gerçeklikte model karşılıklarını vererek kavram ve tanımların daha anlaşılır olması sağlanacaktır. Bu bölümde kavramsal ve reel hayat yönüyle tartışılan matematiksel yapılar bir sonraki bölümde matematiksel tanımlarıyla verilecektir.

2.1 Matematiksel Nesneler

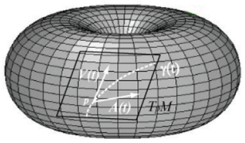
Matematiksel düşünce, insanın yaşadığı dünyayı çok yönlü ve ilişkiler ağı ile birlikte algılaması anlamına gelmektedir. Gözümüzün gördüğü dünya kaba ve sadece 3-boyutlu cisimlerden meydana gelmiştir. Bu anlamda insan, aklını kullanma bakımından yaşadığı dünyadan daha ileride ve sınırsız olduğundan dolayı dünyayı sadece cisim cihetinden değil aralarındaki ilişkileri de yorumlayarak bir bilgi dağarcığı ortaya çıkarmaktadır. Gözümüzü gökyüzüne çevirdiğimizde mükemmel bir dizaynla karşı karşıya kalırız. Her şey kendi intizamında, belirli bir düzen içerisinde sürmekte ve tekrarlanmaktadır. Birbirleriyle çelişmeyen uyumlu harekete sahip bu cisimler topluluğu genel olarak uzay olarak adlandırılır. Güneş, ay, dünya ve milyarlarca gök cisminden oluşan bu yapı bir kurala göre hareket eder ve birbirlerini engellemezler. Gökyüzünde bu mükemmellik devam ederken yeryüzünde uzay tanımına uyan, sayıları azımsanmayacak ölçüde fazla mükemmel ilişkiler bulunmaktadır. Bu ilişkilerin matematiksel tanımlamaları; duran nesneler arasındaki uzaklık metrik uzay, hareketli nesneler arasındaki uzaklık normlu uzay ve uygun şekiller arasındaki ilişkiler de topolojik uzay şeklinde gözlerimizin önünde oluşan mükemmel ilişkiler topluluğudur (bkz. Şekil 2.1) [93].



(a) Metrik uzay



(b) Normlu uzay



(c) Topolojik uzay

Şekil 2.1 Matematiksel uzay tanımları

Fiziksel dünyadaki varlıklar bir şekle veya biçime sahip olduğunda, yani bir sûret kazandığında ancak insan aklı tarafından idrak edilebilir hale gelir ve sûret o varlığa yerleştiğinde nesne olarak tanımlanabilir. Sûret, varlığın değişmez niteliklerini ortaya çıkaran, varlıkları ayırdetmek ve sınır koymak için önemli bir nitelik olarak tanımlanmaktadır [94]. Bir varlığın aklî idrak ile kavranabilmesi için somutlaşması, cisimsel sûrete sahip olması ve belirli bir miktar ile sınırlarının belirlenmesi gerekir. Bir cismin sahip olduğu miktar, kavranabilen cisimlik sûretini matematiksel olarak ölçülebilir ve duyular ile algılanabilir hale getirmektedir. Bu nedenle fiziksel dünyada gerçekleşmiş cismin boyutlarına matematiksel sûret denir. Cisimsel sûret belirgin bir boyuta sahip olmadığından ölçülemez iken matematiksel sûret belirgin boyutlardan ibaret olduğu için ölçülebilirdir. Cismin miktarına bağlı olarak, matematiksel sûret değişebilir ancak cisimsel sûret değişmezdir. Örneğin; bir mum eridikçe uzunluk, genişlik ve derinliği değişebilir ancak cisimlik sûretini etkilemez, sadece matematiksel sûretin ölçüleri değişir [95].

Fiziksel dünyada bir cismin matematiksel sûrete sahip olması o cismin geometrik özellikleri ile görünürlüğe sahip olduğu anlamına gelir. Varlıkların matematiğe konu oldukları alan sayma (aded) ve ölçme (mikdâr) şeklindeki niceliksel kavramlarla mümkün olmaktadır. İbn Sînâ, Matematik ilmini "Konusu bakımından bir şeyin ölçülebilir veya sayılabilir olma özelliğine ilişen ölçülebilir ya da sayılabilir şeylerin mahiyetinin incelenmesi" [96] şeklinde tanımlamaktadır. Matematiksel olarak saymanın konusu, varlıkları sayılabilme yönüyle sınıflayarak sayma ile tarif edip bilgi elde etmektir; çünkü bütün olarak sayılabilen nesneler ölçülebilir bir nesne üzerinde hayat bulmaktadır.

Matematiksel bilgi, 3-boyutlu ve duyuya açık cisim dünyasının algısıyla başlayan ancak cisim olmayan zihnî varlıkların ilişkileriyle kavramlaşan bilgi alanıdır [94]. Matematiksel nesneler beş duyuya kapalı zihinsel varlıklardır. Örneğin; matematiksel bir kavram olan üçgen, zihin dünyasında duyulara kapalı ve noktalardan oluşan geometrik şekiller olmasına rağmen fiziksel dünyada üçgen olarak tarif edilen şekiller

matematiksel olan üçgenin formuna sahip duyularla algılanan cisimlerdir [94]. Görüldüğü üzere; cisim dünyasında varlıklar beş duyu ile algılanmalarına karşın aralarındaki ilişkiler soyut ve aklîdir. Bu akledilir idrak düzeylerinin tekrar cisim dünyasında anlam bulmasının en etkili yolu model kullanmaktır. Model, aklî idrak ile oluşan düşüncenin sınırsızlığını kullanarak elde edilen bilgileri sınırlı cisimler dünyasına aktarmada bir geçiş yolu olarak kullanılan metodun adıdır [97].

Gözümüzle görebildiğimiz ya da göremediğimiz cisimler 3-boyuttur; ancak her cisim görünmemekle birlikte bir boyut ve iki boyutu kendinde barındırır. Cisim, 3-boyutlu sınırlı ya da sınırsız ölçüye sahip noktalar kümesi olarak tanımlanabilir. Cismin bu özelliğinden kaynaklı olarak 3-boyutlu cisimden bazı boyutların küçültülmesiyle doğru ve düzleme modeller oluşturulmaktadır. Örneğin; iki boyutu yeterince küçük olan bir cisim olarak düşünülen bir ip veya tel parçası doğru parçasına; bir boyutu yeterince küçük bir cisim olarak bir defter sayfası düzleme model olarak verilmektedir. Ancak boyut kavramı noktalar kümesine karşılık gelmektedir ve gözle görülemez. Dolayısıyla varlık düzeyinde bilinen nokta, doğru, düzlem gibi soyut kavramlar ancak bir model yardımıyla somut varlık bilgisine indirgenmektedir.

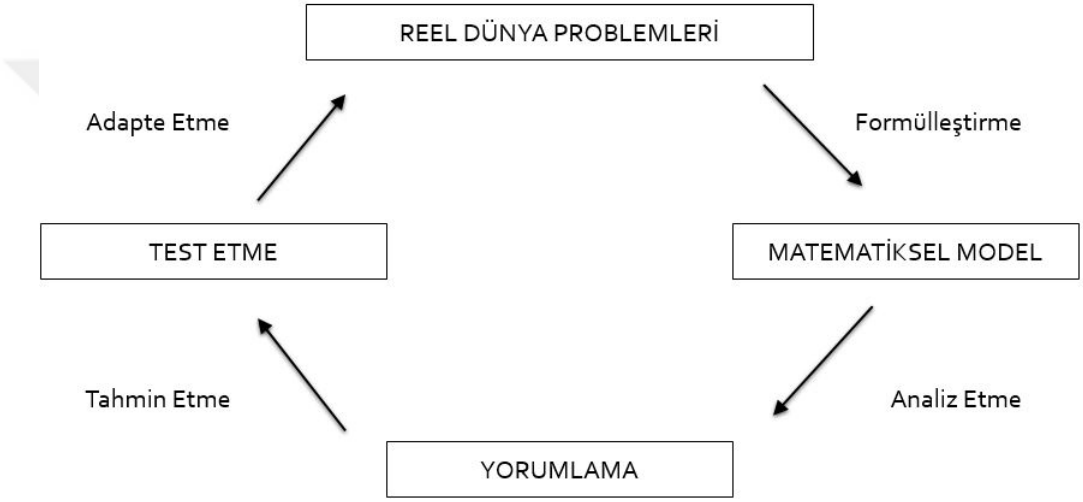
İbn Sînâ, cisim ile boyut kavramı arasındaki ilişkiyi şu şekilde ifade etmektedir:

"Cisim bir cevherdir ki bunda başlangıç olarak herhangi bir boyut varsayman mümkündür ve bu başlangıç uzunluk olur. Sonra yine bu boyutla dikey olarak kesişen bir başka boyut varsayabilirsin ve bu ikinci boyut genişlik olur. Yine söz konusu iki boyutla dikey olarak kesişen üçüncü bir boyut daha varsayabilirsin ve bu üçü tek bir yerde karşılaşırlar. Bu üç boyuttan başka bu sıfata sahip dikey bir boyut sayman mümkün değildir. Cismin bu sıfata sahip olması, kendisi sayesinde uzun, geniş ve derindir denilerek cisme işaret edilen şey demektir" [96].

Buradan, 3-boyut olarak tarif edilen cisim olma özelliklerinin uzunluk, genişlik ve derinlik olduğu sonucuna ulaşılmaktadır. 3-boyuttan daha büyük boyutlar ve uzaylar oluşturulmak istendiğinde üçüncü boyutun kesişme noktalarına dik doğrular çizilmelidir (kartezyen koordinatlar). Örneğin; n-boyutlu uzaylar için n tane doğru çizilmelidir.

2.2 Kavram-Model İlişkisi

Matematik, düşüncede oluşan mantıksal bir ifadeyi, ölçülebilir bir nesneyi ya da soyut bir kavramı konu edinerek kavram üreten ve kavramlar arasındaki ilişkileri açıklayan bir çalışma alanı olarak ifade edilebilir. Matematiksel düşünce hem duyu bilgilerinin elde ettiği ilişkileri hem de soyut aklî düzlemdeki idrak ile varlık arasındaki ilişkiyi kavramsallaştıracak güçlü bir sistem sunmaktadır. Zihinde oluşan bu ilişkilerin en iyi ifade edilme biçimi matematik dilidir [98]. Varlık düzeyinde bilinen matematiksel nesneler ya da kavramlar somut varlık bilgisine bir model yardımıyla indirgenir. Matematiksel nesnelerin nasıl modellendiğine dair modelleme diyagramı Şekil 2.2'de gösterilmiştir.



Şekil 2.2 Matematiksel modelleme diyagramı

Genel anlamda, bilim değişmez ilkelere sahip varlıklar üzerinden elde edilen anlamlı bilgi birikimidir. Anlamlı bilgi somut nesneler üzerinden edinilir, daha sonra akıl yoluyla soyutlanır. Bilim tarihinde hiçbir bilimsel gelişme kapalı kapılar arkasında gelişmemiştir; idrak sahibi insanın varlığı ve onlar arasındaki ilişkileri anlamak için göstermiş olduğu çabanın bir ürünüdür. Örneğin; fizikteki optik teorisi Newton'un kendi gözünün optik özelliğini fark edip gözüyle oynamasından ortaya çıkmış, diferansiyel hesap fincandaki kahvenin neden soğuduğu sorusuna cevap olarak gelişmiş, türev dünyada düzgün olmayan değişimlerin andaki değişimini hesaplama ve integral de düzgün olmayan değişimlerin ölçülmesi merakından doğmuştur.

Matematiğin soyut yapılı nesneleri olan sayı ve ölçü reel dünya bakımından somutlaştırılması için birçok ifade şekline sahiptir. Bir yöne göre; bütün saymanın soyut kavramsal adı tam sayılar ($\mathbb{Z}$), bir bütüne bağlı parçaları saymanın soyut kavramsal adı rasyonel sayılar ($\mathbb{Q}$) ile ifade edilir. Doğal sayılar ($\mathbb{N}$) ise yöne bağlı

olmayan düşünsel sayı sistemleridir, düşüncede olan eşlemeyi yapmak için kullanılır. Reel dünyada varlıkları saymak için kullanılan doğal sayılar ($\mathbb{N}$), tam sayılar ($\mathbb{Z}$) ve rasyonel sayılar ($\mathbb{Q}$) sayılabilir sonsuz noktadan oluşan sayı kümeleridir. Saymak ya da sayılabilirlik, bir kümedeki eleman sayısıyla doğal sayılar arasında bire bir eşleme kurabilmektir. Ölçü kavramları için kullanılan sayı sistemi reel sayılar ($\mathbb{R}$) kümesidir. Reel sayılar, rasyonel ve irrasyonel sayılardan oluşmaktadır. Ancak iki reel sayı arasında sayılamaz sonsuzlukta nokta bulunduğundan doğal sayılarla bire bir eşlenemez, dolayısıyla sayılabilir değildir.

Sayılabilir ve ölçülebilir (sayı sistemleri ve reel sayılar) iş ve oluşların tanımlanması ve nesnelerin ortak özelliklerine göre sınıflandırılması küme kuramıyla açıklanırken, bu ortak özelliğe sahip kümelerin birbirleriyle ilişkileri fonksiyonlar ile tanımlanmaktadır. Günlük hayatta kullanılan tüm iş yapıcıların matematiksel ifadesi fonksiyona karşılık gelir. Örneğin; bir fonksiyon olarak kahve öğütme makinesi (f) göz önüne alındığında; makine sadece kahve çekirdeklerini öğüterek toz haline getirir, kahve çekirdeğine benzer olarak organik ürünler dışındaki maddeleri öğütemez. Dolayısıyla makinenin girdisi makinenin cinsine göre karar verilir. Kahve çekirdekleri bağımsız değişken iken makinenin öğütme inceliğine göre elde edilen toz kahve bağımlı değişkendir. Ayrıca hem çekirdek kahvenin hem de toz kahvenin miktarı ölçülebilirdir; dolayısıyla öğütme makinesi ölçüyü ölçüye dönüştüren bir ilişkiye karşılık gelmektedir. Bu ilişki genel anlamıyla fonksiyon olarak adlandırılır.

Benzer tarzda sayma ve ölçü arasında tanımlanan ilişkiyi veren fonksiyonların özel bir sınıfı olarak tanımlanan kurallı iş ve eylemler dizi olarak adlandırılır. Reel dünyada bir kural çerçevesinde gerçekleşen eylemler varlıklar üzerinde diziler ile açıklanabilmektedir. Örneğin; sınırlı bir ip parçasının yarıdan bölme kuralıyla kesilmesi sayma ve ölçme ilişkisinin dizilerle ifade edilmesidir. 1 m. uzunluktaki ipin yarıdan bölme işlemi, n bir doğal sayı olmak üzere, $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ kuralıyla verilirse 1 m. uzunluktaki ipi (cisim) bir makas (f) yardımıyla sonsuz kez kesebilmemiz reel dünya bakımından mümkün değilken düşünsel olarak bu imkana sahiptir. Reel dünyada makasın hassasiyetine göre yarıdan bölme işlemi belirli bir sayıya kadar yapılabilir. Bu sayıya sonluluk anlamında n_0 diyelim. Ancak makasın ağzında kesilemeyen yeterince küçük boya (ε) sahip ipin, ölçüsü olmayan bir noktaya kadar sonsuz kez kesilebileceğini aklımızla idrak edebiliriz. Bu düşüncenin matematiksel adı dizilerin yakınsamasıdır. Yakınsama, bir dizinin sonsuz tane terimini kesilen noktanın ε-komşuluğunda bırakma işidir. Fiziksel bir olay üzerinde tanımlanan dizi kavramının matematik nesnelerle ifadesi şu şekildedir:

"$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $f(n) = x_n$ olmak üzere, (x_n) bir reel sayı dizisi ve $x_0 \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için dizinin sonlu sayıda terimleri dışındaki bütün terimleri x_0 noktasının ε-komşuluğunda kalıyorsa (x_n) dizisine x_0 noktasına yakınsaktır denir" [99].

Analiz ve fonksiyon kavramları reel dünya örnekleriyle açıklanmaya devam edilirse, yarıdan bölme kuralının yakınsaklığı açıkladığı gibi kesilen ipten elde edilen parçaların bütünden büyük olmayacak şekilde bir kuralla kesilme işi sınırlılık kavramına karşılık gelir. Ayrıca, yarıdan kesme kuralı; makasın ağzında kalan ε kadar uzunluğa ipin iki ucundan iki kuralla uygulandığında iki nokta arasındaki uzunluğun ε'dan küçük kalması işlemi ile Cauchy dizileri elde edilir. Bir kurala karşılık gelen diziler ile şehirlerin hava kirliliğini gidermek için yapılacak ölçümlerde havadaki karbondioksit miktarı düşürülerek daha temiz bir havaya ulaşılabilir, doğadaki canlı varlıkların ölüm ve çoğalmaları takip edilerek türlerin yok olması engellenebilir ya da aşırı popülasyon artışının vereceği zarar engellenebilir.

Bir kural ya da ilkeyle meydana gelen iş ve oluşların genel adının dizi olduğu yukarıda ifade edilmişti. Ancak bir kural ile meydana gelen iş ve eylemlerin sonuçları her zaman kontrol edilebilir değildir. Bir ipin yarıdan kesme kuralıyla kesilmesi eylemi kural bakımından kontrol edilebilirken serbest düşmeyle yere bırakılan bir topun her defasında düştüğü yüksekliğin 10^{-n} $(n \in \mathbb{N})$ kadar daha yükseğe çıkması kontrol edilemez bir eylemdir. Kurallı bir iş olması bakımından yarıdan kesme kuralında olduğu gibi yakınsaktır, ancak topun ilgili kurala göre hareketi sonucu itibariyle kontrol edilemediğinden ıraksaktır.

Sayma ve ölçme arasındaki ilişkinin genel gösterimi olan dizilerin her bir kuraldan elde edilen terimleri de ilginç özelliklere sahiptir. Kabaca tasnif edilirse; kurallı işlerin her bir teriminin toplamı seri olarak adlandırılmaktadır. Bu anlamda, kurallı işlerin kendileri kontrol edilirken toplamları kontrol edilememektedir. Örneğin; $\left(\frac{1}{n}\right)$ dizisi yakınsak bir dizi iken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi ıraksaktır. Bilim insanları $\left(\frac{1}{n}\right)$ kuralıyla atomdan nötron kopardıklarında ayrı ayrı nötron enerjisi anlamlı değilken $\left(\frac{1}{n}\right)$ kuralıyla elde ettikleri nötron enerjisini topladıklarında kontrol edilmezliğe yakın atom bombasının enerjisine ulaşmışlardır.

Varlıkların sınıflandırılmasında kullanılan iki önemli kavram sürekli ve kesikli olma nicelik kavramlarıdır. Sürekli nicelikler ölçme özelliğine sahipken kesikli nicelikler sayma özelliğine sahiptir. Duyular yoluyla algıladığımız cisim dünyasında varlıklar bu iki özelliğiyle matematiğin konusu olmaktadır. Süreklilik; bölündüğünde niteliğini kaybetmeyen şeyler ve noktasal bir harekettir. Günlük hayatta bir dönüştürücü, bir olayın meydana geldiği her hareketi resmediyorsa bu süreklilik kavramına karşılık gelir.

Matematiksel kavram olan süreklilik kavramının cisim dünyasında modellemesini fiziksel dünyadan bir olayla verelim: Bir video kamera, gerçek hayattaki olayları kendi dönüştürücü mekanizması ile belli oranda büyütüp küçülterek kendi ekranına yansıtıyor ise bir dönüştürücü olarak düşünüldüğünde, kamera bir fonksiyon olarak tanımlanabilir. Kameranın görüntü bölgesindeki bir hareketli nesnenin sabit bir hedefe doğru hareket ettiği göz önüne alınırsa hareketli nesne kameranın büyütme-küçültme oranına göre kamera ekranında da aynı şekilde hareket eder. Ekrandaki hareket süreklilik kavramına karşılık gelmektedir [94].

Fiziksel olarak meydana gelen bu olayı zihinsel karşılıkları olan matematiksel nesnelerle açıklayalım. Varlıkları görüntü altına alan kamera f fonksiyonuna, kameranın çekim yaptığı bölge X, görüntünün çekildiği bölge $\mathbb{R}$ ve $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu dönüştürücü (kamera) olarak modellenebilir. Hareketli nesnenin (x) belirlenen sabit hedef (x_0) ile arasındaki mesafe δ olarak düşünülürse görüntü ekranındaki hareketli nesne ile sabit hedef arasındaki mesafe ε kadardır [94]. Fiziksel nesnelerle ifade edilen süreklilik kavramının matematiksel nesnelerle ifadesi şu şekildedir:

" $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ ve $x_0 \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ olmak üzere, eğer $|x - x_0| < \delta$ koşulunu sağlayan her $x \in X$ için $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde ε'a bağlı bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa, f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir denir" [99].

Yukarıda verilen süreklilik tanımında; sabit hedefin delinmiş bir nokta olduğu kabul edilirse, kamera görüntüsü bu delinmiş noktayı ekrana sanal bir nokta olarak yansıtır. Bu delinmiş noktanın ekran görüntüsü fonksiyon limiti denilen matematiksel kavrama karşılık gelmektedir.

1820'lerde Cauchy'nin limit tanımını kullanarak süreklilik, türev, integral kavramlarını ifade etmesiyle birlikte matematiksel analiz daha sağlam temeller üzerine oturtulmuştur. Ortalama olarak bilinen düzgün olmayan değişimlerin ölçüsü türevin keşfedilmesiyle ansal (noktasal) olarak hesaplanabilir hale gelmiştir. Ayrıca ansal değişimlerin toplamı olarak integralin tanımlanmasıyla düzgün olmayan ve birbirinden ayrık nitelikteki nesnelerin bir sistem olarak kurulabilmesine olanak sağlanmıştır [100].

Türev, evrende düzgün olmayan değişimlerin hesaplanması ve kontrol edilme yöntemidir. 1670'li yıllarda ortalama hız bilinirken ansal yani noktasal hız bilinmemekteydi. Bu problemin matematiksel karşılığı; bir noktası bilinen doğru denkleminin yorumlanamamasıdır. 1670 yılında Newton ve Leibniz eş zamanlı olarak noktadaki değişimi hesaplamıştır. Gerçek hayattan ansal değişime yani türeve örnek olacak olayların bazıları şu şekilde sıralanabilir: Islak bir ip parçasından süzülen suyun

ipin herhangi bir noktasındaki yoğunluğu, bir mercek altında yansıyan ışık, sabit hızla gitmeyen bir aracın hızı, kenarları doğrular olmayan ve düzgün olmayan şekillerin alan ve hacimleri örnek olarak verilebilir.

2.3 Matematiksel Analiz ve Fonksiyonel Analiz ile İlgili Bazı Temel Kavramlar

Bu bölümde tez boyunca kullanılacak matematiksel analiz ve fonksiyonel analiz ile ilgili kavramlara yer verilmiştir.

Zihnimizde soyut olarak tanımlanan sayı kümeleri bir doğru parçası ile bire bir eşlendiğinde reel doğruya karşılık gelmektedir. Reel doğru sayılamaz sonsuzlukta nokta içerdiğinden ölçülebilirdir; uzunluk belirtir ve doğrusaldır. Sayılabilir sonsuzluktaki noktanın oluşturduğu rasyonel sayıların ölçüsü sıfır olduğundan sayılamaz sonsuzlukta noktanın oluşturduğu irrasyonel sayılar ($\mathbb{I}$) reel doğruda uzunluğa karşılık gelmektedir. Reel sayılardan meydana gelen kümelere lineer nokta kümeleri denir. Reel doğru bir ölçüye sahip olduğundan aralıklara bölünebilirdir.

a ve b iki reel sayı ve $a < b$ olsun.

$$\begin{aligned}(a,b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},\ [a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \\ [a,b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\},\ (a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}\end{aligned}$$

kümelerine sırasıyla açık aralık, kapalı aralık ve yarı açık aralıklar denir. Ayrıca aralıkların sonsuz genişlemesi (a,∞), $[a,\infty)$, $(-\infty,a)$, $(-\infty,a]$ şeklinde yarı açık aralıklarla gösterilmektedir. Reel sayılar $\mathbb{R} = (-\infty,a] \cup (a,\infty)$ ile gösterilir. Aralıklar bir boy belirtir ve ne kadar küçük olursa olsun sayılamaz sonsuzlukta nokta içermektedir. Örneğin; $(-\infty,\infty)$ aralığındaki nokta sayısı ile $(0,1)$ aralığındaki nokta sayısı aynı ve sayılamaz sonsuzluktadır; ancak ölçüleri farklıdır. Matematiksel analizde limit, süreklilik, türev gibi önemli kavramların tanımlanmasında kullanılan ε (epsilon), reel doğrudan alınan yeterince küçük boya sahip parçanın uzunluğu olarak tanımlanmaktadır.

Lineer nokta kümelerinin sınırları aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

Tanım 2.1. Reel sayılar kümesinin bir S alt kümesini alalım. Her $x \in S$ için $x \leq a$ olacak şekilde bir a reel sayısı var ise a'ya S kümesinin üst sınırı denir. S kümesine de üstten sınırlıdır denir. Benzer şekilde, her $x \in S$ için $b \leq x$ olacak şekilde bir b reel sayısı var ise b'ye S kümesinin alt sınırı denir. S kümesine de alttan sınırlıdır denir. Bir küme alttan ve üstten sınırlıysa bu kümeye sınırlıdır denir [101].

Tanım 2.2. Reel sayıların $S \subset \mathbb{R}$ kümesinin üst sınırlarının en küçüğüne S'nin en küçük üst sınırı veya supremumu denir ve $\sup S$ ile gösterilir. Benzer şekilde, $S \subset \mathbb{R}$ kümesinin alt sınırlarının en büyüğüne S'nin en büyük alt sınırı veya infimumu denir ve $\inf S$ ile gösterilir. Ayrıca

$$\sup S := \min\{a \in \mathbb{R} \mid x \in S \ (x \leq a)\}$$
$$\inf S := \max\{b \in \mathbb{R} \mid x \in S \ (b \leq x)\}$$

şeklinde tanımlanmaktadır [102].

Bir kümenin üst ve alt sınırlarının varlığını test etmek için aşağıdaki teorem kullanılmaktadır.

Teorem 2.1. ***(a)*** *Bir $S \subset \mathbb{R}$ kümesinin en küçük üst sınırı a olsun. Bu takdirde,*

(i) a, S'nin bir üst sınırıdır.

(ii) Her $\varepsilon > 0$ için $x(\varepsilon) > a - \varepsilon$ olacak şekilde bir $x(\varepsilon) \in S$ sayısı vardır.

(b) *Bir $S \subset \mathbb{R}$ kümesinin en büyük alt sınırı b olsun. Bu takdirde,*

(i) b, S'nin bir alt sınırıdır.

(ii) Her $\varepsilon > 0$ için $x(\varepsilon) < b + \varepsilon$ olacak şekilde bir $x(\varepsilon) \in S$ sayısı vardır [101].

Tanım 2.3. $S \subset \mathbb{R}$ olsun.

(a) S kümesi üstten sınırlı ve $\sup S \in S$ ise S'nin supremumuna S'nin maksimumu denir ve $\max S$ ile gösterilir.

(b) S kümesi alttan sınırlı ve $\inf S \in S$ ise S'nin infimumuna S'nin minimumu denir ve $\min S$ ile gösterilir [103].

Tanım 2.4 (**Fonksiyon**)**.** X ve Y boştan farklı iki küme olsun. Bir f kuralına göre her $x \in X$ elemanı için bir $y \in Y$ elemanı var ise f'ye X kümesinden Y kümesi üzerine tanımlı bir fonksiyon denir. $f : X \to Y$ sembolü ile gösterilir [102].

Tanım 2.5 (**Bileşke Fonksiyon**)**.** $f : X \to Y$ ve $g : Y \to Z$ olsun. g fonksiyonu f kümesinin $f(x)$ elemanını Z kümesinin bir $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ formülü ile tanımlanan elemanına $g \circ f : X \to Z$ dönüşümü ile eşlesin. Bu takdirde, $g \circ f$ fonksiyonuna f ve g dönüşümlerinin bileşkesi denir [102].

Tanım 2.6 (**Sınırlı Fonksiyon**)**.** $A \subset \mathbb{R}$ ve $f : A \to \mathbb{R}$ olsun.

(a) Her $x \in A$ için $f(x) < K$ olacak şekilde bir K sayısı var ise f fonksiyonuna üstten sınırlı fonksiyon denir.

(b) Her $x \in A$ için $f(x) > K$ olacak şekilde bir K sayısı var ise f fonksiyonuna alttan sınırlı fonksiyon denir.

(c) Her $x \in A$ için $|f(x)| < K$ olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı var ise f fonksiyonuna sınırlı fonksiyon denir.

Eğer f fonksiyonu üstten sınırlı ise $\sup_A f := \sup\{f(x) : x \in A\}$, alttan sınırlı ise $\inf_A f := \inf\{f(x) : x \in A\}$ kümeleri ile gösterilir [104].

Fonksiyonun özel bir hali olarak kurallı iş ve oluşları temsil eden matematiksel ilişkiler dizi olarak adlandırılmaktadır.

Tanım 2.7 (**Dizi**)**.** Tanım kümesi doğal sayılar olan $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna *reel terimli dizi* denir. Her $n \in \mathbb{N}$ için genel terimi $x_n := f(n)$ olan bir dizi

$$x = (x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

şeklinde ifade edilir [102].

Tanım 2.8 (**Sınırlı Dizi**)**.** (x_n) bir reel sayı dizisi olsun. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $|x_n| < M$ olacak şekilde bir M sayısı var ise (x_n) dizisine sınırlıdır denir [102].

Tanım 2.9 (**Monoton Dizi**)**.** (x_n) bir reel sayı dizisi olsun. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \geq x_n$ $(x_n \geq x_{n+1})$ ise (x_n) dizisine monoton artan (azalan) dizi denir. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} > x_n$ $(x_n > x_{n+1})$ ise (x_n) dizisine kesin monoton artan (azalan) dizi denir [101].

Tanım 2.10 (**Yakınsak Dizi**)**.** (x_n) bir reel sayı dizisi olsun. (x_n) dizisinin bir $x_0 \in \mathbb{R}$ sayısına yakınsak olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda $|x_n - x_0| < \varepsilon$ olacak şekilde ε'a bağlı bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ veya $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ şeklinde gösterilir. Yakınsak olmayan veya limiti mevcut olmayan dizilere ıraksak dizi denir. [105].

Tanım 2.11 (**Cauchy Dizisi**)**.** (x_n) bir reel sayı dizisi ve $\varepsilon > 0$ olsun. Eğer her $m, n \geq n_0$ olduğunda $|x_n - x_m| < \varepsilon$ olacak şekilde ε'a bağlı bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir. [99].

Teorem 2.2. *Monoton bir dizinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul sınırlı olmasıdır [106].*

Tanım 2.12 (**Fonksiyon Limiti**)**.** $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık, $x_0 \in I$ ve $f : I\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R}$ tanımlı fonksiyon olarak verilsin. Her $\varepsilon > 0$, $|x - x_0| < \delta$ koşulunu sağlayan her $x \in I\setminus\{x_0\}$ için $|f(x) - L| < \varepsilon$ olacak şekilde ε'a bağlı bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa, $L \in \mathbb{R}$ sayısına f fonksiyonunun x_0 noktasındaki limiti denir ve $f(x) \to L$ $(x \to x_0)$ veya $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ şeklinde gösterilir [103].

Tanım 2.13 (**Sürekli Fonksiyon**). $X \subseteq \mathbb{R}$ herhangi bir aralık, $x_0 \in X$ ve $f : X \to \mathbb{R}$ tanımlı fonksiyon olarak verilsin. Her $\varepsilon > 0$, $|x - x_0| < \delta$ koşulunu sağlayan her $x \in X$ için $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde ε'a bağlı bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa, f fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir denir ve $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ şeklinde gösterilir [107].

Tanım 2.14 (**Türev**). $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon ve $x_0 \in (a, b)$ olsun. Eğer

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

limiti var ve sonlu ise f fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilirdir denir. Bu tanıma denk olarak, $h = x - x_0$ alındığında f'nin x_0 noktasındaki türevi

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

şeklinde ifade edilir ve $f'(x_0)$ ile gösterilir [99].

Teorem 2.3 (**Bileşke Fonksiyonun Türevi**). *f ve g reel fonksiyonlar olsun. f fonksiyonu x noktasında ve g fonksiyonu $f(x)$ noktasında türevlenebilir ise $g \circ f$ fonksiyonu x noktasında türevlenebilirdir ve*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) f'(x)$$

şeklindedir [105].

Teorem 2.4. *f fonksiyonu bir x_0 noktasında türevlenebiliyor ise f fonksiyonu bu noktada süreklidir [105].*

Reel sayılarda iki sayı arasındaki uzaklık $|x - y|$ ile gösterilir. Bu düşünceyi daha soyut olan $\mathbb{R}$ yerine herhangi bir X kümesi üzerinde gerçekleştirmenin metodu metrik (uzaklık) fonksiyonuyla mümkündür. Bu uzayın elemanları somut ya da soyut varlıklar arası uzaklıklardır.

Tanım 2.15 (**Metrik Uzay**). X boştan farklı bir küme olsun.

$$\begin{aligned} d : X \times X &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\to d(x, y) \end{aligned}$$

fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için

M1. $d(x,y) \geq 0$ ve $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M2. $d(x,y) = d(y,x)$ (simetri)

M3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (üçgen eşitsizliği)

koşullarını sağlıyor ise d fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir metrik denir. (X,d) ikilisi metrik uzay olarak adlandırılır [108].

Reel doğruda

$$d(x,y) = |x-y|$$

şeklindeki $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu alışılmış metrik olarak tanımlanmaktadır.

Bu noktaya kadar elemanları uzaklıklar olan uzayların özellikleri verilmiştir, bu kısımdan sonra elemanları hareket ölçüsü (şiddeti) olan uzaylar takdim edilecektir.

Tanım 2.16 (**Lineer Uzay**). V boştan farklı bir küme olmak üzere

$$\begin{array}{c} +: V \times W \to W \ , \ \cdot : \mathbb{K} \times W \to W \\ (x,y) \to x+y \qquad (a,x) \to a.x \end{array}$$

olacak şekilde $+$ ve $\cdot$ dönüşümleri tanımlansın. Aşağıda verilen koşullar sağlanıyorsa $(W, \mathbb{K}, +, \cdot)$ dörtlüsüne veya W kümesine $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) cismi üzerinde bir lineer uzay denir:

1. Her $x,y,z \in W$ için $x + (y+z) = (x+y) + z$ dir.
2. Her $x,y \in W$ için $x + y = y + x$ dir.
3. Her $x \in W$ için $x + \theta = x$ olacak şekilde $\theta \in W$ vardır.
4. Her bir $x \in W$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde $-x \in W$ vardır.
5. Her $x \in W$ ve $a,b \in \mathbb{K}$ için $(a+b).x = a.x + b.x$ dir.
6. Her $x,y \in W$ ve $a \in \mathbb{K}$ için $a.(x+y) = a.x + a.y$ dir.
7. Her $x \in W$ ve $a,b \in \mathbb{K}$ için $a.(b.x) = (a.b).x$ dir.
8. Her $x \in W$ için $1.x = x$ dir.

Bir lineer uzay $\mathbb{R}$ üzerinde ise reel lineer uzay, $\mathbb{C}$ üzerinde ise kompleks lineer uzay olarak adlandırılır [109].

Normlu uzaylar hareketli nesnelerin hareket şiddetiyle oluşturduğu vektör uzaylarıdır. Metrik uzaylar ise duran nesnelerin uzaklıklarından elde edilen uzunlukların toplamının oluşturduğu uzaylardır.

Tanım 2.17 (**Normlu Uzay**)**.** X lineer uzayı ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) üzerinde $\|.\| : X \to \mathbb{R}^+$ olarak tanımlı $\|x\|$ fonksiyonu her $x, y \in X$ ve $\lambda \in \mathbb{K}$ için

N1. $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

N2. $\|\lambda.x\| = |\lambda| \, . \, \|x\|$

N3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Üçgen Eşitsizliği)

şartlarını sağlıyorsa bu fonksiyona X üzerinde bir vektörün normu denir. $(X, \|.\|)$ ikilisi normlu lineer uzay olarak adlandırılır [108].

Her normlu uzay aynı zamanda bir metrik uzaydır. Metrik uzay üzerinde bir norm

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

metriği ile tanımlıdır. Ayrıca, $\mathbb{R}$ üzerindeki norm $x \in \mathbb{R}$ için $\|x\| = |x|$ şeklindedir.

Tanım 2.18. X bir normlu uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. (x_n) dizisinin bir $x_0 \in X$ elemanına yakınsak olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda $\|x_n - x_0\| < \varepsilon$ olacak şekilde ε'a bağlı bazı $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı var ise (x_n) dizisi $x_0 \in X$ elemanına yakınsaktır denir. Yani, $n \to \infty$ iken $\|x_n - x\| \to 0$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ elemanı vardır [110].

Tanım 2.19. X bir normlu uzay ve $(x_n) \in X$ bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m, n \geq n_0$ olduğunda $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde ε'a bağlı bazı $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı var ise (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir. Yani, $n > m \to \infty$ iken $\|x_n - x_m\| \to 0$ olur [111].

Tanım 2.20. X normlu uzayının tam olması için gerek ve yeter koşul her $(x_n) \in X$ Cauchy dizisi yakınsaktır ve yakınsadığı x elemanı X uzayına aittir. Yani, $(x_n) \in X$ için $\|x_n - x_m\| \to 0$ $(n, m \to \infty)$ iken $\|x_n - x\| \to 0$ $(n \to \infty)$ olacak şekilde bir $x \in X$ elemanı vardır [112].

Tanım 2.21 (**Banach Uzayı**)**.** X normlu lineer uzayında alınan her Cauchy dizisi yakınsaksa X uzayına bir Banach uzayı denir [113].

Tanım 2.22 (**Lineer Operatör**). X ve Y lineer uzaylar olsun. $T : X \to Y$ dönüşümünün lineer operatör olması için gerek ve yeter şart her $x, y \in X$ ve α, β skalerleri için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

sağlanmaktadır [112].

Tanım 2.23 (**Sürekli Lineer Operatör**). $T : X \to Y$ bir dönüşüm olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $\|x - x_0\| < \delta$ olduğunda $\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta(x_0, \varepsilon)$ sayısı bulunabiliyor ise T operatörü $x_0 \in X$ noktasında süreklidir denir [112].

Tanım 2.24 (**Sınırlı Lineer Operatör**). $T : X \to Y$ lineer operatörünün sınırlı olması için gerek ve yeter şart her $x \in X$ için

$$\|T(x)\| \leq M \|x\| \tag{2.1}$$

olacak şekilde pozitif bir M sabiti vardır [112].

Teorem 2.5. *X ve Y iki normlu uzay ve $T : X \to Y$ bir lineer operatör olsun. Bu takdirde,*

(a) T'nin sürekli olması için gerek ve yeter koşul T'nin sınırlı olmasıdır.

(b) T bir noktada sürekli ise X üzerinde de süreklidir [114].

X'den Y'ye tanımlı tüm lineer operatörlerin kümesi $L(X, Y)$, X'den Y'ye tanımlı tüm sınırlı (sürekli) lineer operatörlerin kümesi $B(X, Y)$ ile gösterilmektedir.

Tanım 2.25 (**Operatör Normu**). $T \in B(X, Y)$ olsun. T operatörünün normu

$$\|T\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} < \infty$$

olarak tanımlanır. Diğer bir ifadeyle; (2.1) koşulunu sağlayan M sayılarının alt sınırlarının en büyüğüdür ve

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|$$

ile gösterilmektedir [112].

3
DİSKRİT DİNAMİK SİSTEMLER VE KAOS TEORİ

3.1 Matematiksel Modellerde Büyüme Kavramı

Bir öğretmen her bir öğrencisinden maillerine gönderilen e-posta mesajını on arkadaşına iletmesini ister. Eğer tüm öğrenciler mesajı 10 kişiye gönderirse ve ertesi gün bu kişilerin her biri, mesajı onar kişiye daha gönderirse üçüncü günde 100, dördüncü günde 1000, birinci haftada da dünyadaki e-posta adresinden daha fazla sayıda e-posta sayısına ulaşılır. Dolayısıyla, okulun e-posta kotasını aşar ve kapatıldığı yönünde otomatik bir yanıt alınır [115]. Bir bilimsel hesap makinesinin herhangi bir sayı (a) tuşuna basıldıktan sonra üstel fonksiyon (exp) tuşuna tekrar tekrar basıldığında

$$a, e^a, e^{e^a}, e^{e^{e^a}}, \ldots$$

şeklinde bir sayı dizisi elde edilir. Üstel fonksiyonun kendisi ile bileşkesinin üst üste uygulanması işlemi bir fonksiyon iterasyonuna (yineleme) karşılık gelmektedir. Başlangıçta seçilen sayıdan bağımsız olarak, aynı işlem sürekli tekrarlandığında hesap makinesinin kapasitesinin sınırları aşılır ve hata mesajı verir; bu iterasyon dizisinin sonsuza gittiği anlamına gelir [116]. Yukarıda bahsedilen örnekler üstel büyümeye birer örnektir.

3.1.1 Üstel Büyüme ve Lojistik Büyüme Modeli

Gözlemlenebilen ve deneysel olarak belirlenen parametreler göz önüne alındığında popülasyonların uzun vadeli davranışlarını tahmin etmek için basit matematiksel modeller kullanılmaktadır. Bu modeller, popülasyonların sürekli veya ayrık zamanlardaki değişimi, yani tür nüfusunun yılda bir veya bir nesil sonra ölçülmesi gibi varsayımlara bağlı olarak diferansiyel denklemler veya fark denklemleri ile tanımlanmaktadır. Nesiller boyunca büyüyen ya da küçülen belirli bir türün popülasyon davranışını tahmin etmek için kullanılan matematiksel modellere üstel büyüme modeli denir.

Üstel büyüme modelleri

$$P_{n+1} = rP_n \tag{3.1}$$

şeklindeki fark denklemi ile ifade edilmektedir. Bu modelde, tek bir türün popülasyonunun belirli bir zamanda mevcut popülasyonla doğru orantılı olarak değiştiği varsayılmaktadır.

Bireyleri aynı mevsimde doğup ölen Mayıs sinekleri türünü ele alalım. Mayıs sineklerinin ilk başlangıç sayısı P_0 olarak alınırsa 1 yıl sonraki popülasyon sayısı P_1 olur. r iklim şartları, mevcut yiyecek miktarı, yırtıcıların sayısı gibi çevre şartlarına bağlı bir sabiti temsil etmektedir. Sonraki nesillerin popülasyon büyümesinin aşağıdaki şekilde ilerlemesi beklenmektedir:

$$\begin{aligned}
P_1 &= rP_0 \\
P_2 &= rP_1 = r^2P_0 \\
P_3 &= rP_2 = r^3P_0 \\
&\vdots \\
P_n &= rP_{n-1} = r^nP_0.
\end{aligned}$$

Görüldüğü üzere, popülasyonun davranışı $f(x) = rx$ iterasyon fonksiyonuyla belirlenmektedir. Dolayısıyla n nesil sonra türün popülasyonu

$$P_n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ defa}}(P_0) = r^nP_0$$

şeklinde gösterilir [90]. r parametresi aynı zamanda popülasyonun büyüme hızını temsil etmektedir. Mayıs sinekleri popülasyonunun yıllar içerisindeki davranışı r parametresinin değerine göre değişmektedir. Eğer $r > 1$ ise Mayıs sineği sayısı kontrolsüz bir şekilde arttığı anlamına gelir ve r^n sonsuza gitme eğilimi gösterir. Eğer $r < 1$ ise Mayıs sineği soyunun tükenmesi söz konusudur ve r^n sıfır olma eğilimindedir. Son olarak, $r = 1$ yani $P_n = P_0$ olduğunda ise popülasyonda herhangi bir değişiklik olmadığı anlamına gelmektedir. Böylelikle, sadece Mayıs sineklerinin değil, (3.1) denklemi ile verilen herhangi bir türün popülasyonunun da nasıl davranacağına dair r parametresine bağlı olarak tahminlerde bulunulabilir.

Ancak doğal ekosistemlerin sınırlı kaynaklara sahip olması ve gerçekte popülasyonların daha karmaşık şekillerde davranıyor olmaları üstel popülasyon artışı kavramına zıt bir durumdur. Sabit bir dış etki faktörüyle popülasyon artışı sonsuza kadar sürmez. Bir noktadan sonra çevre kaynakları nüfusun artışıyla tehlikeye girer ve büyüme üstelden daha düşük bir seviyeye doğru yavaşlar. Örneğin;

Mayıs sineklerinin sayısı çok fazla artarsa fazla nüfusu beslemek için yeterli yiyecek bulunmayacak veya yırtıcılar sinekleri daha kolay yakalayacaktır. Büyük nüfuslar her birey için mevcut kaynakları tüketecek ve çoğalma aşağıya doğru düşecektir, dolayısıyla nüfus artışı sınırlı olacaktır. Bu nedenle, üstel büyüme denklemine aşırı kalabalıklaşma, ölüm oranı gibi ihtimallerin göz önüne alındığıpopülasyonun nüfusu çok artınca nüfus artışını sınırlandıracak ek kısıtlamalar veya parametreler eklenmesi gerekmektedir. Bu nedenle, ilk olarak aşağıda verilen şekilde P^2 ile orantılı bir terim çıkartılarak popülasyon büyüklüğünün azaltılması sağlanır:

$$P_1 = rP_0 - kP_0^2. \tag{3.2}$$

P'nin ilerleyen yıllardaki değişimi hesaplanırsa

$$\begin{aligned} P_2 &= rP_1 - kP_1^2 \\ P_3 &= rP_2 - kP_2^2 \\ &\vdots \\ P_{n+1} &= rP_n - kP_n^2 \end{aligned}$$

dizisi elde edilir. (3.2) denklemine göre, popülasyon bir maksimuma sahip olmalıdır. $P_{n+1} > 0$ olması için $P_n < \frac{r}{k}$ olması gerekir. $\frac{r}{k} = P^{\max}$ olarak alınırsa $P_n < P^{\max}$ olacağından P_n, $P^{\max}$ sayısını aşamaz. Buradan,

$$x_n = \frac{P_n}{P^{\max}}$$

şeklinde yeni bir değişken tanımlanır. Modelin anlamlı olabilmesi için x_n, 0 ile 1 aralığında olmalıdır. Yapılan bu işleme normalleştirme denir [117].

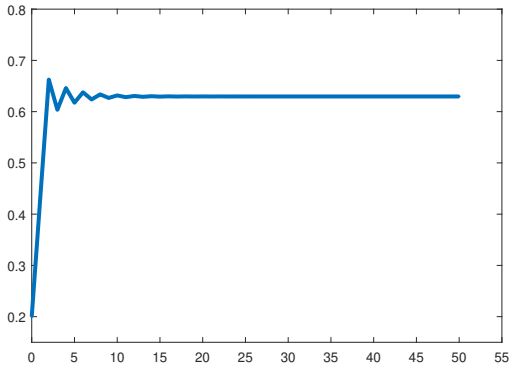
(3.2) denkleminin tanımından ve yukarıda elde edilen eşitlikler kullanılarak $(n+1)$. yıldaki x_{n+1} popülasyonu aşağıdaki şekilde hesaplanmaktadır:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{P_{n+1}}{P^{\max}} \\ &= \frac{rx_nP^{\max} - kx_n^2(P^{\max})^2}{P^{\max}} \\ &= rx_n - kx_n^2P^{\max} \\ &= rx_n - kx_n^2\left(\frac{r}{k}\right) \\ &= rx_n - rx_n^2. \end{aligned}$$

Böylece çevre koşullarıyla desteklenen ve dengede olan bir popülasyon için büyümenin lojistik modeli

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n) \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlanır [6]. Lojistik büyüme modeli, adını 1845 yılında P.F. Verhulst [118, 119] tarafından sınırlı bir çevredeki nüfus gelişimini modellemek için kullanılan diferansiyel denklemden almıştır. Bu denklem, herhangi bir popülasyon türünün bir nesilden diğerine nasıl değiştiğini açıklamaktadır. r parametresi düşük ya da yüksek hıza ayarlanabilen nüfus artış hızıdır. Yeni eklenen $(1 - x_n)$ terimi büyümeyi belli sınırlar içinde tutar ve x_n arttıkça $(1 - x_n)$ düşmektedir. Yani, nüfus ne kadar düşük olursa olsun neredeyse tüm bireyler hayatta kalabilir ve yiyeceğe ulaşabilir. Diğer taraftan, nüfus çok yüksekse çoğu birey açlıktan ölmekten veya avcılara yem olmaktan kurtulamaz [117]. Şekil 3.1'de lojistik popülasyon nüfusunun büyümesinin aşırı düzeye ulaştığında dengelendiği gösterilmiştir [10].



Şekil 3.1 Popülasyon artışının aşırı düzeyde olunca düşmesi ve dengelenmesi

r parametresi fiziksel sistemlerde ışığın hızı, dünyanın kütlesi, ısınma düzeyi, sürtünme derecesi ya da karışıklığa yol açan bir özelliğin miktarına karşılık gelirken biyolojik sistemlerde doğurganlığa, nüfus artışı ya da düşüş eğilimine karşılık gelmektedir [10]. Eğer x_n göldeki balıkların sayısıysa r göldeki yem miktarıdır, eğer x_n musluktan düşen damlalar arasındaki süreyse r musluktan sızan suyun miktarıdır, eğer x_n sıvı ısı yayımında silindirlerin devinimiyse r de cihazın tabanına uygulanan ısıdır [115].

Basit bir matematiksel model olarak, $f(x) = 2x$ fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon her x sayısını iki katı büyük olan sayıya atayan bir kurala karşılık gelir. x'in bir laboratuvar kültüründeki bakteri popülasyonu ve $f(x)$'in de bir saat sonraki bakteri sayısını gösterdiği kabul edilirse bu kural bakteri nüfusunun her saat iki katına çıktığını ifade etmektedir. Eğer kültürün başlangıçta 10.000 bakteri popülasyonu varsa bir saat sonra $f(10.000) = 20.000$ bakteri olur, iki saat sonra $f(f(10.000)) = 40.000$

bakteri olur ve bu böyle devam eder. Bu sistem $x_{n+1} = f(x_n) = 2x_n$ kuralı altında zamana bağlı olarak değişen basit bir dinamik sistemi temsil etmektedir. Burada n değişkeni zamanı, x_n ise n. zamandaki popülasyonu belirtmektedir. f kuralının çıktısı bir sonraki saat için girdi olarak kullanılır ve aynı kural tekrar tekrar uygulanır.

$f(x) = 2x$ kuralının geliştirilmiş bir modeli olarak x'in milyonlarla ölçüldüğü $g(x) = 2x(1-x)$ kuralını ele alalım. Bu modelde, 10.000 olarak alınan başlangıç nüfusu $x = .01$ milyona karşılık gelir. $x = 0.01$ başlangıç değeri için $f(x)$ ve $g(x)$ modellerinin getirdiği sonuçlar karşılaştırılmıştır. Ardışık n değerleri için $f^n(x)$ ve $g^n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ değerleri Tablo 3.1'de gösterilmiştir.

Tablo 3.1 $f(x) = 2x$ üstel büyüme modeliyle $g(x) = 2x(1-x)$ lojistik büyüme modelinin karşılaştırılması

n	$f^n(x)$	$g^n(x)$
0	0.0100000000	0.0100000000
1	0.0200000000	0.0198000000
2	0.0400000000	0.0388159200
3	0.0800000000	0.0746184887
4	0.1600000000	0.1381011397
5	0.3200000000	0.2380584298
6	0.6400000000	0.3627732276
7	1.2800000000	0.4623376259
8	2.5600000000	0.4971630912
9	5.1200000000	0.4999839039
10	10.2400000000	0.4999999995
11	20.4800000000	0.5000000000
12	40.9600000000	0.5000000000

$f(x)$ ve $g(x)$ modelleri altında bakteri popülasyonunun büyüklüğünün davranışı arasında farklılıklar olduğu görülmektedir. $f(x)$ dinamik sistemi altında $x = 0.01$ başlangıç popülasyonun büyüklüğü zaman ilerledikçe keyfi olarak çok büyük nüfus artışıyla sonuçlanmaktadır. $g(x)$ dinamik sistemi altında ise $x = 0.01$ başlangıç popülasyonu ilk olarak $f(x)$ ile benzer şekilde ilerlemektedir ve her saat yaklaşık olarak iki katına çıkmaktadır. Ancak sonunda nüfus $x = 0.50$ (yarım milyon) olduğunda popülasyon maksimum sınırına ulaşır ve bir daha asla değişmez [120]. Böylece $g(x) = 2x(1-x)$ lojistik büyüme fonksiyonu popülasyonların sonlu bir limite sahip olmasını ve farklı başlangıç değerlerinde aynı sınır popülasyonunda kalmasını sağlamaktadır. Lojistik model için $x = 0.50$ sınırlayıcı popülasyon, ayrık zamanlı dinamik sistemin sabit noktasıdır. Bu özellik, bilim insanları için popülasyonların mevcut çevresel kaynaklarla uyumlu olan sabit bir duruma ulaşması için kullandıkları yöntemlerden biridir. Böylece üstel büyümenin doğrusal büyümeden çok daha hızlı olduğu açıkça görülmektedir. Parametre değerlerine bağlı olmaksızın, üstel büyümenin doğrusal büyümeyi ne kadar hızlı olursa olsun aşacağı aşikardır.

3.2 Diskrit Dinamik Sistemlerde Sabit Nokta ve Yörüngeler

Dinamik sistemler, fizikteki klasik mekaniğin diferansiyel denklemlerinden matematiksel ekonomi ve biyolojinin fark denklemlerine kadar bilimin tüm dallarında ortaya çıkmaktadır. Özellikle fark denklemleri kesintili zaman aralıklarının modellenmesinde güçlü bir araç olarak kullanılır ve aşağıda verilen çeşitli şekillerde ortaya çıkmaktadır:

1. Diferansiyel denklemleri analiz eden araçlar olarak ortaya çıkışı. Örneğin; Poincaré dönüşümleri periyodik çözümlerin kararlılığının analiz edilmesine olanak vermiş, Lorenz dönüşümleri ise Lorenz çekicisinin garipliğine dair güçlü kanıtlar sunmuştur.

2. Doğal olayların modelleri olarak ortaya çıkışı. Çoğu bilimsel çalışmada zaman kesikli (ayrık) olarak kabul edilmektedir. Ardışık nesillerin örtüşmediği belirli hayvan popülasyonlarının incelenmesi, dijital elektronikler, ekonomi ve finans teorisinin bazı alanları, aniden çalıştırılan mekanik sistemler örnek olarak verilebilir.

3. Basit kaos örnekleri olarak ortaya çıkışı. Kaos için bu dönüşümler kendi başlarına çalışmak için ilginç matematiksel laboratuvarlardır. Fark denklemleri diferansiyel denklemlerden çok daha şaşırtıcı davranışlara sahiptir, çünkü x_n noktaları sürekli devam etmek yerine yörüngeleri boyunca sıçramaktadır [53].

Fark denklemleri iterasyonlar ile kolaylıkla çözülmekte ve sayısal çözümleri diferansiyel denklemlerden çok daha az zaman almaktadır. Ayrıca bilgisayarlar yalnızca iterasyonları veya fark denklemlerini anladıklarından ötürü diskrit algoritmalar farklı disiplinlerdeki araştırmacılar için her zaman daha çok tercih edilme sebebi olmuştur.

İki tür dinamik sistem vardır: Diskrit dinamik sistemler ve sürekli dinamik sistemler. Zamanın yıllar veya nesiller gibi ayrık aralıklarla ölçüldüğü fark denklemleri diskrit dinamik sistemler, zamanın sürekli bir değişken olduğu diferansiyel denklemler ise sürekli dinamik sistemler olarak adlandırılmaktadır. Bizim çalışmamız, diskrit dinamik sistemler üzerine inşa edilmiştir.

Bir dinamik sistem mevcut bilgiyi belirlemek için önceki zaman periyodundan ya da sabit bir zaman aralığından gelen bilgileri bir kuralla birlikte ele alır, daha sonra bu bilgiyi ilerleyen zamanlarda gerçekleşmesi olası durumları belirlemek için kullanır. Bu süreçlere fonksiyon iterasyonu adı verilir ve böylece bir türün popülasyonunun bütün süreçleri ortaya çıkarılabilir. Fonksiyon iterasyonu, bir sonraki girdi olarak bir

önceki uygulamanın çıktısını araç olarak değerlendirip tekrarlayan işlem sürecidir. Bu durumda her bir yıla ait çıktının bir sonraki yılın girdisini oluşturduğu bir geri-bildirim döngüsü oluşur. Geri-bildirim kontrol dışına çıkabilir; örneğin hoparlörden çıkan sesin mikrofondan geri bildirilerek hızla yükselmesi ve kulakları sağır eden bir gürültüye dönüşmesi düşünülebilir. Diğer taraftan, geri-bildirimle kararlı duruma da ulaşabilir, evin sıcaklığının termostatla düzenlenmesi ve belirli bir derecenin üzerine çıkıldığında soğumaya, belli bir derecenin altına inilmesi durumunda ısınmaya geçilmesi örnek olarak verilebilir [10].

Fark denklemleri, genel olarak belirli olayların zaman içerisindeki gelişimini tanımlamaktadır. Nesilleri örtüşmeyen dönemsel (mevsimsel) çoğalma ile büyüyen basit bir popülasyon

$$x(n+1) = f(x(n)) \tag{3.4}$$

şeklinde birinci mertebeden fark denklemi ile modellenmektedir. $x(n)$, n neslindeki popülasyon büyüklüğünü temsil eder. (3.4) denklemi, f kuralı altında $(n+1)$. nesildeki popülasyon büyüklüğünün n. nesildeki popülasyon büyüklüğü ile ilişkisini vermektedir. (3.4) denkleminin çözümlerinin davranışını araştırmak çalışmamızın temel problemlerinden biridir.

Kabul edelim ki; $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in \mathbb{R}$ başlangıç değeri

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \ldots = x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \ldots$$

şeklinde bir bileşke fonksiyonlar dizisini üretmektedir. $f(x_0)$, x_0'ın f altındaki birinci iterasyonu; $f^2(x_0)$, x_0'ın f altındaki ikinci iterasyonu; genel olarak da $f^n(x_0)$, x_0'ın f altındaki n. iterasyonu olarak adlandırılır. $x_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f^2(x_0), \ldots, x_n = f^n(x_0), \ldots$$

noktalar dizisine x_0'ın yörüngesi denir. $x_n := f^n(x_0)$ olarak alınırsa

$$x_{n+1} = f^{n+1}(x_0) = f[f^n(x_0)] = f(x_n)$$

şeklinde bir-boyutlu diskrit dinamik sistem elde edilir [55, 121].

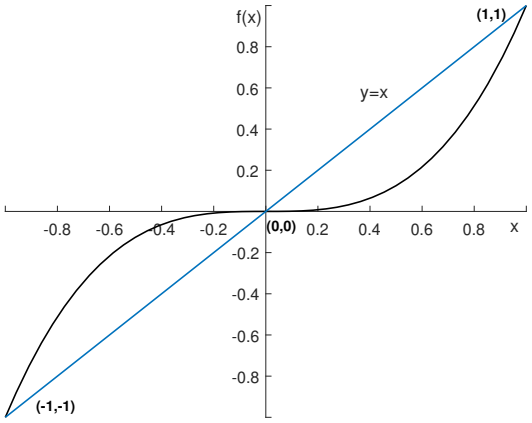
Dinamik sistemler teorisindeki ana hedeflerden biri, belirli bir dönüşümün ya da dönüşüm sınıfının yörüngelerinin davranışının incelenmesidir. Bir dinamik sistemin bir çok farklı yörünge çeşidi vardır. Bunlardan en önemlisi sabit noktadır.

Tanım 3.1 (**Sabit Nokta**). X boştan farklı bir küme ve $f : X \to X$'e bir dönüşüm olsun.

$$f(x_0) = x_0$$

sağlanıyor ise $x_0 \in X$ noktasına f dönüşümünün bir sabit noktası denir. f'nin tüm sabit noktalarının kümesi F_f veya $Fix(f)$ ile gösterilir [63].

Bir sabit noktanın yörüngesi $x_0, x_0, x_0, \ldots$ şeklinde sabit bir dizidir. Grafiksel olarak, bir fonksiyonun sabit noktası $y = f(x)$ eğrisinin $y = x$ köşegen doğrusu ile kesiştiği noktadır. Örneğin; $f(x) = x^3$ kübik dönüşümünün sabit noktaları $x^3 = x$ veya $x^3 - x = 0$ denklemi çözülerek elde edilir. Kübik dönüşümün $\{-1, 0, 1\}$ şeklinde üç sabit noktası vardır (bkz. Şekil 3.2).



Şekil 3.2 $f(x) = x^3$ kübik fonksiyonunun sabit noktaları

Dinamik bir sistemde gözlemlenen denge hali kararlı (çekici) sabit noktaya karşılık gelirken sistemdeki hatalar ve bozulmalarla yörüngenin sabit noktadan uzaklaşması sistemin gözlemlenemez olmasına yol açar, bu da kararsız (itici) sabit noktadır [120].

Örnek 3.1. *$f(x) = x^2$ fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon $x_1 = 0$ ve $x_2 = 1$ olacak şekilde iki sabit noktaya sahiptir. $|x_0| < 1$ olmak üzere keyfi bir x_0 değeri seçilirse x_0'ın yörüngesi hızla sıfıra yaklaşmaktadır. Örneğin; $x_0 = 0.1$ noktasının yörüngesi*

$$0.1, 0.01, 0.0001, 0.00000001, \ldots$$

şeklindedir. $0 \leq x_0 < 1$ aralığındaki herhangi bir x_0 noktası 1'e ne kadar yakın olursa olsun, 1'den uzak ve sıfıra yakın bir yörünge izler. $x_0 = 0.9$ noktasının yörüngesi

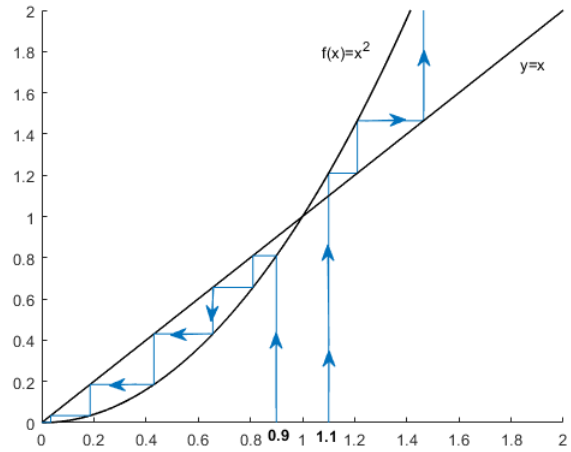
$$0.9, 0.81, 0.6561, 0.430467\ldots, 0.185302\ldots, 0.0343336\ldots, 0.00117\ldots$$

şeklindedir. Yani, $0 \leq x_0 < 1$ *iken* $f^n(x_0) \to 0$ $(n \to \infty)$ *olur. Diğer taraftan; eğer* $x_0 > 1$ *ise yörünge tekrar* 1*'den uzaklaşır.* $x_0 = 1.1$ *noktasının yörüngesi*

$$1.1, 1.21, 1.4641, 2.1436\ldots, 4.5950\ldots, 21.114\ldots, 445.79\ldots$$

şeklindedir. Buradan, $x_0 > 1$ *iken* $f^n(x_0) \to \infty$ $(n \to \infty)$ *olduğu görülmektedir [90].*

Kararlı bir sabit nokta, komşuluğundaki noktaların sabit noktaya daha yakın hareket ettirilmesini sağlarken, kararsız bir sabit nokta komşuluğundaki noktaları sabit noktadan uzaklaştırmaktadır. x_0 *noktasının yörüngelerinin sıfır sabit noktasına yaklaştığı,* 1 *sabit noktasından uzaklaştığı Şekil 3.3'de verilen örümcek ağı (cobweb) diyagramı ile açık olarak gösterilmiştir. Dolayısıyla,* $f(x) = x^2$ *fonksiyonu için* $|x_0| < 1$ *olduğunda* $x_1 = 0$ *kararlı,* $x_2 = 1$ *kararsız sabit noktalardır.*



Şekil 3.3 $f(x) = x^2$ için $x_1 = 0$ çekici sabit nokta iken $x_2 = 1$ itici sabit nokta olduğunu gösteren cobweb diyagramı

Bir sabit noktanın kararlı (çekici) veya kararsız (itici) olup olmadığını f fonksiyonun türevinin büyüklüğü belirlemektedir. f dönüşümünün x_0 sabit noktasındaki türevi, x_0 ile komşuluğundaki bir nokta ile arasındaki uzaklığın f ile nasıl büyültüldüğünü ya da küçültüldüğünü gösteren bir ölçüdür.

Tanım 3.2. $f : X \to X$'e tanımlı bir dönüşüm ve $x_0 \in X$, f dönüşümünün sabit noktası olsun. $f'(x_0)$, $f(x)$'in $x = x_0$ noktasındaki birinci türevini göstersin.

i) Eğer $|f'(x_0)| < 1$ ise x_0 sabit noktasına çekici (kararlı) sabit nokta denir ve $x_0 \in X$ noktasının bir yörüngesi çekici sabit noktaya sahip ise bu yörünge kararlı yörünge olarak adlandırılır.

ii) Eğer $|f'(x_0)| > 1$ ise x_0 sabit noktasına itici (kararsız) sabit nokta denir ve $x_0 \in X$ noktasının bir yörüngesi itici sabit noktaya sahipse bu yörünge kararsız yörünge olarak adlandırılır.

iii) Eğer $|f'(x_0)| = 1$ ise x_0 sabit noktasına nötr sabit nokta denir.

Sabit noktaların çekici veya itici olup olmadıklarının türev ile belirlenmesi Ortalama Değer Teoremi [122] ile garanti altına alınır. Dinamik sistemler için Ortalama Değer Teoremi'nin en önemli iki sonucu aşağıda verilmiştir:

Teorem 3.1 (**Çekici Sabit Nokta Teoremi**). *x_0, f dönüşümü için çekici bir sabit nokta olsun. Bu takdirde, x_0 iç noktasını içeren bir I aralığı vardır ve aşağıdaki koşulu sağlar:*

Her $n \in \mathbb{N}$ için $x \in I$ ise $f^n(x) \in I$ ve $n \to \infty$ iken $f^n(x) \to x_0$ dır [90].

Teorem 3.2 (**İtici Sabit Nokta Teoremi**). *x_0, f dönüşümü için itici bir sabit nokta olsun. Bu takdirde, x_0 iç noktasını içeren bir I aralığı vardır ve aşağıdaki koşulu sağlar:*

$x \in I$ ve $x \neq x_0$ ise $f^n(x) \notin I$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ tamsayısı vardır [90].

Yörüngelerin diğer önemli çeşidi periyodik yörüngelerdir.

Tanım 3.3 (**Periyodik Nokta**). Eğer bazı $k > 0$ değerleri için $f^k(x_0) = x_0$ ise x_0 noktasına f dönüşümünün k-periyodlu periyodik noktası denir. En küçük pozitif k sayısı da x_0'ın asal periyodudur. Eğer x_0, k-asal periyodlu periyodik nokta ise x_0'ın yörüngesi

$$x_0, f(x_0), \ldots, f^{k-1}(x_0), x_0, f(x_0), \ldots, f^{k-1}(x_0), \ldots$$

şeklinde tekrar eden bir sayı dizisidir [90].

k-periyodlu x_0 periyodik noktası f^k'nın bir sabit noktasına karşılık gelmektedir. Örneğin; $f(x) = -x^3$ fonksiyonunun 2-periyodlu periyodik noktaları

$$f^2(x_0) = f(f(x_0)) = x_0$$

denkleminin çözümünden elde edilir. Dolayısıyla, $\{-1, 1, 0\}$ noktaları 2-periyodlu periyodik noktalar iken $\{-1, 1\}$ noktaları 2-periyodlu asal periyodik noktalardır; sadece 0, f'nin bir sabit noktasıdır.

Matematiksel analizde iyi bilinen türev için zincir kuralı; f ve g türevlenebilir fonksiyonlarının bileşkesine $(k-1)$ kez uygulanırsa aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.3 (**Yörüngeler için Zincir Kuralı**). $x_i = f^i(x_0)$ *olmak üzere* $\{x_0, x_1, ..., x_{k-1}\}$, f*'nin k-periyodlu yörüngesi olsun. Bu takdirde*

$$\left(f^k\right)'(x_0) = f'(x_{k-1}) \cdot \ldots \cdot f'(x_1) \cdot f'(x_0)$$

sağlanır [90].

Teorem 3.3'de başlangıç noktası hangi nokta seçilirse seçilsin, yörüngedeki noktalar tamamen aynı olduğundan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1. $\{x_0, x_1, ..., x_{k-1}\}$, f*'nin k-periyodlu yörüngesi olsun. Bu takdirde*

$$\left(f^k\right)'(x_0) = \left(f^k\right)'(x_1) = \cdots = \left(f^k\right)'\left(x_{p-1}\right)$$

sağlanır [90].

Ayrıca periyodik noktalar da sabit noktalar gibi çekici, itici veya nötr olarak sınıflandırılmaktadır. Bir k-periyodlu x_0 periyodik noktasının çekici veya itici olup olmadığı x_0'daki f^k türevinin hesaplanması ile belirlenmektedir. Buradaki f^k, f dönüşümünün k. iterasyonuna karşılık gelir. Periyodik noktaların yörüngesinin kararlı olup olmadığı aşağıdaki kriter ile verilmiştir.

Tanım 3.4. x_0 noktası, f dönüşümünün k-asal periyodlu periyodik noktası olsun. Eğer $\left|\left(f^k\right)'(x_0)\right| < 1$ ise x_0 noktasına f'nin çekici periyodik noktası, $\left|\left(f^k\right)'(x_0)\right| > 1$ ise x_0 noktasına f'nin itici periyodik noktası denir [123].

Örnek 3.2. $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1$ *fonksiyonu için* $x = 0$ *noktasının 3-periyodlu kararsız periyodik nokta olduğunu gösterelim.* $f(0) = 1$, $f(1) = 2$ *ve* $f(2) = 0$ *olduğundan* f *fonksiyonu* $x = 0$*'da* $0, 1, 2, 0, 1, 2, ...$ *şeklinde bir yörüngeye sahiptir. Yörüngeler için zincir kuralını uygulayalım. Öncelikle* f *fonksiyonunun türevi alınırsa* $f'(x) = -3x + \frac{5}{2}$ *denklemi elde edilir. Buradan,* $f'(0) = \frac{5}{2}$, $f'(1) = -\frac{1}{2}$ *ve* $f'(2) = -\frac{7}{2}$ *bulunur. Teorem 3.3'den*

$$\left(f^3\right)'(0) = f'(2) \cdot f'(1) \cdot f'(0) = \frac{35}{8} > 1$$

elde edilir. Böylece periyodik bir yörüngenin kararsız veya itici olduğu belirlenmiş olur [90].

Yörüngelerde sabit nokta ve periyodik nokta haricinde de noktalar bulunmaktadır. Bir x_0 noktasının kendisi sabit veya periyodik nokta olmadığı halde yörüngesi üzerinde bazı noktalar sabit veya periyodik nokta gibi davranıyor ise x_0 noktası nihai sabit nokta veya nihai periyodik nokta olarak adlandırılmaktadır.

Tanım 3.5. x_0 noktası f fonksiyonunun nihai sabit noktası ise her $n \geq m$ için $f^{n+1}(x_0) = f^n(x_0)$ olacak şekilde bir $m > 0$ sayısı vardır. x_0 noktası f fonksiyonunun k-periyodlu nihai periyodik noktası ise her $n \geq m$ için $f^{n+k}(x_0) = f^n(x_0)$ olacak şekilde bir $m > 0$ sayısı mevcuttur [123].

Örnek 3.3. *$f(x) = x^2$ fonksiyonunun sabit noktaları $\{0, 1\}$ olmasına rağmen -1 noktasının yörüngesi*

$$-1, 1, 1, 1, 1, \ldots$$

şeklinde sabit nokta gibi davrandığından -1 nihai sabit noktadır. Benzer şekilde; $f(x) = x^2 - 1$ fonksiyonu için 2-periyodlu bir yörünge üzerinde 1 ve $\sqrt{2}$ noktalarının yörüngesi

$$\sqrt{2}, 1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, \ldots$$

şeklinde periyodik nokta gibi davrandıkları için, 1 ve $\sqrt{2}$ noktaları nihai periyodik noktalardır [90].

3.3 Çatallanma Teorisi ve Kaosa Geçiş

Çatallanma, bir sistem içerisinde belirli bir dönüşümün dönüm noktasını oluşturan dış parametredeki değişiklikleri temsil etmektedir. Bu parametre bir sistemin niteliksel davranışını değiştirebildiği için kontrol parametresi olarak adlandırılır. Deneysel gözlemler, kontrol parametresinin artırılmasının sistemleri basitten karmaşığa değiştiren periyod katlamalarına (period-doubling) ve sonrasında kaotik yapıya neden olduğunu ortaya koymuştur. Sonunda sistemler kaotik hale gelmektedir. Çatallanma dizilerinin matematiksel açıklaması, basit mekanizmaların kompleks davranışlar üretmek için yeterli olacağını vurgulamaktadır.

Çatallanmalar kontrol parametrelerine bağlı olarak sistemin kararsızlıklarının ve dönüşümlerin uğradığı değişikliklerin modellerini sağladığı için bilimsel açıdan önemli bir yere sahiptir. Örneğin; bir kirişin üzerine küçük bir ağırlık konulduğunda, kiriş yükü destekleyebilir ve dikey konumda kalabilir. Ancak yük çok ağır ise dikey konum kararsız hale gelir ve kiriş bükülebilir. Buradaki ağırlık kontrol parametresinin, kirişin dikey konumdan sapması ise x dinamik değişkeninin rolünü oynamaktadır [53]. Bir sistemin kontrol parametreleri değiştikçe sabit nokta veya periyodik noktaların yapısı da değişir ve böylelikle o sabit noktanın veya periyodik noktanın komşuluğundaki yörüngelerin dinamik davranışları da önemli ölçüde değişir. Sistemin parametreleri değiştikçe sabit noktaların ve diğer çekici noktaların karakterinin nasıl değiştiğinin incelenmesine çatallanma teorisi denir [6]. Sistemin dinamiklerinde oluşan ani niteliksel değişikliklere çatallanma ve bunların meydana geldiği parametre değerlerine de çatallanma noktaları adı verilir [53]. Çatallanma aynı zamanda değişikliğin

meydana geldiği parametre değerinin üstünde ve altında olacak şekilde sistemin davranışının iki bölgeye bölünmesi anlamına gelmektedir.

Bu bölümde, tek parametreye bağlı reel-değerli fonksiyonlarda sık görülen çatallanmalar incelenecektir. μ bir parametre ve F_μ'ler x'in bir fonksiyonu olmak üzere bazı tek parametreli fonksiyon aileleri aşağıda verilmiştir.

1. $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$
2. $E_\mu(x) = \mu e^x$
3. $S_\mu(x) = \mu \sin(x)$
4. $Q_c(x) = x^2 + c$

Tek parametreye bağlı bir fonksiyon ailesinde, μ parametresi belirli bir değerden geçerken fonksiyonun dinamik yapısında oluşan değişiklikler çatallanmaları meydana getirmektedir. En önemli çatallanma çeşitleri; eyer-düğüm veya teğet çatallanması ile periyodu ikiye katlayan çatallanmalardır.

Tanım 3.6 (**Eyer-Düğüm veya Teğet Çatallanması**)**.** F_μ tek parametreli bir fonksiyon ailesi olsun.

1. $\mu_0 - \varepsilon < \mu < \mu_0$ için F_μ fonksiyonunun I aralığında sabit noktası yoktur.
2. $\mu = \mu_0$ için F_μ fonksiyonunun I aralığında nötr bir sabit noktası vardır.
3. $\mu_0 < \mu < \mu_0 + \varepsilon$ için F_μ fonksiyonunun I aralığında biri çekici diğeri itici olacak şekilde iki sabit noktası vardır.

Yukarıdaki koşulları sağlayan bir I açık aralığı ve bir $\varepsilon > 0$ sayısı var ise F_μ, μ_0 parametre değerinde bir eyer-düğüm veya teğet çatallanmasına uğramaktadır [90].

Eyer-düğüm terimi; genel olarak kararsız yörüngenin bir eyer olduğu ve kararlı yörüngenin bir düğüm veya çekici olduğu çatallanmalardır. Bir-boyutlu uzaylarda bu çatallanma, çatallanma yörüngesindeki dönüşümün türevinin 1 olmasını ve $y = x$ doğrusuna teğet olmasını gerektirdiğinden teğet çatallanma olarak da adlandırılmaktadır [120].

Tanım 3.7 (**Periyodu İkiye Katlayan Çatallanma**). F_μ tek parametreli bir fonksiyon ailesi olsun.

1. $[\mu_0-\varepsilon, \mu_0+\varepsilon]$ aralığındaki her bir μ değeri için I aralığında F_μ fonksiyonunun tek bir p_μ sabit noktası vardır.
2. $\mu_0-\varepsilon < \mu \leq \mu_0$ için F_μ fonksiyonu I aralığında 2-periyodlu bir döngüye sahip değildir ve p_μ çekicidir (iticidir).
3. $\mu_0 < \mu < \mu_0+\varepsilon$ için I aralığında $F_\mu\left(q_\mu^1\right) = q_\mu^2$ olacak şekilde tek bir 2-periyodlu q_μ^1, q_μ^2 döngüsü vardır. Bu 2-periyodlu döngü çekicidir (iticidir). Aynı zamanda, p_μ sabit noktası iticidir (çekicidir).
4. $\mu \to \mu_0$ iken $q_\mu^i \to p_{\mu_0}$ olur.

Yukarıdaki koşulları sağlayan bir I açık aralığı ve bir $\varepsilon > 0$ sayısı var ise F_μ, $\mu = \mu_0$ parametre değerinde bir periyodu ikiye katlayan çatallanmaya uğramaktadır [90].

3.3.1 Kaotik Yapılar

Lineer olmayan dinamik sistemlerde çatallanmaların oluşması kaos adı verilen karmaşık davranışın ortaya çıkmasına neden olmaktadır. Kaotik olma ya da kaos kelimesi, bir sistemin davranışının asla kendini tekrarlamadığı (periyodik olmadığı) ve görünüşte tahmin edilemez olduğu davranışı tanımlamak için kullanılmaktadır. Lineer olmayan dinamik sistemlerdeki karmaşık yapı, ilk olarak Rus matematikçi Sarkovskii [9] tarafından farkedilmiştir. Sarkovskii, 1964 yılında yayınladığı makalesinde bir sistem periyodik bir döngü içeriyorsa potansiyel olarak başka döngüleri de içerdiğini ispatlamıştır. Bu çalışmaya göre; örneğin parametrenin belirli bir değeri için periyod-16 döngüsü varsa periyod-8, periyod-4, periyod-2, periyod-1 döngüleri de mevcuttur. Sarkovskii, sürekli reel dönüşümler için hangi periyodların diğer periyodların varlığına işaret ettiğini Sarkovskii sıralaması olarak bilinen aşağıdaki sıralama ile hesaplamıştır [9]:

$$3 \lhd 5 \lhd 7 \lhd \cdots \lhd 2.3 \lhd 2.5 \lhd \cdots \lhd 2^2.3 \lhd 2^2.5 \lhd \cdots \lhd 2^3.3 \lhd 2^3.5 \lhd \cdots$$
$$\cdots \lhd 2^3 \lhd 2^2 \lhd 2 \lhd 1.$$

Teorem 3.4 (**Sarkovskii Teoremi**). *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli bir dönüşüm ve f, k-asal periyodlu periyodik bir noktaya sahip olsun. Sarkovskii sıralamasında $k \lhd \ell$ ise f'nin ℓ asal periyodlu periyodik sabit noktası vardır. Bu teoremin tersi de doğrudur [116].*

Sarkovskii sıralamasında periyod-3 en büyük periyottur ve diğer tüm periyodların olduğunu belirtir. Sarkovskii Teoremi, parametre değiştikçe sonsuz sayıda periyodik noktanın nasıl ortaya çıktığı sorusuna kısmi bir cevap sağlamaktadır. Yani, F_μ farklı periyodlara sahip sonsuz sayıda periyodik noktaya sahip olmadan önce 2^j formundaki tüm periyodların periyodik noktalarına sahip olması gerekir. Çatallanma teorisi bu periyodik noktaların ortaya çıkabileceği teğet çatallanmaları ve periyod katlayan çatallanmalar şeklinde iki tipik yol sunmaktadır.

1975 yılında James Yorke, Sarkovskii'nin çalışmasından habersiz olarak "Periyod-3, Kaos Demektir" (Period Three Implies Chaos) [124] başlıklı makalesi ile ilk kez literatürde kaos kelimesini kullanan matematikçidir. Yayınladığı makale Sarkovskii Teoremi'nin doğrudan bir sonucudur.

Teorem 3.5 (**Periyod-3 Teoremi**). *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli bir dönüşüm ve f, 3-asal periyodlu periyodik bir noktaya sahip olsun. Bu takdirde, f diğer tüm asal periyodlu periyodik noktalara da sahiptir [90].*

1970'lerin ortalarında fizikçi Mitchell Feigenbaum [12], kaosun içinde gizli bir düzenlilik olduğunu keşfederek kaosun reel dünyada pek çok olayda var olduğuna dair literatürdeki ilk teorik kanıtı sunmuştur [125]. Feigenbaum, bazı dönüşümlerin çatallanma diyagramlarını incelemiş ve periyodik davranıştan kaotik davranışa geçerken farklı fonksiyonların iterasyon dönüşümleri olmalarına rağmen çatallanma diyagramlarında aynı yakınsamaya yol açtığını gözlemlemiştir [6]. İki kaotik dönüşüm olarak $x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$ lojistik dönüşümü ve $x_{n+1} = k\sin(\pi x_n)$ trigonometrik sinüs fonksiyonunu aldığında, çatallanma diyagramlarından bu iki dizinin yakınsama oranının her iki dönüşüm için de aynı olduğunu fark etmiştir. Feigenbaum incelediği tüm sistemlerde periyodun katlanması, çatallanma ve aynı geometrik yakınsamayla karşılaşmıştır [117].

Birçok dinamik sistem periyodu ikiye katlayan çatallanmalar ile kaosa geçmektedir. Periyod katlanmaları, özellikle de bir dönüşümün kendisine bağlı olmayan belirli evrensel sayılarla karakterize edildiği için önemlidir. Feigenbaum, çatallanmalarda r parametresinin ardışık değerleri arasındaki boşlukların oranının evrensel bir sabite yaklaştığını keşfetmiştir. Feigenbaum sabiti (δ) olarak adlandırılan bu evrensel sabit şu şekilde hesaplanmaktadır: İlk çatallanma r_1 parametre değerinde, ikincisi r_2 parametre değerinde gerçekleşiyorken genel olarak periyod-2^k'nın doğduğu parametre değeri r_k ise Feigenbaum sabiti

$$\delta = \lim_{k\to\infty} \frac{r_k - r_{k-1}}{r_{k+1} - r_k} = 4.669\ 201\ 609\ 102\ 990\ 9\ldots.$$

olarak elde edilmektedir [52].

Li ve Yorke'nin çalışması [124], dinamik sistemlerdeki kaotik olmayan periyodik noktaları da içerdiğinden literatürde kısıtlı kaos olarak adlandırılmaktadır. Tam kaos olarak bilinen kaos, meteorolog Edward Lorenz'in [4] 1963 yılında kaotik sistemlerin tahmin edilebilirliği ile ilgili çalışmasına dayanmaktadır. Lorenz, hava tahminlerini kolaylaştırmak için geliştirdiği modelin başlangıç koşullarına bağımlı olduğunu farkeder ve başlangıçta yaptığı çok küçük değişikliklerin hava tahminlerinde çok farklı sonuçlar verdiğini görür. Başlangıç koşullarında yapılan en küçük bir değişiklik yörüngelerin hızla tamamen farklı bir yol izlemesine sebep olur. Herhangi bir gerçek deneyde veya nümerik hesaplamada başlangıç koşullarının belirlenmesinde her zaman bir miktar belirsizlik olduğundan reel sistemlerin gelecekteki davranışı kaotik bir sistem için tahmin edilemezdir. Diğer bir ifadeyle, kaotik bir sistemin geleceği, sistem deterministik olmasına rağmen belirsizdir [6].

Tanım 3.8 (**Başlangıç Koşullarına Duyarlılık**)**.** Herhangi bir $x \in I$ ve x'in herhangi bir U komşuluğu için bir $\tau > 0$ sayısı varsa $n \geq 0$ için

$$|f^n(x) - f^n(y)| > \tau$$

olacak şekilde bir $y \in U$ vardır; bu takdirde $f : I \to I$ dönüşümü I üzerinde başlangıç koşullarına hassas bağımlıdır denir [116].

Kaosun matematiksel pek çok tanımı vardır. Biz çalışmamızda, 1986 yılında Robert L. Devaney [116] tarafından verilen kaos tanımını kullanacağız.

Tanım 3.9 (**Kaotik Davranış**)**.** Herhangi bir Ω kümesi verilsin. $f : \Omega \to \Omega$ dinamik sistemi aşağıdaki üç koşulu sağlıyor ise kaotiktir:

1. f'nin periyodik noktaları Ω'da yoğundur.
2. f topolojik geçişlidir.
3. f başlangıç koşullarına hassas bağımlıdır.

Kaotik bir dönüşümün üç bileşeni vardır: tahmin edilemezlik, ayrıştırılamazlık ve düzensizlik. Kaotik bir sistem, başlangıç koşullarına hassas bağımlı olmasından dolayı tahmin edilemezdir. Topolojik geçişli olduğundan bölünemez ve ayrıştırılamazdır. Ayrıca bu rastgele davranışın ortasında yine de düzenlilik vardır, yani yoğun bir periyodik noktalar kümesine sahiptir. Ayrıca şu husus da belirtilmelidir ki; bir dinamik sistem periyodik noktaları yoğun bir kümeye sahip ve geçişli ise aynı zamanda başlangıç noktalarına da hassas bağımlıdır [126].

Kaos, lineer olmayan sistemler tarafından sergilenen davranış türlerinden biridir. Genel olarak, Lineer olmayan dinamik sistemlerin çalışma alanı doğrusal olmayan bir sistemin zaman içerisindeki dinamik davranışının incelenmesidir. Lineer olmayan bir sistem, sistemin özelliklerini tanımlayan dinamik değişkenlerin (örneğin, konum, hız, ivme, basınç, vb.) denklemlerde doğrusal olmayan bir biçimde göründüğü sistemlerdir. Bir parametredeki küçük bir değişiklik, sistemin hem niteliksel hem de niceliksel davranışında ani ve büyük değişikliklere yol açabilir. Parametrenin bir değeri için davranış periyodik olabilir, ancak çok az farklı olan başka bir değeri için davranış kaotik olabilir.

3.4 Kaos ve Lyapunov Üstelleri

Bir sistemin kaotik olarak adlandırılabilmesi için komşuluğundaki yörüngelerin üstel olarak hızla birbirinden uzaklaşması, yani başlangıç koşullarına hassas bağımlılık göstermesi gerekmektedir. Kaotik yörünge, bir çekicinin komşuluğunda bir yörüngenin gösterdiği kararsız davranışı sonsuza kadar sürdüren sabit ya da periyodik olmayan yörüngedir. Bu sürekli düzensizlik Lyapunov sayıları ve Lyapunov üstelleri ile ölçülmektedir. Lyapunov sayısı, yörünge boyunca komşuluktaki noktaların her iterasyon adımında ortalama ıraksama oranıdır. Lyapunov üsteli ise Lyapunov sayısının doğal logaritması olarak tanımlanmaktadır [120].

Rus matematikçi Lyapunov'dan adını alan Lyapunov üsteli kavramı [127], bir dönüşümün kaotik davranışının karakteristiği olan başlangıç koşullarına hassas bağımlılığın bir ölçüsünü elde etmek için kullanılır. Kabul edelim ki; $0 < \varepsilon < 1$ için x_0 ve $x_0+\varepsilon$ olacak şekilde keyfi iki başlangıç değeri olsun ve Lyapunov üsteli (λ) ortalama ıraksama oranını göstersin. n-iterasyon sonraki ıraksama

$$\Delta_n \approx \varepsilon e^{\lambda n}$$

olarak karakterize edilebilir. Eğer λ negatif ise yörüngeler yakınsak ve sistem kaotik değildir; λ pozitif ise yörüngeler ıraksak ve kaotiktir [52].

$x_{n+1} = f(x_n)$ şeklinde tanımlı bir-boyutlu dönüşüm için iki başlangıç yörüngesi arasındaki fark $\Delta_n \equiv f^n(x_0+\varepsilon) - f^n(x_0)$ olarak alınsın. Eğer davranış kaotik ise bu mesafenin

$$\Delta_n = f^n(x_0+\varepsilon) - f^n(x_0) \approx \varepsilon e^{\lambda n}$$

ya da

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^n(x_0+\varepsilon) - f^n(x_0)}{\varepsilon} \right|$$

olacak şekilde üstel olarak büyümesi beklenir. Denklemin sağ tarafının $\varepsilon \to 0$ için limiti alındığında, f^n nin x_0 noktasındaki türev tanımı aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left| (f^n)'(x_0) \right|.$$

$x_0, x_1, x_2, \ldots$ ardışık yörünge noktaları için Teorem 3.3 uygulandığında

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left(\left| f'(x_0) \right| . \left| f'(x_1) \right| \ldots \left| f'(x_{n-1}) \right| \right)$$

bulunur. Aynı zamanda

$$\lambda = \frac{1}{n} \left(\ln \left| f'(x_0) \right| + \ln \left| f'(x_1) \right| + \ldots + \ln \left| f'(x_{n-1}) \right| \right) \tag{3.5}$$

yazılabilir. Eğer (3.5) ifadesi $n \to \infty$ için bir limite sahipse, x_0 başlangıç yörüngesi için Lyapunov üsteli

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| f'(x_i) \right| \right\}$$

şeklinde tanımlanmaktadır [6, 52]. Kararlı sabit noktalar ve döngüler için λ sayısı negatiftir, kaotik çekiciler için ise λ sayısı pozitiftir [53].

3.5 Lojistik Popülasyon Büyümesinin Yörünge Dinamikleri

Bu bölümde, Bölüm 3.1.1'de bahsedilen nüfus popülasyonları için büyümenin lojistik modelinin dinamik yörüngelerinde meydana gelen çatallanmalar ve kaotik davranışa geçiş ayrıntılı olarak incelenecektir.

1976 yılında biyolog Robert L. May [11], *Nature* dergisinde lineer olmayan determinist sistemlerin temel özelliklerini inceleyen bir makale yayınlamış ve tüm dikkatleri bu konuya çekmiştir. Bir popülasyon nüfusundaki dalgalanmaları (iniş-çıkışları) hesaplamak için kullandığı denklemlerin göründüklerinden çok daha karmaşık olduğunu farketmiştir. Denklemi etkileyen parametrelere farklı değerler verdiğinde sistemde beklenmedik değişikliklerin meydana geldiğini görmüştür [10]. Örneğin; lojistik popülasyon denkleminin parametre değerleri büyüdükçe sistemin çatallandığını ve nüfusun iki farklı değer arasında gidip geldiğini gözlemlemiştir.

Mayıs sinekleri popülasyonunu temsil eden (3.3) ile verilen lojistik popülasyon modelini yeniden ele alalım.

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n) \equiv f_r(x)$$

olarak tanımlanan bir-boyutlu ve lineer olmayan lojistik büyüme modelinde başlangıçta çevre koşullarıyla desteklenen maksimum popülasyonun olduğu varsayılmaktadır ve x_n n. nesilde yaşayan maksimum popülasyona karşılık gelmektedir. Eğer popülasyon çevre koşullarının öngördüğü değeri aşarsa yani aşırı nüfus artışı gerçekleşirse yiyecek kıtlığı ve buna bağlı olarak türler yok olmaya başlar. Bu nedenle nüfusu dengede tutmak için $0 \leq x_n \leq 1$ olarak alınır. r çevre şartlarına bağlı bir sabit veya parametreye karşılık gelirken aynı zamanda sistemi en karmaşık dinamik sistem haline getiren faktördür. Bu sebepten, r parametresi popülasyonu sınırlayan değerdir ve $0 < r \leq 4$ aralığında tutulmaktadır. r parametresinin değişen değerleri kaotik davranışın başlamasına yol açar. Bu model altında popülasyonda meydana gelen dinamikler $f(x) = rx(1-x)$ şeklindeki ikinci dereceden lineer olmayan fonksiyonun iterasyonlarıyla elde edilmektedir. x_0 başlangıç değeri için

$$\begin{aligned} x_1 &= f_r(x_0) \\ x_2 &= f_r(x_1) \\ x_3 &= f_r(x_2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

şeklindeki iterasyon dizisi elde edilir. $f_r(x)$, iterasyon dönüşümünün fonksiyonudur. Eğer r parametresi $0 \leq r \leq 4$ aralığında ise $f_r(x)$ dönüşümü bir x_0 değerini $0 \leq x \leq 1$ aralığındaki x_1 değerine dönüştürür.

$$x^* = f_r(x^*)$$

denklemi çözüldüğünde iterasyon dönüşümünün sabit noktaları

$$x^* = 0,\ x^* = 1 - \frac{1}{r}$$

olarak bulunur. Yapılan analizler sonucunda aşağıdaki bulgular elde edilmiştir:

- $0 \leq x \leq 1$ aralığından seçilen başlangıç değerleri için; $r < 1$ ise tüm yörüngeler $x^* = 0$ sabit noktasına yaklaşır, yani $x^* = 0$ noktası yörüngeler için çekici sabit noktadır. $r < 1$ olması mevsim sayısı arttıkça $(n \to \infty)$ popülasyonun bir sonraki nesilde kendisini yeniden üretemeyeceği yani Mayıs sinekleri neslinin tükeneceği anlamına gelir. $r > 1$ ise tüm yörüngeler $x^* = 1 - \frac{1}{r}$ sabit noktasına

yaklaşır. Yörüngeler için bu kez $x^* = 1 - \frac{1}{r}$ sabit noktası çekici sabit nokta iken $x^* = 0$ sait noktası ise itici sabit nokta olur. Yani, başlangıç popülasyonunun değeri sabit bir popülasyon değerine ulaşarak dengede kalmaktadır.

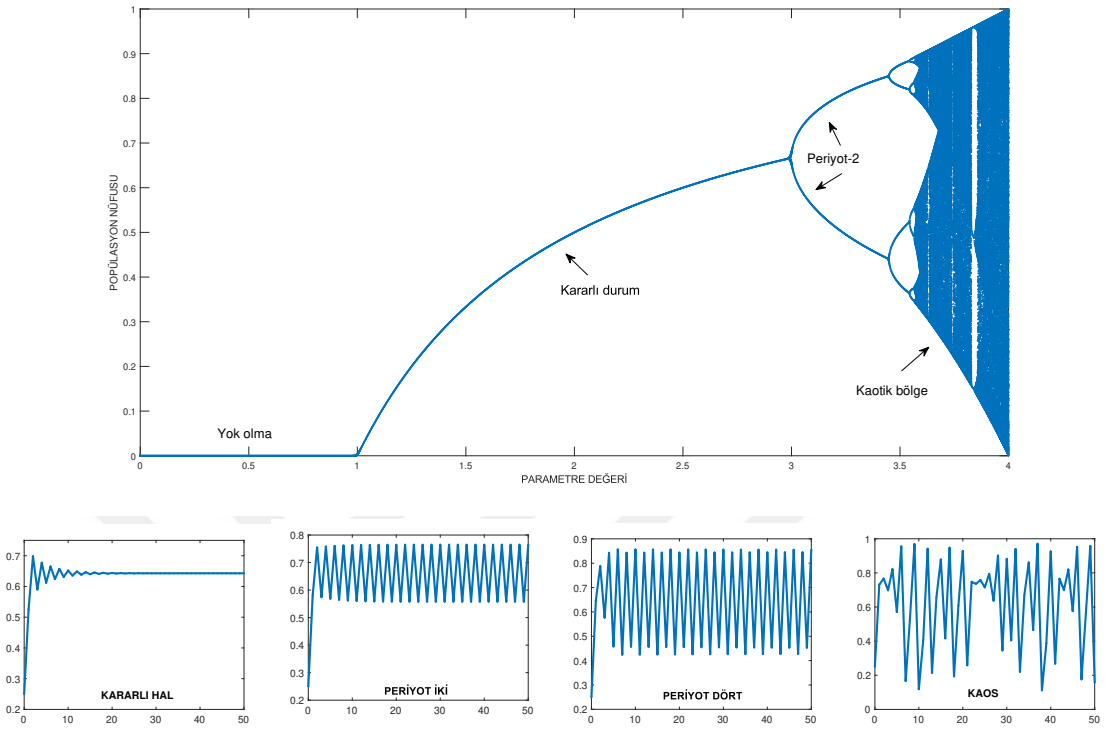
- Büyüme parametresi $r = 3$ kritik değerine ulaştığında ise yörüngeler aniden değişerek ilginç davranışlar göstermektedir. Popülasyon büyüklüğü birbirini takip eden nesillerde iki farklı sabit değer arasında gidip gelmeye başlar. Örneğin; başlangıç değeri $x_0 = 0.25$ ve parametre değeri $r = 3.1$ alındığında yörüngenin tek bir çekiciye yerleşmediği ve $x = 0.558...$, $x = 0.764...$ değerleri arasında gidip geldiği görülmektedir [6]. Yani, bir çekici ikiye ayrılmış (çatallanmış) ve periyod-1'den ikiye katlanmıştır. Mayıs sinekleri popülasyonu düşünüldüğünde popülasyon nüfusunun artık yıllık döngülerden iki yıllık döngülere geçtiği söylenebilir. Yani, nüfus oranı bir yıl yüksek, sonraki yıl düşük, sonra tekrar yüksek, sonra tekrar düşük ve bu böyle devam eder. Popülasyon oranı her iki yılda bir aynı değere döndüğü için periyod-2 davranışına karşılık gelmektedir ve periyod-1'den periyod-2'ye geçişteki bu değişim periyodu ikiye katlayan çatallanma olarak adlandırılır.

- $r = 3.45$ parametre değerinde periyod yeniden ikiye katlanarak yeni bir çatallanmaya uğrar ve sistemde $0.852, 0.433, 0.847, 0.447$ şeklinde dört noktayı içeren bir çekici oluşur, yani sistem periyod-4'e geçer. Bu kez popülasyon nüfusu, iki yıllık döngülerden dört yıllık döngülere geçmiş olur.

- $r = 3.56$ olduğunda her bir çekici ikiye ayrılır ve nüfus sekiz farklı düzey arasında gidip gelmektedir. Bu çatallanmalar $4, 8, 16, 32, ...$ şeklinde giderek hızlanır. $r = 3.569$ sayısına yaklaşıldığında sonsuz sayıda çatallanmanın oluştuğu görülür ve popülasyondaki mevcut çekici sayısı sonsuza ulaşır. Böylece yörüngelerin asla tekrar etmediği ve kararlı periyodların olmadığı kaos bölgesi meydana gelir. Yani, popülasyon nüfusu sonsuz sayıda farklı değer arasında gidip gelmeye başlar.

- $r = 3.569$'dan büyük parametre değerleri için kaosun olduğu bölgenin orta yerinde birden kararlı döngüler oluşmaktadır. Parametre değeri arttıkça, 3 veya 7 gibi tek sayılı periyodların bulunduğu pencereler ortaya çıkar. Daha sonra yeniden periyodu ikiye katlayan çatallanmalar $3, 6, 12, ...$ veya $7, 14, 28, ...$ gibi periyodik döngüler tekrar başlar [10]. Bu pencerelerin en büyüğü olan periyod-3 penceresi $3.8284 \leq r \leq 3.8415$ parametre aralığında meydana gelmektedir. Ayrıca bu aralıktaki r'nin kritik bir değerinde kararlı ve kararsız periyod-3 döngüleri teğet bir çatallanmada birleşir ve yok olur. Bu geçiş periyodik pencerenin başlangıcıdır [53]. Teğet çatallanmada kararlı periyod-3 döngüsü oluştuktan sonra ikiye katlanır ve 3.2^n periyodlu yörüngeleri üretir.

Parametredeki değişikliklerin bir popülasyonun nüfusunu nasıl etkilediğini göstermek için May [11] bulguların tümünü ayrı ayrı grafiklerde göstermek yerine aşağıda verilen çatallanma diyagramı üzerinde göstermiştir (bkz. Şekil 3.4) [10]:



Şekil 3.4 Mayıs sinekleri popülasyonunun çatallanma diyagramı

Feigenbaum [12], May'in çalışmasını ele alarak r parametresinin kaosa giderken periyodu ikiye katlayan çatallanma noktaları arasındaki mesafelerin arasında sabit bir oran olduğunu farketmiştir. Bilgisayar hesaplamalarıyla, parametre değiştikçe periyodun ikiye katlanması aşağıdaki tabloyu ortaya koymuştur [53]:

$$\begin{array}{cc} r_1 = 3 & (\text{ periyod-2}) \\ r_2 = 3.449... & 4 \\ r_3 = 3.54409... & 8 \\ r_4 = 3.5644... & 16 \\ r_5 = 3.568759... & 32 \\ \vdots & \vdots \\ r_\infty = 3.569946... & \infty \end{array}$$

r_n, r_∞ değerine yakınsaktır ve yakınsama geometriktir. Ardışık çatallanma noktaları arasındaki mesafe δ sabit faktörü kadar küçülmektedir:

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = 4.669....$$

4
SABİT NOKTA TEORİ VE DİSKRİT DİNAMİK SİSTEMLERDE KAOS KONTROL

Sabit nokta teori matematiğin birçok branşında etkili bir metot olarak kullanılmaktadır. Özellikle bir çok disiplinde lineer ya da lineer olmayan denklemleri içeren problemleri çözmede kullanışlı bir metot olarak uygulanmaktadır. Bu tip problemlerin matematiksel modelleri bir denklem sınıfı veya denklem sistemleri ile temsil edilmektedir. Elde edilen denklem sistemlerinin çözümleri; varlık, teklik ve süreklilik olmak üzere üç ana koşul altında şekillenir. Literatürde varlık ve tekliği garanti eden en güçlü çalışma alanı Sabit Nokta Teori'dir.

Herhangi bir sistemin tekliği, sisteme uygulanan operatörün çözüm olacak değeri invaryant (değişmez) bırakmasıdır. Bu anlamda genel sabit nokta tanımı; $T : X \to X$ bir dönüşüm olmak üzere, $T(x) = x$ olacak şekilde $x \in X$'lerin invaryant (değişmez) kalmasıdır. $x \in X$ değeri sisteme etki eden T operatörünün invaryant değeri, genel teori içinde ise T'nin sabit noktasıdır. $T(x) = x$ denkleminin bütün çözümleri T'nin sabit noktalarıdır ve F_T ile gösterilir. Sabit nokta teoride çalışmanın temel amacı; T operatörü için $F_T \neq \emptyset$ olmasını sağlayacak X kümesi üzerindeki şartları belirlemektir.

Sabit nokta teorinin kabaca en genel tanımını şu şekilde verebiliriz: A yapısına sahip bir X kümesi ve B şartlarını sağlayan $T : X \to X$ dönüşüm ailesi F olarak alınsın. Bu takdirde her $T \in F$ bir sabit noktaya sahiptir. A yapısı olarak topolojik, metrik, normlu uzaylar, küme değerlilik, kısmi sıralılık veya bunların birleşimiyle meydana gelen yapılar; T dönüşümünün sahip olduğu B şartları ise süreklilik, sınırlılık, diferansiyellenebilme, Lipschitzian olma, nonexpansive veya contraction dönüşüm sınıfları, lineer ya da nonlineer olma gibi özellikler göz önüne alınabilir.

Gerçek hayat problemlerinde sabit nokta değişimin etkilemediği yerlerdir. Örneğin; fizikte herhangi bir maddenin farklı reaksiyonlara maruz kalıp aynı ürünü çıkarması o maddenin sabit noktasıdır. İnternette World Wide Web (www.) ziyaret edildiğinde, kullanılan arama motorları (Google, Yahoo vb.) bir sabit nokta mekanizmasıdır.

Arama motorları A web matrisleri için $A(x) = x$ sistemi ile çalışmaktadır. Arama motorunda aranılan bilgi arama sonucu ile eşleşiyorsa ekranda çıkan şey sabit noktadır [128]. Fincandaki kahvenin kaşığın etrafında döndüğü merkezi nokta, buruşturulan kağıdın altındaki düz kağıtla ortak olan nokta, orijinal harita ile küçültülen haritadaki şehirlerin ortak olan en az bir noktası sabit noktanın varlığına delil olarak düşünülebilir (bkz. Şekil 4.1)[129].



Şekil 4.1 Sabit nokta örnekleri

4.1 Sabit Nokta Teorinin Önemli Teoremleri

19. yüzyılda n-cisim probleminin ortaya atılmasıyla Henri Poincaré, 3-cisim problemini Newton'un 2-cisim problemini çözerken kullandığı metotlarla çözmeye çalışmıştır. 3-cisim problemi Güneş, Ay ve Dünyanın hem kendi eksenleri etrafında hem de birbirleri etrafındaki hareketlerini hesaplama problemidir. Poincaré yaptığı çalışmalar sonucunda bu problemi bilinen yöntemlerle çözmenin imkânsız olduğu sonucuna varmıştır. Aynı zamanda kaosu ilk fark eden kişi Poincaré'dir, ancak tam olarak tanımını ortaya koyamamıştır.

1880 yılında Poincaré, iniş ve çıkışları olmayan pürüzsüz bir küre yüzeyinin düzgün bir vektör alanı olmadığını belirten ispatsız bir teorem sunmuştur. İki boyutlu uzaylar için verilen bu teorem, *Hairly Ball Teoremi* olarak 1926'da Alman matematikçi Heinz Hopf tarafından daha yüksek boyutlar için genellenmiştir. Hairly Ball Teoremi'ne göre; bir hindistan cevizinin küresel yüzeyinde hiçbir kıvrımın olmaması tüylerin taranmasının imkansız olduğunu açıklamaktadır [129].

1912 yılında Hollandalı matematikçi L.E.J. Brouwer [130], Poincaré'ın analizlerinden esinlenerek yeni bir teori ortaya atmıştır. Brouwer, bir fincan kahveye attığı şekeri karıştırırken yüzeyde hareket etmeyen bir nokta olduğunu gözlemlemiş ve farklı şartlar altında bu noktanın yeri değişse bile karışımın içinde her zaman hareket halinde olmayan bir nokta olduğu sonucuna varmıştır. Brouwer Sabit Nokta Teoremi [130] matematiksel analizde iyi bilinen Ara Değer Teoremi'nin [131] bir sonucudur. Ara değer teoreminin ifadesi şu şekildedir:

Teorem 4.1 (**Ara Değer Teoremi**). *f, $[a,b]$ aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyon olsun. $f(a) < f(b)$ koşulu altında, $f(a) < c < f(b)$ olacak şekilde bir c sayısı varsa $f(x) = c$ denklemini sağlayan bir $x \in [a,b]$ noktası vardır [131].*

Ara Değer Teoremi, sürekli bir fonksiyonun görüntü kümesindeki her değere karşılık tanım kümesinde bir eleman olduğunu ifade etmektedir. Özel olarak; $x = c$ alınırsa sürekli fonksiyonun sabit noktası elde edilir.

Sürekli fonksiyonların sabit noktalarının varlığını garanti eden en basit sabit nokta teoremi aşağıda verilmiştir:

Teorem 4.2 (**Sabit Nokta Teoremi**). *$f : [a,b] \to [a,b]$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde, f'nin $[a,b]$ aralığında bir sabit noktası vardır [132].*

Brouwer daha sonra bu teoremi n-boyutlu uzaylar için şu şekilde genişletmiştir:

Teorem 4.3 (**Brouwer Sabit Nokta Teoremi**). *B, $\mathbb{R}^n$'de kapalı bir yuvar olsun. Bu takdirde, her sürekli $f : B \to B$ dönüşümü en az bir sabit noktaya sahiptir [133].*

Brouwer Sabit Nokta Teoremi, ilk olarak 1932'de John von Neumann [134] tarafından ekonomide iyi bilinen genel denge teorisinin varlığının ispatlanmasında kullanılmıştır. Neumann, mümkün olan en düşük fiyatlarla piyasadaki mallardan maksimum verimi elde etmek için en iyi üretim tekniklerini, Brouwer Sabit Nokta Teoremi'ni kullanarak ekonomik süreçler teorisi üzerinde tartışmıştır. Bu teorinin tek bilinen kanıtı, arzın tüm mallar için talebe eşit olduğu bir fiyatlar dizisinin belirli bir dönüşümün sabit noktaları olduğunu göstermektir [129]. Ayrıca, Brouwer'ın teoreminin S. Kakutani [135] tarafından yapılan genellemesi, 1994 yılında ekonomide Nobel Ödülü alan John F. Nash'in [136] oyun teorisinde *Nash Dengesi* kuramının ispatında kullanılmıştır.

Brouwer'ın çalışmalarında sonlu boyutlu uzaylar için kapalılık ve sınırlılık, sabit noktanın varlığını söylemek için yeterli olmaktadır. Ancak, sonsuz boyutlu uzaylar sınırlı ve kapalı olmadığından sabit noktanın varlığı hakkında kesin bir şey söylenememektedir. Sonsuz boyutlu uzaylar ancak kompaktlık koşulu altında sonlu örtülerle örtülerek kontrol edilebilir. 1930 yılında J. Schauder [137], Brouwer Sabit Nokta Teoremi'ni kompaktlık koşulu altında sonlu boyutlu uzaylardan sonsuz boyutlu Banach uzaylarına genişletmiştir ve kendi adıyla bilinen Schauder Sabit Nokta Teoremi'ni ispatlamıştır.

Teorem 4.4 (**Schauder Sabit Nokta Teoremi**). *X bir Banach uzayı ve K, X uzayının boştan farklı, kompakt, konveks bir alt kümesi olsun. Bu takdirde, $T : K \to K$ sürekli dönüşümü en az bir sabit noktaya sahiptir [138].*

Yukarıda verilen sabit nokta teoremleri sabit noktanın sadece varlığını göstermektedir. Sabit noktanın hem varlığını hem de tekliğini garanti eden ilk çalışma 1922 yılında S. Banach [139] tarafından yapılmıştır. Banach'ın doktora tezinden üretilen bu çalışmada, ayrıca sabit noktaların hesaplanması için iterasyon dizileriyle yeni bir yaklaşım metodu da sunulmuştur. Picard-Banach Teoremi veya Banach Sabit Nokta Teoremi'nin kısaltılmış hali aşağıda verilmiştir.

Teorem 4.5 (**Banach Contraction Prensibi**). *(X,d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ dönüşümü olsun. Her $x, y \in X$ için*

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) \tag{4.1}$$

koşulunu sağlayan en az bir $0 \leq k < 1$ sabiti bulunabiliyorsa T dönüşümü tek bir ξ sabit noktasına sahiptir; yani $\lim_{n\to\infty} T^n x = \xi$ olur [140].

4.2 Literatürdeki Bazı Sabit Nokta İterasyon Yöntemleri

Sabit nokta teoremleri, genel olarak belirli bir operatörün sabit noktasının varlık ve tekliğini bulmada teorik bir bakış açısı sunmaktadır. Ancak sadece sabit noktanın varlık ve tekliğini garanti etmek değil aynı zamanda bu sabit noktayı inşa edebilmek de önemlidir. Bunun için sabit nokta teoride çoğunlukla kullanılan yöntemler iterasyon yöntemleri yani yaklaşık yöntemlerdir.

Her $x \in X$ için $T^0 x = x$ ve $T^{n+1}(x) = T(T^n(x))$ olacak şekilde tanımlı $(T^n(x))_{n\geq 0}$ dizisine T dönüşümü altında x'in n. iterasyonu denir. T^n $(n \geq 1)$ dönüşümü de T'nin n. iterasyonuna karşılık gelmektedir.

Tanım 4.1 (**Picard İterasyon Yöntemi**). $x_0 \in X$ başlangıç değeri için

$$x_n = T(x_{n-1}) = T^n(x_0), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4.2}$$

olarak verilen (x_n) dizisi ardışık yaklaşımlar dizisi ya da Picard iterasyon yöntemi olarak adlandırılır [63].

Bu dönüşüm ayrıca aşağıdaki özellikleri sağlamaktadır:

1. Her $n \in \mathbb{N}^*$ için $F_T \subset F_{T^n}$,
2. Bazı $n \in \mathbb{N}^*$ için $F_{T^n} = \{x\}$ ise $F_T = \{x\}$ dir. Tersi her zaman doğru değildir.

Örnek 4.1. *$T : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ dönüşümü verilsin. $T(1) = 3$, $T(2) = 2$ ve $T(3) = 1$ olduğunda $F_{T^2} = \{1,2,3\}$'tür; ancak $F_T = \{2\}$ olmaktadır [63].*

Literatürde ardışık yaklaşımlar metodunun ilk olarak Liouville [141] tarafından tanımlandığı, daha sonra Cauchy tarafından kullanıldığı bilinmektedir. Sistematik olarak ise ilk kez 1890 yılında Picard [142] tarafından adi diferansiyel denklemler için başlangıç değer problemlerinin çözümünün varlık ve tekliğinin klasik ispatında geliştirilmiştir. Banach'ın ünlü doktora tezinde 1922 yılında ispatladığı Banach Sabit Nokta Teoremi [139] ardışık yaklaşımların klasik yönteminin bir soyutlamasıdır. Banach'ın çalışmasından sonra; çeşitli uygulamalarıyla birlikte, sabit nokta teorisi tarafından sınırlandırılan dinamik bir araştırma alanı oluşturan sayısız genellemeler ve iterasyon yöntemleri elde edilmiştir (bkz. [143–148]).

Aşağıda çalışma boyunca kullanılacak iterasyon yöntemleri tanıtılmıştır. Tüm sabit nokta iterasyon yöntemleri $(X, \|\cdot\|)$ normlu reel uzaylar üzerinde tanımlanmıştır. $T : X \to X$ dönüşümü ve $x_0 \in X$ başlangıç değeri olsun.

Picard iterasyonunun ardışık iki terimini, yani

$$\frac{1}{2}(x_n + Tx_n)$$

ifadesini içeren ortalama dizilerin yakınsamasına ilişkin ilk sonuç 1955 yılında Krasnosel'skii [87] tarafından elde edilmiştir. 1957 yılında Schaefer [149], Krasnosel'skii'nin sonucundaki $1/2$ sabitini bir $\lambda \in (0,1)$ parametresi ile değiştirerek genişletmiştir.

Tanım 4.2 (**Krasnosel'skii İterasyon Yöntemi**). $\lambda \in (0,1)$ olmak üzere

$$x_{n+1} = (1-\lambda)x_n + \lambda T(x_n), \quad n = 0,1,2,... \tag{4.3}$$

olarak tanımlanan (x_n) dizisi Krasnosel'skii iterasyon yöntemi olarak adlandırılır [149].

1953 yılında Mann [86], bir matris formülasyonunda tek adımlı Mann iterasyon yöntemini tanımlamıştır. Kronolojik olarak Krasnosel'skii'den iki yıl önce tanıtılmış olsa da Mann iterasyonu Krasnosel'skii iterasyonunun bir genellemesidir ve Krasnosel'skii iterasyon formülündeki λ parametresinin bir $(\alpha_n) \subset [0,1]$ reel sayı dizisi ile değiştirilmesiyle elde edilir.

Tanım 4.3 (**Mann İterasyon Yöntemi**). $(\alpha_n) \subset [0,1]$ belirli koşulları sağlayan bir reel sayı dizisi olmak üzere

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T(x_n), \quad n = 0,1,2,... \tag{4.4}$$

olarak tanımlanan (x_n) dizisi Mann iterasyon yöntemi olarak adlandırılır [86].

Eğer (4.4) denkleminde $\alpha_n = \lambda$ şeklinde alınırsa Mann iterasyonu, Krasnosel'skii iterasyonuna indirgenmiş olur. Mann iterasyonunun bir genelleştirmesi olarak 1974 yılında Ishikawa [83] tarafından iki adımlı iterasyon yöntemi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 4.4 (**Ishikawa İterasyon Yöntemi**). $(\alpha_n), (\beta_n) \subset [0,1]$ belirli koşulları sağlayan reel sayı dizileri olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)\, x_n + \alpha_n T(y_n) \\ y_n = (1-\beta_n)\, x_n + \beta_n T(x_n), \end{cases} \qquad n = 0,1,2,... \tag{4.5}$$

olarak tanımlanan (x_n) dizisi Ishikawa iterasyon yöntemi olarak adlandırılır [83].

Varyasyonel eşitsizliklerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için 2000 yılında Noor [84] tarafından Ishikawa iterasyonunun genellemesi olarak üç adımlı Noor iterasyon yöntemi tanımlanmıştır.

Tanım 4.5 (**Noor İterasyon Yöntemi**). $(\alpha_n), \left(\beta_n^1\right), \left(\beta_n^2\right) \subset [0,1]$ belirli koşulları sağlayan reel sayı dizileri olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)\, x_n + \alpha_n T\left(y_n^1\right) \\ y_n^1 = \left(1-\beta_n^1\right) x_n + \beta_n^1 T\left(y_n^2\right) \\ y_n^2 = \left(1-\beta_n^2\right) x_n + \beta_n^2 T(x_n), \end{cases} \qquad n = 0,1,2,... \tag{4.6}$$

olarak tanımlanan (x_n) dizisi Noor iterasyon yöntemi olarak adlandırılır [84].

2004 yılında Rhoades and Soltuz [85], yukarıda verilen tüm iterasyon yöntemlerini özel halleri olarak içeren n-adımlı iterasyon yöntemini tanımlamıştır.

Tanım 4.6 (**Multi-step İterasyon Yöntemi**). $(\alpha_n), \left(\beta_n^i\right) \left(i = \overline{1, p-1}\right)$ reel sayı dizileri

$$\begin{aligned} &(i)\, \{\alpha_n\} \subset (0,1),\ \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0,\ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \\ &(ii)\, \left\{\beta_n^i\right\} \subset [0,1),\ 1 \le i \le p-1,\ \lim_{n\to\infty} \beta_n^1 = 0 \end{aligned} \tag{4.7}$$

koşullarını sağlasın. $p \ge 2$ olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)\, x_n + \alpha_n T\left(y_n^1\right) \\ y_n^i = \left(1-\beta_n^i\right) x_n + \beta_n^i T\left(y_n^{i+1}\right) \\ y_n^{p-1} = \left(1-\beta_n^{p-1}\right) x_n + \beta_n^{p-1} T(x_n), \end{cases} \qquad (i = 1,...,p-2). \tag{4.8}$$

olarak tanımlanan (x_n) dizisi Multi-step iterasyon yöntemi olarak adlandırılır [85].

Yukarıda verilen tanımlar ışığında, Multi-step iterasyon yönteminin $(\alpha_n), \left(\beta_n^i\right)$ $\left(i = \overline{1, p-1}\right)$ dizilerinin özel haline göre bir çok iterasyon yöntemini içerdiği görülmektedir:

i. (4.8)'de $p = 3$ alınırsa (4.6) ile verilen Noor iterasyon yöntemine [84] indirgenir.

ii. (4.8)'de $p = 2$ alınırsa (4.5) ile verilen Ishikawa iterasyon yöntemine [83] indirgenir.

iii. (4.8)'de denkleminde $p = 2$, $\beta_n^1 = 0$ alınırsa (4.4) ile verilen Mann iterasyon yöntemine [86] indirgenir.

iv. (4.8)'de $p = 2$, $\beta_n^1 = 0$ ve $\alpha_n = \lambda(const)$ alınırsa (4.3) ile verilen Krasnosel'skii iterasyon yöntemine [87] indirgenir.

v. (4.8)'de $p = 2$, $\beta_n^1 = 0$ ve $\alpha_n = 1$ alınırsa (4.2) ile verilen Picard iterasyon yöntemine [142] indirgenir.

4.3 Sabit Nokta İterasyon Yöntemleri ile Kaos Kontrol

Son yıllarda diskrit dinamik sistemler ve kaotik yapılar sabit nokta teorinin argümanlarıyla çalışılmaya başlanmıştır. Özellikle iterasyon süreçlerinin barındırdığı dinamikler üzerinden hareketle hem dönüşümlerin dinamik süreçleri hem de kaotik yapıların kaos kontrolünün sağlanmasında sabit nokta iterasyon yöntemleri kullanılmıştır. Klasik sabit nokta iterasyon yöntemleri literatürde yakınsaklık hızları ile ilişkili yapılan çalışmalara dayanarak kaos kontrolü için güçlü bir mekanizma sağlamaktadır.

Sabit nokta iterasyon yöntemleri sabit nokta, kararlılık, kararsızlık, periyodik olma özelliklerine göre dinamik ya da kaotik sistemler olarak değerlendirilebilir ve iterasyon yöntemleri için kaos kontrol mekanizmaları olarak geliştirilebilirler. Sabit nokta iterasyon yöntemlerinin kaos kontrol mekanizması olarak kullanılması iterasyonun parametreleriyle kaosa sebep olan büyümenin kontrol altına alınması anlamına gelmektedir. İterasyon yöntemlerinin dinamik yörüngelere etkisi büyümeyi etkileyen parametrelerle sağlanmaktadır.

Bu yaklaşımdan esinlenerek Huang [70], büyüme oranını temsil eden fonksiyon ile esas fonksiyonu olan iterasyon süreçleriyle n. mertebeden iterasyon fonksiyonları elde etmiştir ve bu iterasyon fonksiyonlarının büyüme oranını temsil eden fonksiyonun türeviyle esas fonksiyonda kararsız olan sabit noktaların kararlı hale dönüştüğünü göstermiştir. Ancak kullanılan fonksiyonlar parametre içeren

fonksiyonlar olduğundan, bu kararsız sabit noktaların kararlı hale dönüşmesinin fonksiyonun parametresi üzerine konulan şartlarla mümkün olduğunu tespit etmiştir. Büyüme oranındaki *büyüme* kavramı sabit nokta teorideki iterasyon yöntemlerine karşılık gelmektedir. Bu kavram Berinde [71] tarafından Mann-Krasnoseslkij [63] iterasyon yöntemlerine uygulanmış ve tek parametreli basit bir büyüme kontrol mekanizması geliştirilmiştir.

Büyümeye bağlı kaos kontrol mekanizmasının klasik sabit nokta iterasyon yöntemleri ile elde edilişi aşağıda verilmiştir.

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ve $f : [a,b] \to [a,b]$ bir nonlineer fonksiyon olsun. Birinci mertebeden fark denklemiyle tanımlanan diskrit dinamik sistem $([a,b], f)$ ile gösterilsin. Bir-boyutlu diskrit dinamik sistemin bir $x_0 \in [a,b]$ elemanının yörüngesi, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_{n+1} = f^{n+1}(x_0) = f\left[f^n(x_0)\right] = f(x_n) \tag{4.9}$$

şeklinde x_0 ile başlayan bir dizidir. Bu basit problemin diskrit dinamik sistemlerdeki çözümü bütün başlangıç noktalarına göre $([a,b], f)$ sistemini çözmeye bağlıdır. f dönüşümünün sabit noktası x^* ile gösterilirse

$$F_f = \{x^* : x^* \in [a,b],\ f(x^*) = x^*\}$$

şeklindeki tüm sabit noktalar kümesi (4.9) denklemine çözüm olmaktadır. Eğer f dönüşümü sürekli ise

$$h(x^*) = f(x^*) - x^* = 0$$

denklemi f için bir çözümdür. Bunu garanti eden f'nin türevlenebilir olması ya da daha genel olan f'nin sürekli olmasıdır. Bu şartlar altında, F_f kümesi boş değildir ve $h(x^*) = 0$ vardır; dolayısıyla sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, eğer f dönüşümü kapalı aralıkta sürekli bir fonksiyon olarak alınırsa Brouwer Sabit Nokta Teoremi [130] gereğince; f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında en az bir sabit noktaya sahiptir, yani $f(x^*) = x^*$'dir.

Bu noktada, $([a,b], f)$ diskrit dinamik sisteminde sabit noktanın itici (kararsız) ya da çekici (kararlı) olup olmadığına bağlı olarak $f'(x^*)$ türevinin var olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $\forall x \in I$ için $f(x) \in I$ ve $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x^*$ olacak şekilde x^* sabit noktasını içeren bir I açık aralığı varsa x^* sabit noktası çekici veya kararlı sabit nokta; eğer $\forall x \in I \setminus \{x^*\}$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $f^n(x) \notin I$ olacak şekilde x^* sabit noktasını içeren bir I açık aralığı varsa x^* sabit noktası itici veya kararsız sabit noktadır.

Diskrit dinamik sistemler tabiatta değişime açık varlıkların pozitif veya negatif yönde değişimini içermektedir. Diskrit dinamik sistemleri içeren birçok reel dünya problemlerinin arasındaki ilişkilerin açıklanmasında ve doğada meydana gelen tabii olayların modellenmesinde etkili bir metot olarak *büyüme oranı* kavramı kullanılmaktadır. Bir varlığın büyüme oranı, başlangıç ve son hali arasındaki farkın ilk haline oranıdır. Genel olarak, (4.9) ile verilen bir-boyutlu bir diskrit dinamik sistem için büyüme oranı aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır [70]:

$$g_n \equiv \frac{x_{n+1}-x_n}{x_n} = \frac{f(x_n)}{x_n} - 1. \tag{4.10}$$

Reel dünyada bir varlığın büyüme oranı bir dizi ilişkisiyle gerçekleşmesine rağmen bu dizinin terimlerinin oluşması aşamasında birden çok dış etkene maruz kalmaktadır. Dolayısıyla büyüme oranı bir değişkene bağlı bir ilişkiyken bu ilişkiyi etkileyen dış faktörler de parametre olarak adlandırılmaktadır. Eğer (α_n) dış çevre faktörlerine karşılık geliyorsa büyüme oranı aşağıdaki ifadeye denk olacak şekilde verilebilir:

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n} \cong \alpha_n \left[\frac{f(x_n)-x_n}{x_n}\right]. \tag{4.11}$$

Buradan,

$$x_{n+1}-x_n = \alpha_n (f(x_n)-x_n) \tag{4.12}$$

ilişkisi dikkate alındığında büyüme oranı yerine büyüme kavramı elde edilmektedir. (4.12) denklemi düzenlendiğinde

$$x_{n+1} = \widetilde{f}_{\alpha_n}(x_n) \equiv x_n + \alpha_n (f(x_n)-x_n) \tag{4.13}$$

şeklinde elde edilen büyüme, sabit nokta teorideki tek parametre içeren iki adımlı Mann iterasyon yöntemine [86] karşılık gelmektedir. Eğer (α_n) parametresi yerine $\lambda \in (0,1)$ alınırsa Krasnoselskij iterasyon yöntemi [149] elde edilir. Böylece, (4.9) ile verilen bir-boyutlu bir diskrit dinamik sistemin büyümeye dair değişimini kontrol eden tek parametreye bağlı büyüme kaos kontrol mekanizması geliştirilmiş olur.

Açık olarak görülmektedir ki; büyüme kavramı sabit nokta teorideki iterasyon yöntemlerine karşılık gelmektedir. Sabit nokta iterasyon yöntemlerinin kaos kontrol mekanizması olarak kullanılması iterasyon parametreleriyle kaosa sebep olan sınırsız büyümenin kontrol altına alınması demektir. Eğer f kaotik ya da daha genel olarak bir sabit noktaya yakınsama anlamında kararsız ise sistemden üretilen büyüme oranları da kaotik olarak değişir. (α_n) parametresi, büyümede kaosa sebep olan dış etkileri temsil etmektedir. Çalışmamız boyunca, iterasyon parametreleri kaotik diskrit dinamik sistemler için kontrol parametreleri olarak adlandırılacaktır.

Eğer (4.13) ile verilen kontrol mekanizmasında kontrol parametresi $\alpha_n = 1$ olarak alınırsa (4.9) orijinal sistemi elde edilir; $\alpha_n = 0$ alındığında ise $x_{n+1} = x_n$ aşikar kararlı sistemine indirgenir. Bu sebepten, çalışmamızda iterasyonlara ait kaos kontrol parametreleri $(0, 1)$ açık aralığında alınacaktır. Ayrıca, (4.10) büyüme oranı $x_n = 0$ için tanımsız olduğundan $[a, b]$ tanım aralığından orijinin çıkarılması gerekmektedir.

Literatürde sabit nokta iterasyon yöntemleri ile kurulan kaos kontrol mekanizmalarını elde etmek için iki farklı metot bulunmaktadır. Bunlardan ilki, iterasyona ait büyüme oranı veya kontrol parametrelerinin aralıklarının düzenlenmesiyle kaotik bir diskrit dinamik sistemin kararsız sabit noktasının kararlı hale dönüştürülmesidir. Bu metotla yapılan çalışmalarda, kaotik davranışa sahip keyfi bir fonksiyon seçilir ve belirlenen sabit nokta iterasyonu altında kaosa sebep olan iterasyona ait kontrol parametre aralıkları uygun koşullar altında yeniden düzenlenir.

Literatürdeki ikinci yöntem ise lojistik fonksiyon gibi bir kaotik dönüşüm seçilerek iterasyon yöntemleri altında kaotik fonksiyonun kaos katsayısı için aralık belirlemektir. Bu metodun uygulandığı çalışmalarda, iterasyon yöntemlerinin parametreleri nümerik sabit bir değer olarak ve kaotik fonksiyonun kaos katsayısı da keyfi olarak seçilir. İkinci metotla yapılan çalışmalardan bazıları şunlardır [150–154]. Daha genel bir yaklaşım olan birinci metot, bazı özel koşullar altında ikinci metoda indirgenebilir. Birinci metotta iterasyon parametrelerinin kaos kontrolünü sağlayan parametre aralıkları belirlendikten sonra, kaos katsayısının aralıkları ikinci metottaki gibi keyfi kaos katsayısına sahip kaotik bir fonksiyon alınarak elde edilebilir. Ancak ikinci metotta iterasyon yönteminin sabit noktasının kararlı veya kararsızlığı ile ilgili bir bilgiye ulaşılamamaktadır; sadece kaos katsayısının aralıkları hesaplanmaktadır.

Kaos kontrol açısından temel problem, büyümede kaosa sebep olan dış etkileri yani parametreyi kontrol etmektir. Bu yaklaşım hem güçlü bir matematiksel metottur hem de diğer bilim dallarındaki bazı problemlerin çözümüne izin veren bir yaklaşım sunmaktadır. Bizim çalışmamızda, Multi-step iterasyon yönteminin [85] kaos kontrol mekanizmaları belirlenirken bu methot kullanılmıştır ve özel olarak, Noor [84], Ishikawa [83], Mann [86], Krasnosel'skii [87] ve Picard [142] iterasyon yöntemlerinin kaos kontrol mekanizmaları elde edilmiştir. Bununla birlikte, *Matlab R202a* [155] ve *Mathematica 9.0* [156] yazılım programları yardımıyla lojistik ve kübik dönüşüm üzerinde kontrol mekanizmalarının kaotik ve dinamiksel özelliklerinin gösterildiği bilgisayar simülasyonları yapılmıştır.

4.4 İterasyon Yöntemleri için Lyapunov Üsteli

Lyapunov üsteli tekniği, yörüngeler arasındaki ıraksama ve yakınsama oranlarını ölçmemizi sağlayan daha da açık olarak ifade edilirse birbirine çok yakın başlangıç noktaları seçilerek iki yörüngenin hassas bağımlılığını ölçmeye yarayan lineer olmayan dinamik sistemlerin önemli ve güçlü bir özelliğidir. Bu teknikle kararlı periyodik davranışların kararlı noktasına doğru yakınsama oranı ölçülürken kaotik davranışlar için yörüngeler arasındaki ıraksaklık oranı ölçülmektedir. Bu bölümde, f_μ tek parametreli kaotik fonksiyon sınıfları altında tanımlı n-adımlı iterasyon yöntemlerininin genellemesi olan Multi-step iterasyon yöntemi [85] ile kurulan $M\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)$ $(i=\overline{1,p-1})$ sabit nokta kaos kontrol mekanizması için Lyapunov üsteli tanımlanmıştır.

$0<\varepsilon<1$ olmak üzere x ve $x+\varepsilon$ şeklinde keyfi iki başlangıç noktası olsun. Kabul edelim ki; x ve $x+\varepsilon$ yörüngeleri arasındaki ıraksama Δ_n ile gösterilsin ve buna karşılık gelen üstel büyüme $\Delta_n \approx \varepsilon e^{n\lambda}$ olarak ölçülsün. Burada λ, $M\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)$ $(i=\overline{1,p-1})$ dönüşümünün Lyapunov üsteline, n ise iterasyon sayısına karşılık gelmektedir.
$i=1,2,...,p-1$ için

$$\Delta_n = M^n\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x+\varepsilon) - M^n\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x) = \varepsilon e^{n\lambda}$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla

$$\frac{M^n\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x+\varepsilon) - M^n\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x)}{\varepsilon} \equiv e^{n\lambda}$$

olur. Eşitliğin her iki tarafının $\varepsilon \to 0$ için limiti alınırsa

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{M^n\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x+\varepsilon) - M^n\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x)}{\varepsilon} = e^{n\lambda}$$

elde edilir ve

$$\left[M^n\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x)\right]' = e^{n\lambda}$$

türev denklemi bulunur. Son eşitliğin her iki tarafının logaritması alınırsa

$$\lambda = \frac{1}{n}\ln\left|\left[M^n\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x)\right]'\right| \tag{4.14}$$

olarak elde edilmektedir. Burada $(\alpha_n),\left(\beta_n^i\right) \subset [0,1]$ $\left(i=\overline{1,p-1}\right)$ kontrol parametreleridir ve $\left[M^n\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x)\right]'$, $M^n\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x)$ dönüşümünün birinci türevini göstermektedir. n-inci dereceden polinomun türevi, yörüngeler için zincir

kuralı Teorem 3.3 kullanılarak belirlenebilir.

$$x_1,\ x_2 = M\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x_1),\ x_3 = M\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x_2),\ldots,\ x_{n+1} = M\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x_n)$$

şeklinde bir dizi oluşturalım. Devaney'in zincir kuralından

$$\left[M^n\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x_1)\right]' = M'\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x_n)M'\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x_{n-1})\ldots M'\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x_1) \tag{4.15}$$

yazılabilir. (4.14) ve (4.15) denklemleri düzenlenerek

$$\begin{aligned}\lambda =& \frac{1}{n}\left[\ln\left|M'\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x_n)M'\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x_{n-1})\ldots M'\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x_1)\right|\right]\\ =& \frac{1}{n}\left[\ln\left|M'\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x_n)\right| + \ln\left|M'\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x_{n-1})\right| + \ldots + \ln\left|M'\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x_1)\right|\right]\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, Lyapunov üsteli $i = \overline{1,p-1}$ için aşağıdaki şekilde belirlenir:

$$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left|M'\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x_k)\right|. \tag{4.16}$$

Burada, periyodik olmayan yörüngeler için bir yörüngenin tüm uzunluğu kullanılır. Genel olarak, bir yörüngenin tüm uzunluğunu kullanmak mümkün değildir; bu nedenle, Lyapunov üstelini yalnızca sonlu uzunluk kullanarak tahmin edebiliriz. Ayrıca, Lyapunov üstelinin değeri yörüngenin davranışına bağlıdır. Eğer x_1 başlangıç noktasının yörüngesi sabit ise (4.16) denklemi

$$\lambda = \ln\left|M'\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x_1)\right| \tag{4.17}$$

denklemine indirgenir. Eğer x_1 başlangıç noktasının yörüngesi m-periyodlu periyodik yörünge ise (4.16) denklemi

$$\lambda = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\ln\left|M'\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x_k)\right| \tag{4.18}$$

olarak ifade edilmektedir.

Yukarıdaki tanım altında, eğer Lyapunov üsteli pozitif değilse yani $\lambda < 0$ ise sistemin yörüngeleri kararlıdır; eğer Lyapunov üsteli negatif değilse yani $\lambda > 0$ ise sistemin yörüngeleri kararsızdır ya da sistemde kaos oluşmaya başlar. Ayrıca Lyapunov üsteli sıfır yani $\lambda = 0$ ise o zaman yörüngeler nötr kalır. Böylelikle Lyapunov üsteli sabit nokta iterasyonları ile kurulmuş dinamik sistemlerin yörüngelerinin kararlı olup olmadığını belirleyebilmektedir.

5
ISHIKAWA İTERASYON YÖNTEMİ İLE KAOS KONTROL

Çalışmanın ilk orijinal bölümü olarak, bir-boyutlu kaotik diskrit dinamik sistemlerin kaos kontrolü için iki adımlı Ishikawa iterasyon yöntemi [83] kullanılarak yeni bir sabit nokta kontrol mekanizması geliştirilmiştir. İki parametre içeren kontrol mekanizmasının parametreleri ile kaosa sebep olan kararsız yörüngeler için stabilite (kararlılık) aralıkları analitik olarak belirlenmiştir. Kaotik diskrit dinamik sistem olarak lojistik fonksiyon sınıfları seçilerek kararsız sabit noktalar ile kararsız periyodik noktalar, Ishikawa kontrol mekanizmasının belirli parametre aralıklarında kararlı hale getirilmiştir. Daha sonra, bilgisayar simülasyonlarıyla kontrol mekanizmasının dinamik yörüngeleri analiz edilmiştir. Ayrıca, yörüngelerin başlangıç koşullarına bağlı olarak ıraksamasını belirleyen Lyapunov üsteli kullanılarak ıraksayan sabit ve periyodik yörüngelerin yakınsaması sağlanmıştır. Çalışmanın son kısmında, kaos kontrolün önemli uygulama alanlarından biri olan trafik akış modelinin bir genellemesi olarak iki adımlı Ishikawa trafik kontrol mekanizması kurulmuş ve trafik kararlılık aralıkları yorumlanmıştır.

5.1 Ishikawa Sabit Nokta Kontrol Mekanizması

$[a,b] \subset \mathbb{R}$, $f_\mu : [a,b] \to [a,b]$ tanımlı tek parametreye bağlı reel-değerli lineer olmayan sürekli bir dönüşüm olmak üzere

$$x_{n+1} = f_\mu(x_n) \tag{5.1}$$

şeklinde bir-boyutlu diskrit dinamik sistemini göz önüne alalım. Bu sistem $x_0 \in [a,b]$ başlangıç noktasına bağlı olarak her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_{n+1} = f_\mu^{n+1}(x_0) = f_\mu\left[f_\mu^n(x_0)\right] = f_\mu(x_n) \tag{5.2}$$

şeklinde bir iterasyon dizisi oluşturmaktadır. Brouwer Sabit Nokta Teoremi [130] gereğince; f_μ fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında en az bir sabit noktaya sahiptir, yani $f_\mu(x^*) = x^*$ olacak şekilde en az bir $x^* \in [a,b]$ noktası vardır. Ayrıca, $f'(x^*)$ türevinin

var olduğu kabul edilsin. (4.4) ile verilen Ishikawa iterasyon yöntemi [83], (4.9) orjinal sistemi ile yeniden düzenlendiğinde büyümeye bağlı iki adımlı Ishikawa sabit nokta tipten kaos kontrol mekanizması

$$x_{n+1} = I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_n) \equiv (1-\alpha_n)\,x_n + \alpha_n f_\mu\left[(1-\beta_n)\,x_n + \beta_n f_\mu(x_n)\right] \quad (n\in\mathbb{N}) \quad (5.3)$$

olarak tanımlanır. Ishikawa sabit nokta tipi kaos kontrol mekanizması kısaca *Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizması* olarak adlandırılır.

$(\alpha_n),(\beta_n) \subset [0,1]$ parametre dizilerine Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizmasının kontrol parametreleri denir. Eğer (5.3) ile verilen kontrol mekanizmasında her $n\in\mathbb{N}$ için $\alpha_n = 1$, $\beta_n = 0$ olarak alınırsa, (4.9) ile verilen lineer olmayan diskrit dinamik sisteme indirgenir. Eğer $\alpha_n = 0$ olarak alınırsa, $x_{n+1} = x_n$ olacak şekilde aşikar kararlı sistem elde edilir. Böylece, bütün (x_n) değerleri için sistem kararlı olur, yani sistemde herhangi bir değişiklik meydana gelmez. Bu nedenle, $(\alpha_n),(\beta_n)$ kontrol parametreleri $(0,1)$ açık aralığında alınacaktır.

$I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_n)$ mekanizmasında f_μ tek-parametreli reel değerli fonksiyon aileleri için $x_0\in[a,b]$ başlangıç değerinden başlayan iterasyon dizisi, (5.3) eşitliği kullanılarak aşağıdaki şekilde hesaplanmaktadır:

$$\begin{aligned}
x_1 &= I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_0)\\
&= (1-\alpha_n)\,x_0 + \alpha_n f_\mu\left[(1-\beta_n)\,x_0 + \beta_n f_\mu(x_0)\right]\\
x_2 &= I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_1) = I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)\left[I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_0)\right]\\
&= (1-\alpha_n)\,I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_0) + \alpha_n f_\mu\left[(1-\beta_n)\,I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_0) + \beta_n f_\mu\left(I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_0)\right)\right]\\
x_3 &= I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_2) = I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)\left[I^2\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_0)\right]\\
&= (1-\alpha_n)\,I^2\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_0) + \alpha_n f_\mu\left[(1-\beta_n)\,I^2\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_0) + \beta_n f_\mu\left(I^2\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_0)\right)\right]\\
&\vdots\\
x_{n+1} &= I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_n) = I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)\left[I^n\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_0)\right]\\
&= (1-\alpha_n)\,I^n\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_0) + \alpha_n f_\mu\left[(1-\beta_n)\,I^n\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_0) + \beta_n f_\mu\left(I^n\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_0)\right)\right].
\end{aligned}$$

Yukarıdaki işlemde $x_n = I^n\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_0)$ alınırsa

$$x_{n+1} = I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_n) = (1-\alpha_n)\,x_n + \alpha_n f_\mu\left[(1-\beta_n)\,x_n + \beta_n f_\mu(x_n)\right]$$

elde edilir. Böylece, $x_0\in[a,b]$ başlangıç noktasının yörüngeleri

$$x_0, x_1 = I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_0), x_2 = I^2\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_0), x_3 = I^3\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_0), \ldots, x_{n+1} = I^{n+1}\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_0)$$

iterasyon dizisidir. $I^{n+1}\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)$ iterasyonu, $I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)$ dönüşümünün $(n+1)$. iterasyonudur.

Diskrit dinamikleri içeren birçok alanda genişçe kullanılan büyüme oranı kavramı, (4.9) ile verilen bir-boyutlu diskrit dinamik sistemler için (4.10) eşitliği ile tanımlanmıştır. Bu düşünceden hareketle, Tanım 4.4'den $y_n = (1-\beta_n)\,x_n + \beta_n f_\mu(x_n)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (1-\alpha_n)\,x_n + \alpha_n f_\mu(y_n) \\ x_{n+1} &= x_n - \alpha_n x_n + \alpha_n f_\mu(y_n) \\ x_{n+1} - x_n &= \alpha_n f_\mu(y_n) - \alpha_n x_n \\ x_{n+1} - x_n &= \alpha_n \left(f_\mu(y_n) - x_n\right) \end{aligned} \tag{5.4}$$

elde edilir. (5.4) eşitliği değişime açık olgular üzerinde pozitif ya da negatif yönde büyümeye karşılık gelmektedir. Dolayısıyla, (5.3) ile verilen Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizması aşağıdaki büyüme oranı ile matematiksel olarak denktir:

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} = \alpha_n \left[\frac{f_\mu(y_n)}{x_n} - 1\right]. \tag{5.5}$$

Yukarıda verilen (5.5) büyüme oranı denklemi, eşitliğin verdiği imkan ile iki parametre içeren bir büyüme fonksiyonu olarak Ishikawa iterasyon yöntemine [83] karşılık gelmektedir ve $(\alpha_n), (\beta_n)$ kontrol parametreleri (4.9) orjinal sisteminin büyümesini kontrol etmektedir. Burada, eğer f_μ fonksiyonu kaotik veya kararsız, diğer bir ifadeyle, bir sabit noktaya yakınsamıyor ise büyüme kaotiktir. Ayrıca (5.5) ile verilen büyüme oranı eşitliği $x_n = 0$ değeri için tanımsız olduğundan orijinin $[a, b]$ tanım aralığından çıkarılması gerekmektedir. Böylece, (4.9) ile verilen bir-boyutlu diskrit dinamik sistemin büyümeye dair değişimini kontrol eden iki adımlı bir sabit nokta kaos kontrol mekanizması elde edilmiş olur.

5.2 Kararsız Sabit Noktaların Stabilize Edilmesi

Bir-boyutlu diskrit dinamik sistemler için sabit noktalara ait kararsız yörüngeler sistemin o noktada kaotik olduğu anlamına gelmektedir. Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizmasına ait parametreler üzerinde uygun şartlar belirlenerek bu kararsız sabit noktalar kararlı hale dönüştürülebilir. Bu sebepten dolayı orijinal istemin sabit noktalarıyla kontrol mekanizması arasında aşağıdaki gibi bir ilişkinin olması gerekmektedir.

Teorem 5.1. *(4.9) ile verilen f_μ orijinal sistemi ve (5.3) ile verilen Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizması aynı reel sabit noktalar kümesini paylaşmaktadır. Yani, $x^* \in [a, b]$ için $f(x^*) = x^*$ ise $I\left(\alpha, \beta, f_\mu\right)(x^*) = x^*$ dır. Tersi, $y_n = x^*$ koşulu altında, her zaman doğrudur.*

İspat. $x^* \in [a,b]$, f_μ orijinal sisteminin reel sabit noktası olsun, yani $f_\mu(x^*) = x^*$ dır. (5.3) ile verilen Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizmasında x^* sabit noktası yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x^*) &= (1-\alpha_n)\,x^* + \alpha_n f_\mu\left[(1-\beta_n)\,x^* + \beta_n f_\mu(x^*)\right] \\ &= (1-\alpha_n)\,x^* + \alpha_n f_\mu\left[x^* + \beta_n\left(f_\mu(x^*) - x^*\right)\right] \\ &= (1-\alpha_n)\,x^* + \alpha_n f_\mu\left[x^* + \beta_n\left(x^* - x^*\right)\right] \\ &= (1-\alpha_n)\,x^* + \alpha_n f_\mu(x^*) \\ &= x^* + \alpha_n\left(f_\mu(x^*) - x^*\right) \\ &= x^* + \alpha_n\left(x^* - x^*\right) \\ &= x^* \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla f_μ orijinal sistemine ait x^* sabit noktası aynı zamanda $I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)$ kontrol mekanizmasının da sabit noktası olduğu elde edilir.

Tersine, $x^* \in [a,b]$ noktası (5.3) ile tanımlı Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizmasının reel bir sabit noktası olsun. Teoremin hipotezinde verilen $y_n = x^*$ koşulu altında $I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x^*) = x^*$ ise

$$\begin{aligned} &(1-\alpha_n)\,x^* + \alpha_n f_\mu\left[(1-\beta_n)\,x^* + \beta_n f_\mu(x^*)\right] = x^* \\ &(1-\alpha_n)\,x^* + \alpha_n f_\mu(x^*) = x^* \\ &\alpha_n\left[f_\mu(x^*) - x^*\right] = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $\alpha_n \in (0,1)$ olduğundan $f_\mu(x^*) = x^*$ dır. Dolayısıyla, x^* sabit noktası f_μ sisteminin de bir sabit noktasıdır. Böylelikle ispat tamamlanır. ■

Teorem 5.2. *$x^* \in [a,b]$ noktası (4.9) ile verilen f_μ orijinal sisteminin kararsız bir sabit noktası olsun. $\left|f'_\mu(x^*)\right| \neq 1$ olmak üzere, (5.3) ile tanımlı Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizmasının*

$$\left|I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x^*)\right| < 1$$

kararlılık koşulu altında, $(\alpha_n),(\beta_n) \subset (0,1)$ kontrol parametrelerinin etkin olduğu bir aralık bulmak her zaman mümkündür. Diğer bir ifadeyle, f_μ orijinal sisteminin x^* kararsız sabit noktasını kararlı hale getiren $\alpha_n \in \Gamma_\alpha = (\min\{\alpha_n\}, \max\{\alpha_n\})$, $\beta_n \in \Gamma_\beta = (\min\{\beta_n\}, \max\{\beta_n\})$ şeklinde uygun kontrol parametre aralıkları her zaman bulunur.

İspat. Kabul edelim ki; $x^* \in [a,b]$ noktası f_μ orijinal sisteminin kararsız bir sabit noktası olsun. Tanım 3.2'den $\left|f'_\mu(x^*)\right| > 1$ koşulu altında $f'_\mu(x^*) < -1$ ve $f'_\mu(x^*) > 1$ olacak şekilde iki durum oluşmaktadır. Bu durumları incelemeden önce teoremin

hipotezinden verilen kararlılık koşulunu gerçeklemek için bazı işlem süreçlerine ihtiyaç duyulmaktadır.

(5.3) ile tanımlanan Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizmasının f_μ'nün x^* kararsız sabit noktasındaki değişimi $I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)$ fonksiyonunun türevi ile belirlenmektedir. (5.3) eşitliğinin türevi

$$\begin{aligned} I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_n) &= \alpha_n f'_\mu\left[(1-\beta_n)\,x_n+\beta_n f_\mu(x_n)\right]\left[1-\beta_n+\beta_n f'_\mu(x_n)\right]+1-\alpha_n \\ &= \alpha_n f'_\mu\left[x_n+\beta_n\left(f_\mu(x_n)-x_n\right)\right]\left[1+\beta_n\left(f'_\mu(x_n)-1\right)\right]+1-\alpha_n \end{aligned}$$

olarak elde edilir. x^* kararsız sabit noktası için türev fonksiyonu

$$I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x^*) = \alpha_n f'_\mu\left[x^*+\beta_n\left(f_\mu(x^*)-x^*\right)\right]\left[1+\beta_n\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right]+1-\alpha_n$$

olarak bulunur. Buradan $f_\mu(x^*)=x^*$ olduğundan

$$I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x^*) = \alpha_n f'_\mu(x^*)\left[1+\beta_n\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right]+1-\alpha_n \tag{5.6}$$

türev denklemi elde edilir. Şimdi, $f'_\mu(x^*)<-1$ kabul edelim. Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizması $\left|I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x^*)\right|<1$ kararlılık koşulu altında iki durum oluşmaktadır.

Durum 1: Kabul edelim ki; $I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x^*)<1$ olsun. (5.6) türev denkleminden

$$\begin{aligned} \alpha_n f'_\mu(x^*)\left[1+\beta_n\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right]+1-\alpha_n &< 1 \\ \alpha_n f'_\mu(x^*)\left[1+\beta_n\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right]-\alpha_n &< 0 \\ \alpha_n\left\{f'_\mu(x^*)\left[1+\beta_n\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right]-1\right\} &< 0 \end{aligned} \tag{5.7}$$

elde edilir. $f'_\mu(x^*)<-1$ ve $\beta_n\in(0,1)$ olduğundan

$$f'_\mu(x^*)\left[1+\beta_n\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right]-1<0 \tag{5.8}$$

olması gerekir. Ayrıca, $\alpha_n>0$ olduğundan $\min\{\alpha_n\}=0$ olduğu açıktır. (8.14)'den

$$\begin{aligned} f'_\mu(x^*)\left[1+\beta_n\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right] &< 1 \\ 1+\beta_n\left(f'_\mu(x^*)-1\right) &> \frac{1}{f'_\mu(x^*)} \\ \beta_n\left(f'_\mu(x^*)-1\right) &> \frac{1-f'_\mu(x^*)}{f'_\mu(x^*)} \\ \beta_n &< \frac{-1}{f'_\mu(x^*)} = \max\{\beta_n\} \end{aligned}$$

elde edilir.

Durum 2. Kabul edelim ki; $I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x^*) > -1$ olsun. (5.6) türev denkleminden

$$\begin{aligned}
\alpha_n f'_\mu(x^*)\left[1+\beta_n\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right]+1-\alpha_n &> -1\\
\alpha_n f'_\mu(x^*)\left[1+\beta_n\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right]+1-\alpha_n &> -2\\
\alpha_n\left\{f'_\mu(x^*)\left[1+\beta_n\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right]-1\right\} &> -2 \qquad (5.9)
\end{aligned}$$

olur. (5.9) eşitsizliğinin sol tarafındaki (α_n) parametresi çekildiğinde

$$\alpha_n < \min\left\{\frac{-2}{f'_\mu(x^*)\left[1+\beta_n\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right]-1}\right\} = \max\{\alpha_n\}$$

elde edilir. Ayrıca, (5.9)'da (β_n) parametresi çekilirse

$$\begin{aligned}
f'_\mu(x^*)\left[1+\beta_n\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right]-1 &> \frac{-2}{\alpha_n}\\
f'_\mu(x^*)\left[1+\beta_n\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right] &> \frac{-2}{\alpha_n}+1\\
1+\beta_n\left(f'_\mu(x^*)-1\right) &< \frac{-2}{\alpha_n f'_\mu(x^*)}+\frac{1}{f'_\mu(x^*)}\\
\beta_n\left(f'_\mu(x^*)-1\right) &< \frac{-2}{\alpha_n f'_\mu(x^*)}+\frac{1}{f'_\mu(x^*)}-1\\
\beta_n\left(f'_\mu(x^*)-1\right) &< \frac{-2}{\alpha_n f'_\mu(x^*)}+\frac{1-f'_\mu(x^*)}{f'_\mu(x^*)}\\
\beta_n &> \left[\frac{1-f'_\mu(x^*)}{f'_\mu(x^*)}-\frac{2}{\alpha_n f'_\mu(x^*)}\right]\frac{1}{f'_\mu(x^*)-1}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur, dolayısıyla

$$\max\left\{\left[\frac{1-f'_\mu(x^*)}{f'_\mu(x^*)}-\frac{2}{\alpha_n f'_\mu(x^*)}\right]\frac{1}{f'_\mu(x^*)-1}\right\} < \beta_n$$

elde edilir.

Yukarıda elde edilen kontrol parametre dizilerine ait maksimum ve minumum değerleri göz önüne alındığında, $f'_\mu(x^*) < -1$ koşulu altında Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizmasının $(\alpha_n), (\beta_n)$ kontrol parametrelerinin x^* kararsız sabit noktasını kararlı hale dönüştüren kontrol aralıkları aşağıdaki şekilde elde edilmektedir:

$$\Gamma_\alpha = (\min\{\alpha_n\}, \max\{\alpha_n\}) = \left(0, \min\left\{\frac{-2}{f'_\mu(x^*)\left[1+\beta_n\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right]-1}\right\}\right),$$
$$\Gamma_\beta = (\min\{\beta_n\}, \max\{\beta_n\}) = \left(\max\left\{\left[\frac{1-f'_\mu(x^*)}{f'_\mu(x^*)} - \frac{2}{\alpha_n f'_\mu(x^*)}\right]\frac{1}{f'_\mu(x^*)-1}\right\}, \frac{-1}{f'_\mu(x^*)}\right). \tag{5.10}$$

Diğer durum olarak, $f'_\mu(x^*) > 1$ olsun. Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizmasının $\left|I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x^*)\right| < 1$ kararlılık koşulu altında kontrol parametreleri üzerinde uygun bir aralık belirlemenin mümkün olup olmadığını araştıralım.

Durum 3. $I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x^*) < 1$ için (5.7) eşitsizliğini tekrar göz önüne alalım. $\beta_n \in (0,1)$ ve $f'_\mu(x^*) > 1$ olduğundan

$$f'_\mu(x^*)\left[1+\beta_n\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right]-1 > 0$$

elde edilir. Bunun için $\alpha_n < 0$ olması gerekir, ancak bu durum $\alpha_n \in (0,1)$ kontrol parametresinin tanım aralığı ile çelişmektedir.

Durum 4. $I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x^*) > -1$ için (5.9) eşitsizliğini göz önüne alalım. $f'_\mu(x^*) > 1$ koşulu altında (α_n) parametresi çekilirse

$$\alpha_n > \frac{-2}{f'_\mu(x^*)\left[1+\beta_n\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right]-1}$$

elde edilir. Bu durumda (α_n) parametresi

$$\alpha_n \in \left(\frac{-2}{f'_\mu(x^*)\left[1+\beta_n\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right]-1}, 0\right)$$

aralığında olması gerekir. Ancak $\alpha_n \in (0,1)$ olduğundan çelişki elde edilir.

Durum 3 ve Durum 4'den, $f'_\mu(x^*) > 1$ koşulu altında f_μ orijinal sisteminin x^* kararsız sabit noktasını kararlı hale getirecek uygun parametre aralıklarının bulunmadığı görülmektedir. Dolayısıyla, $f'_\mu(x^*) < -1$ koşulu altında f_μ orijinal sistemini kararlı hale getirecek Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizmasının $\Gamma_\alpha = (\min\{\alpha_n\}, \max\{\alpha_n\})$, $\Gamma_\beta =$

$(\min\{\beta_n\}, \max\{\beta_n\})$ şeklinde kontrol parametre aralıkları bulunmaktadır. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sonuç 5.1. *Teorem 5.2'de $\beta_n = 0$ olarak alındığında, tek adımlı Mann iterasyon yöntemi [86] ile kurulan sabit nokta kontrol mekanizmasının [71, 72] belirlediği, kararsız sabit noktaları kararlı hale dönüştüren kontrol parametre aralıkları elde edilir.*

5.2.1 Kaotik Fonksiyon Olarak Lojistik Sistem Uygulaması

Bu bölümde, kaotik özelliğe sahip lojistik fonksiyonun Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizması ile stabilite aralıkları belirlenmiş ve yeni kurulan kaos kontrol mekanizmasının yörünge dinamikleri analiz edilmiştir. Elde edilen nümerik sonuçlar; Matlab ve Mathematica programları kullanılarak bilgisayar simülasyonlarıyla desteklenmiştir. Bölüm 3'de, (3.3) ile verilen f_μ lojistik popülasyon modelinde büyüme oranı parametresi $\mu = 4$ alınırsa, $f_\mu : [0,1] \to [0,1]$ tanımlı bir-boyutlu lojistik sistem

$$x_{n+1} = f(x_n) \equiv 4x_n(1-x_n) \tag{5.11}$$

şeklindeki kaotik fonksiyon olarak elde edilir. Bu sistemin sabit noktaları, $f_\mu(x^*) = x^*$ denklemi çözülerek hesaplanırsa $x_1^* = 0$ ve $x_2^* = \frac{3}{4}$ olacak şekilde iki tane sabit noktası vardır. Bu sabit noktaların türevleri $f'_\mu(x_1^*) = 4 > 1$ ve $f'_\mu(x_2^*) = -2 < -1$ olduğundan Tanım 3.2 gereğince kararsız veya itici sabit noktalardır.

(5.3) ile verilen Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizmasında (5.11) lojistik sistemi f_μ fonksiyonunun yerine yazıldığında sabit nokta tipten kaos kontrol mekanizması aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= I(\alpha,\beta,f_\mu)(x_n) = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n f_\mu[(1-\beta_n)x_n + \beta_n(4x_n(1-x_n))] \\
&= (1-\alpha_n)x_n + 4\alpha_n[(1-\beta_n)x_n + 4\beta_n x_n(1-x_n)][1-(1-\beta_n)x_n - 4\beta_n x_n(1-x_n)] \\
&= (1-\alpha_n)x_n + 4\alpha_n\left[x_n - \beta_n x_n + 4\beta_n x_n - 4\beta_n x_n^2\right]\left[1 - x_n + \beta_n x_n - 4\beta_n x_n + 4\beta_n x_n^2\right] \\
&= (1-\alpha_n)x_n + 4\alpha_n\left[(1+3\beta_n)x_n - 4\beta_n x_n^2\right]\left[1-(1+3\beta_n)x_n + 4\beta_n x_n^2\right].
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Buradan, (5.12) kontrol mekanizmasının sabit noktalarını bulmak için

$$I(\alpha,\beta,f_\mu)(x^*) = x^*$$

denkleminin çözülmesi gerekmektedir. Yani,

$$\begin{aligned}
(1-\alpha_n)x^* + 4\alpha_n\left[(1+3\beta_n)x^* - 4\beta_n(x^*)^2\right]\left[1-(1+3\beta_n)x^* + 4\beta_n(x^*)^2\right] &= x^* \\
-\alpha_n x^* + 4\alpha_n\left[(1+3\beta_n)x^* - 4\beta_n(x^*)^2\right]\left[1-(1+3\beta_n)x^* + 4\beta_n(x^*)^2\right] &= 0 \\
x^*\left[-\alpha_n + 4\alpha_n(1+3\beta_n - 4\beta_n x^*)\left(1-(1+3\beta_n)x^* + 4\beta_n(x^*)^2\right)\right] &= 0
\end{aligned}$$

denklemi çözüldüğünde $x_1^* = 0$ ya da

$$-\alpha_n + 4\alpha_n(1+3\beta_n - 4\beta_n x^*)\left(1-(1+3\beta_n)x^* + 4\beta_n(x^*)^2\right) = 0$$

olması gerekmektedir. Son eşitliği çözmek analitik olarak zor olduğundan, *Mathematica 9* programı yardımıyla çözüm yapılırsa

$$\begin{aligned} &x_1^* = 0, x_2^* = \frac{3}{4}, \\ &x_3^* = \frac{2\beta_n + 3\beta_n^2 - \sqrt{-4\beta_n^3 + 9\beta_n^4}}{8\beta_n^2}, x_4^* = \frac{2\beta_n + 3\beta_n^2 + \sqrt{-4\beta_n^3 + 9\beta_n^4}}{8\beta_n^2} \end{aligned} \tag{5.13}$$

olacak şekilde dört tane sabit nokta elde edilir. Ancak, karekök fonksiyonunun pozitif tanımlı olmasından kaynaklı $\beta_n \geq \frac{4}{9}$ koşulunu sağlaması gerekir. Bu durumda, $0 < \beta_n < \frac{4}{9}$ aralığında x_3^* ve x_4^* sabit noktaları kompleks kökler; x_1^* ve x_2^* ise reel sabit noktalar olarak bulunur. Dolayısıyla, (5.12) kontrol mekanizması ile (5.11) lojistik sistemi aynı sabit noktalar kümesini paylaşmaktadır. Böylece, Teorem 5.1 sağlanmıştır.

Uygulamanın geri kalan kısmında, Teorem 5.2'nin hipotezleri altında Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizmasının $(\alpha_n), (\beta_n) \subset (0,1)$ kontrol parametrelerinin f_μ lojistik sistemi üzerindeki etkisi araştırılacaktır. İlk olarak, f_μ lojistik sisteminin $x_2^* = \frac{3}{4}$ kararsız sabit noktasının kararlı hale dünüştürülmesi için gerekli koşullar belirlenecektir. Teoremin hipotezinde verilen

$$\left|I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)\left(x_2^*\right)\right| < 1 \tag{5.14}$$

kararlılık koşuluna bağlı oluşan durumların incelenebilmesi için (5.12) kontrol mekanizmasının türevi alınırsa

$$I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_n) = 1-\alpha_n+4\alpha_n(1+3\beta_n-8\beta_n x_n)\left(1-2(1+3\beta_n)x_n+8\beta_n x_n^2\right) \tag{5.15}$$

elde edilir. $x_2^* = \frac{3}{4}$ sabit noktası için türev fonksiyonu

$$I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)\left(x_2^*\right) = 6\alpha_n\beta_n - 3\alpha_n + 1 \tag{5.16}$$

olarak hesaplanmaktadır.

Durum 1. $I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)\left(x_2^*\right) < 1$ iken

$$\begin{aligned} 6\alpha_n\beta_n - 3\alpha_n + 1 &< 1 \\ 6\alpha_n\beta_n - 3\alpha_n &< 0 \\ 3\alpha_n(2\beta_n - 1) &< 0 \\ \alpha_n(2\beta_n - 1) &< 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, $\alpha_n \in (0,1)$ olduğundan, $2\beta_n - 1 < 0$ ise

$$\beta_n < \frac{1}{2} = \max\{\beta_n\} \tag{5.17}$$

olarak bulunur. Ayrıca

$$\alpha_n > 0 = \min\{\alpha_n\}$$

olarak elde edilir.

Durum 2. $I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)\left(x_2^*\right) > -1$ iken

$$\begin{aligned} 6\alpha_n\beta_n - 3\alpha_n + 1 &> -1 \\ 6\alpha_n\beta_n - 3\alpha_n &> -2 \\ 3\alpha_n(2\beta_n - 1) &> -2 \\ \alpha_n(2\beta_n - 1) &> -\frac{2}{3} \end{aligned} \tag{5.18}$$

elde edilir. (5.17) göz önüne alınırsa

$$\alpha_n < \max\left\{\frac{-2}{3(2\beta_n - 1)}\right\} = \frac{-2}{3(2\min\{\beta_n\} - 1)} = \frac{2}{3} = \max\{\alpha_n\} \tag{5.19}$$

olur. Diğer taraftan, $\alpha_n \in (0,1)$ ve (5.19) kullanılarak (5.18) eşitsizliği yeniden düzenlenirse

$$\min\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{3\alpha_n}\right\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3\max\{\alpha_n\}} = 0 = \min\{\beta_n\} < \beta_n$$

elde edilir.

Böylelikle, f_μ lojistik sisteminin $x_2^* = \frac{3}{4}$ kararsız sabit noktası, Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizmasının $(\alpha_n), (\beta_n)$ kontrol parametrelerinin yardımıyla aşağıdaki aralıklarda kararlı hale getirilmektedir:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha_n} &= (\min\{\alpha_n\}, \max\{\alpha_n\}) = \left(0, \frac{2}{3}\right), \\ \Gamma_{\beta_n} &= (\min\{\beta_n\}, \max\{\beta_n\}) = \left(0, \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \tag{5.20}$$

Benzer düşünceyle, f_μ lojistik sisteminin $x_1^* = 0$ kararsız sabit noktası için Teorem 5.2'yi uygulayalım. (5.15) türev fonksiyonu x_1^* sabit noktası için hesaplanırsa

$$I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)\left(x_1^*\right) = 12\alpha_n\beta_n + 3\alpha_n + 1 \tag{5.21}$$

elde edilir. (5.14) kararlılık koşulu için

$$\begin{aligned} 12\alpha_n\beta_n + 3\alpha_n + 1 &< 1 \\ 12\alpha_n\beta_n + 3\alpha_n &< 0 \\ 3\alpha_n(4\beta_n + 1) &< 0 \\ \alpha_n(4\beta_n + 1) &< 0 \end{aligned}$$

sağlanmalıdır. Ancak bu eşitsizlik $\alpha_n \in (0,1)$ için $\beta_n < -\frac{1}{4}$ olmasını gerektirir. Bu durum (β_n) kontrol parametresinin tanım aralığı ile çelişir. Dolayısıyla, $x_1^* = 0$ kararsız sabit noktası için Teorem 5.2 uygulanamaz.

5.2.1.1 $\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta$ Kararlılık Aralığında Yörünge Dinamiklerinin Analizi

Bu başlık altında, f_μ lojistik sisteminin kararsız x_2^* sabit noktasının, Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizmasının parametrelerinin belirlediği $\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta$ aralığında kararlı bir sabit noktaya dönüştüğü bilgisayar simülasyonları ile gösterilecektir.

Bilindiği üzere; (5.11) ile verilen f_μ lojistik sistemi herhangi bir x_0 başlangıç noktasında kaotik yörüngelere sahiptir. f_μ'nin bir $x_0 \in [0,1]$ için yörüngeleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} &x_1 = f_\mu(x_0) = 4x_0(1-x_0) \\ &x_2 = f_\mu\big(f_\mu(x_0)\big) = 4^2x_0(1-x_0)(1-4x_0(1-x_0)) \\ &x_3 = f_\mu\big(f_\mu\big(f_\mu(x_0)\big)\big) = 4^3x_0(1-x_0)[1-4x_0(1-x_0)][1-16x_0(1-x_0)(1-4x_0(1-x_0))] \\ &\vdots \\ &x_{n+1} = f_\mu\big(f_\mu^n(x_0)\big) = 4f_\mu^n(x_0)\big(1-f_\mu^n(x_0)\big). \end{aligned}$$

Bu iterasyon dizisi baz alınarak, f_μ lojistik sisteminin $x_0 = 0.7333$ başlangıç değerindeki yörüngeleri *Matlab* yazılım programı ile hesaplandığında

$$\begin{aligned} &\Big(0.7333, f(0.7333), f_\mu^2(0.7333), f_\mu^3(0.7333), \ldots, f_\mu^{n+1}(0.7333), \ldots\Big) \\ &(0.7333, 0.7823, 0.6813, \ldots, 0.0299, 0.1160, 0.4103, 0.9678, 0.1247, 0.4365, \ldots) \end{aligned} \tag{5.22}$$

şeklinde bir noktaya yakınsamayan veya periyodik davranmayan kaotik bir yörünge dizisi elde edilmiştir. Bu kararsız yörüngeler Şekil 5.1'de verilen grafiklerde $x_0 = 0.7333$ başlangıç noktası alınarak itere edilen lojistik fonksiyonun yörüngelerinin giderek $x_2^* = 0.75$ sabit noktasından uzaklaştığı yani ıraksadığı görülür. Dolayısıyla, x_2^* sabit noktası itici ve kararsız bir sabit noktadır.

Bir sonraki adımda, (5.3) Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizmasının parametrelerinin belirlediği $\alpha_n \in \left(0, \frac{2}{3}\right)$, $\beta_n \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ aralıklarından seçilen değerler için x_2^* sabit noktasının kararlı olduğu gösterilecektir.

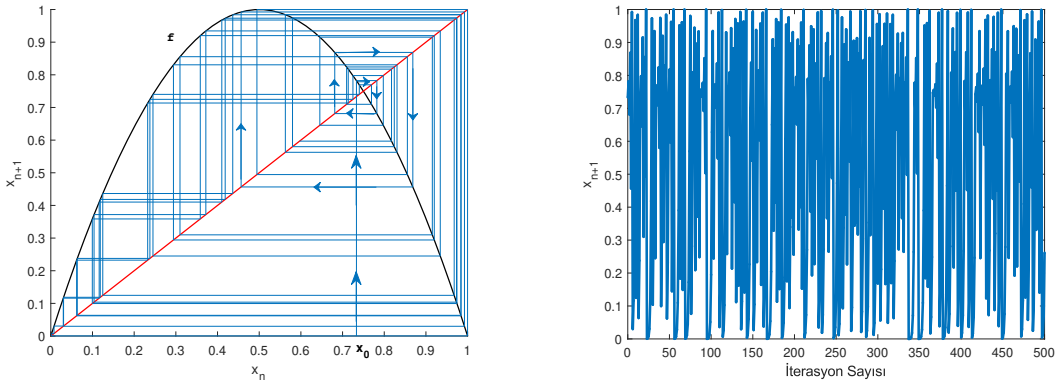
Öncelikli olarak, (5.3) kontrol mekanizmasının $f_\mu(x_0) = 4x_0(1-x_0)$ fonksiyonuna bağlı olarak bir $x_0 \in [0,1]$ başlangıç noktasındaki yörüngeleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
x_1 &= I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_0)\\
&= (1-\alpha_n)\,x_0 + 4\alpha_n\left[(1+3\beta_n)\,x_0 - 4\beta_n x_0^2\right]\left[1-(1+3\beta_n)\,x_0 + 4\beta_n x_0^2\right]\\
x_2 &= I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_1) = I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)\left[I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_0)\right]\\
&= (1-\alpha_n)\,I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_0) + 4\alpha_n\left[(1+3\beta_n)\,I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_0) - 4\beta_n I^2\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_0)\right]\\
&\times\left[1-(1+3\beta_n)\,I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_0) + 4\beta_n I^2\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_0)\right]\\
x_3 &= I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_2) = I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)\left[I^2\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_0)\right]\\
&= (1-\alpha_n)\,I^2\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_0) + 4\alpha_n\left[(1+3\beta_n)\,I^2\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_0) - 4\beta_n I^4\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_0)\right]\\
&\times\left[1-(1+3\beta_n)\,I^2\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_0) + 4\beta_n I^4\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_0)\right]\\
&\vdots\\
x_{n+1} &= I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_n) = I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)\left[I^n\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_0)\right]\\
&= (1-\alpha_n)\,I^n\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_0) + 4\alpha_n\left[(1+3\beta_n)\,I^n\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_0) - 4\beta_n I^{2n}\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_0)\right]\\
&\times\left[1-(1+3\beta_n)\,I^n\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_0) + 4\beta_n I^{2n}\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_0)\right]. \qquad (5.23)
\end{aligned}$$

(5.20) ile verilen $\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta$ kararlılık aralıklarından $\alpha_n = 0.4$ ve $\beta_n = 0.25$ parametre değerlerini seçelim. (5.23) yörünge dizisi göz önüne alındığında; Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizmasının $x_0 = 0.7333$ başlangıç noktasındaki yörüngeleri *Matlab* programı yardımıyla aşağıdaki gibi hesaplanmıştır:

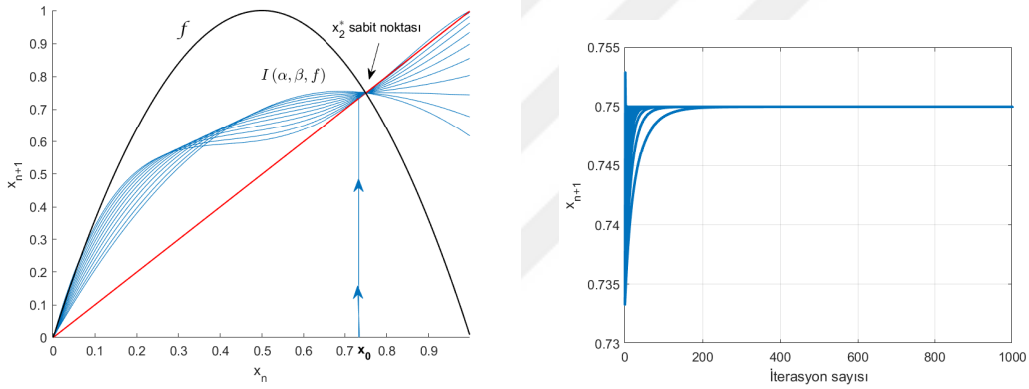
$$\begin{aligned}
&\left(0.7333, I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(0.7333), I^2\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(0.7333), \ldots, I^{n+1}\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(0.7333), \ldots\right)\\
&(0.7333, 0.7435, 0.7474, 0.7490, 0.7496, 0.7498, 0.7499, \mathbf{0.7500, 0.7500, 0.7500}, \ldots).
\end{aligned} \qquad (5.24)$$

(5.12) kontrol mekanizmasına ait elde edilen (5.24) yörünge dizisi, 8. iterasyondan sonra x_2^* sabit noktasına yakınsamaktadır. Dolayısıyla, (5.22) ile (5.24) iterasyon dizileri karşılaştırıldığında, f_μ lojistik sisteminin kaotik yörüngelerinin tamamen kararlı hale dönüştüğü görülmektedir. Şekil 5.2'de x_2^* sabit noktasının itici iken artık çekici sabit nokta haline geldiği ve f_μ lojistik sisteminin tüm yörüngelerinin $x_2^* = 0.75$ sabit noktasına yakınsadığı gösterilmiştir. Dolayısıyla, f_μ lojistik sisteminin kararsız sabit noktası, (5.12) kontrol mekanizmasının kontrol parametreleriyle kararlı hale getirilmiştir ve x_2^* sabit noktasına yakınsamaktadır. Yapılan analitik ispatlar ve bilgisayar tabanlı analizler sonucunda, f_μ lojistik sisteminin kaosunun Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizmasının parametreleriyle kontrol edilebilir hale geldiği ispatlanmıştır.



(a) Cobweb diyagramı **(b)** Kararsız yörüngeler

Şekil 5.1 f_μ lojistik sisteminin x_2^* sabit noktasının itici ve kararsız yörünge davranışı



(a) Cobweb diyagramı **(b)** Kararlı yörüngeler

Şekil 5.2 f_μ lojistik sisteminin x_2^* sabit noktasının $I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)$ kontrol mekanizmasının parametreleriyle çekici ve kararlı yörüngelere dönüştürülmesi

5.2.1.2 $\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta$ Kararlılık Aralığının Dışında Ishikawa f.p.t. Kontrol Mekanizmasının Dinamik Davranışı

Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizması parametrelerinin uygun seçimi için $x_{n+1} = f_\mu(x_n)$ orijinal sisteminin kararlılık aralığı belirlendikten sonra, kararlılık aralıkları dışındaki parametre aralıkları kontrol mekanizması için geçerli olduğundan kontrol mekanizmasının kontrol aralığı dışındaki davranışı da cevaplanması gereken önemli bir problemdir. Bu problemi cevaplamak için kararlılık aralığının dışında kalan aralıkta kontrol mekanizmasının dinamik davranışı incelenecektir.

Kararlılık aralığının dışına çıkıldığında, Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizması ilk olarak yakınsak, daha sonra periyodik ve son olarak da kaotik bölge oluşturmaktadır. Başlangıç değerine bağlı olarak; yakınsaklık bölgesi, (5.12) kontrol mekanizmasının kendi parametrelerinin ürettiği sabit noktalara yakınsadığı bölgedir.

$I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x^*)=x^*$ denkleminin çözülmesiyle (5.13)'da verilen sabit noktalar elde edilmişti. Bu sabit noktalardan ilk ikisi lojistik fonksiyona ait iken x_3^* ve x_4^* sabit noktaları kontrol mekanizmasının ürettiği sabit noktalardı. Ancak bu sabit noktalar kararlılık aralığında kompleks çözümler olduğundan lojistik sistem ile aynı sabit noktalar kümesini paylaşır ve dinamik sistemlerin kalıtsal özelliğini korumaktadır. Fakat kararlılık aralığının dışına çıkıldığında, her (β_n) parametresi için yeni reel sabit noktalar elde edilmektedir. Ancak bu süreçte dikkat edilmesi gereken bir husus bulunmaktadır. (5.12) kontrol mekanizması, $\Gamma_\alpha,\Gamma_\beta$ kararlılık aralığının içindeki $\left[\frac{4}{9},\frac{1}{2}\right)$ aralığında dört tane reel sabit noktaya sahiptir; ancak bu aralıkta x_2^* sabit noktası çekici yörüngeye sahip olduğundan kontrol mekanizması x_2^* sabit noktasına yakınsamayı sürdürmektedir.

f_μ lojistik sisteminin $x_2^*=\frac{3}{4}$ sabit noktasının $\Gamma_\alpha=\left(0,\frac{2}{3}\right)$, $\Gamma_\beta=\left(0,\frac{1}{2}\right)$ kontrol parametre aralıklarında çekici yani kararlı sabit nokta olduğu önceki bölümde gösterilmişti. Kararlılık aralığının dışına çıkıldığında ise x_2^* sabit noktasının önce nötr daha sonra itici yani kararsız sabit nokta olduğu görülmektedir. Kararlılık aralığının uç parametre değerleri $\alpha_n=\frac{2}{3}$ ve $\beta_n=\frac{1}{2}$, (5.15) türev fonksiyonunda yerine yazılırsa kontrol mekanizmasının x_2^* sabit noktasındaki türevi

$$\left|I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)\left(x_2^*\right)\right|=1$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla, x_2^* sabit noktası nötr sabit noktadır. Kararlılık aralığının dışından seçilen $\alpha_n=0.67,\beta_n=0.51$ parametre değerleri için (5.16) denklemi kullanılarak x_2^* için türev fonksiyonu hesaplandığında ise

$$I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)\left(x_2^*\right)=6\times(0.67)\times(0.51)-3\times(0.67)+1=1.0402$$

elde edilir. Devaney'in kararlılık koşulu altında $\left|I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)\left(x_2^*\right)\right|=1.0402>1$ olduğunda x_2^* sabit noktası itici sabit noktadır yani kararsızdır. Dolayısıyla, sistem bu sabit noktaya yakınsamaz.

$I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)$ kontrol mekanizması, kararlılık aralığının dışında, x_2^* sabit noktasının komşuluğundaki başlangıç noktalarına göre, kontrol mekanizmasının ürettiği x_3^* ve x_4^* sabit noktalarına yakınsamaktadır. Kontrol mekanizması; $x_0<x_2^*$ başlangıç noktasına göre itere edildiğinde $x_{n+1}=I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_n)$ iterasyon dizisi $n\to\infty$ için $x_{n+1}\to x_3^*$ sabit noktasına yakınsıyor iken $x_0>x_2^*$ başlangıç noktasına göre

itere edildiğinde $x_{n+1} = I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_n)$ iterasyon dizisi $n \to \infty$ için $x_{n+1} \to x_4^*$ sabit noktasına yakınsamaktadır. Buradan kontrol mekanizmasının kaos anlamında başlangıç koşullarına hassas bağımlı olduğu söylenebilir.

Yukarıdaki açıklamalar ışığında; $\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta$ stabilite aralıklarının dışından $\alpha_n = 0.67, \beta_n = 0.51$ parametre değerleri seçilerek, (5.13)'de verilen sabit nokta denklemlerinde yerine yazılırsa

$$x_1^* = 0,\ x_2^* = 0.75,\ x_3^* = 0.7307,\ x_4^* = 0.9996$$

olacak şekilde dört tane sabit nokta elde edilir. Bu sabit noktaların ilk ikisi lojistik sistemden aktarılan sabit noktalar iken x_3^* ve x_4^* sabit noktaları kontrol mekanizmasının doğurduğu yeni sabit noktalardır ve sistemin kararlı çözümleridir. Yani, (5.15) kullanılarak türevleri hesaplandığında

$$\left|I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(0.7307)\right| = 0.9576 < 1$$
$$\left|I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(0.9996)\right| = 0.2522 < 1$$

olduğundan x_3^* ve x_4^* noktaları kararlı sabit noktalardır. Farklı başlangıç koşulları altında; kontrol mekanizmasının (5.23) iterasyon dizisi kullanılarak *Matlab* programı yardımı ile yakınsak yörüngeleri aşağıda verilmiştir.

$0.7333 = x_0 < x_2^*$ başlangıç değeri için $x_{n+1} = I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_n)$ iterasyon dizisi

$$\left(0.7333, I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(0.7333), I^2\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(0.7333), \ldots, I^{n+1}\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(0.7333), \ldots\right)$$
$$(0.7333, 0.7332, \ldots, 0.7324, 0.7323, \ldots, 0.7308, \mathbf{0.7307, 0.7307, 0.7307}, \ldots)$$

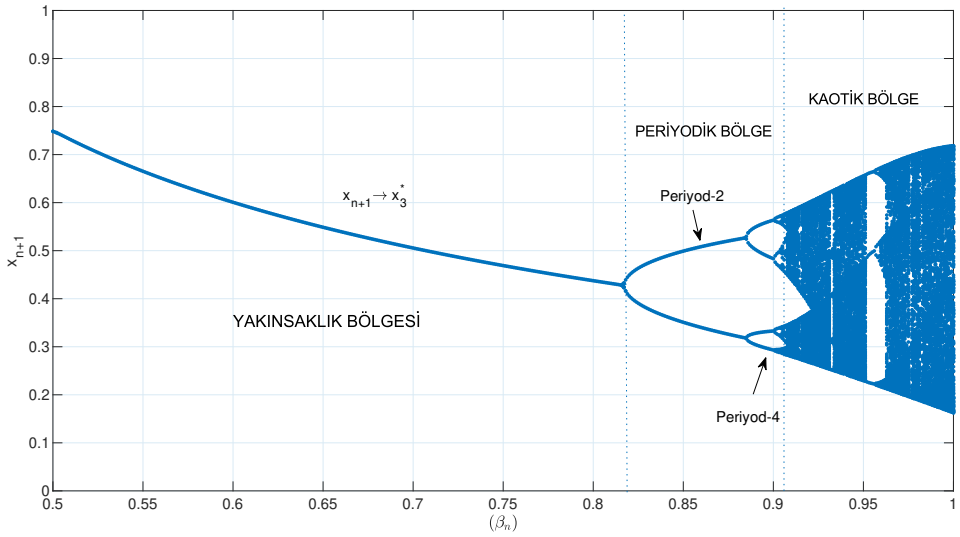
olacak şekilde bir yörünge izleyerek $x_3^* = 0.7307$ sabit noktasına yakınsıyor.

$0.8333 = x_0 > x_2^*$ başlangıç değeri için ise $x_{n+1} = I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_n)$ iterasyon dizisi

$$\left(0.8333, I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(0.8333), I^2\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(0.8333), \ldots, I^{n+1}\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(0.8333), \ldots\right)$$
$$(0.8333, 0.8465, \ldots, 0.9994, 0.9995, \ldots, \mathbf{0.9996, 0.9996, 0.9996, 0.9996}, \ldots)$$

şeklinde $x_4^* = 0.9996$ sabit noktasına yakınsamaktadır.

Belirli bir başlangıç değeri ve kontrol parametrelerine ait aralıklarda kontrol mekanizmasının yörüngelerinin dinamik davranışını ortaya koymak anlaşılabilirlik açısından önemlidir. Bu nedenle, bu kısımdan itibaren $x_0 = 0.7333$ başlangıç noktası için Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizmasının $\alpha_n = 0.67, \beta_n \in [0.5, 1)$ parametre aralığındaki dinamik davranışı incelenecektir. Ayrıca, Şekil 5.3'de verilen çatallanma grafiğinde kararlılık aralığının dışında oluşan yakınsak, periyodik ve kaotik bölgeler gösterilecektir.



Şekil 5.3 $I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)$ kontrol mekanizmasının $x_0 = 0.7333$ başlangıç noktası için $\alpha_n = 0.67, \beta_n \in [0.5, 1)$ kontrol parametre değerleri için çatallanma diyagramı

Bununla birlikte; $x_0 = 0.7333$ başlangıç noktası için kontrol mekanizmasının yörüngelerinin sistemin kararlı çözümlerine yakınsaklığı $\alpha_n = 0.67$ ve $0.5 < \beta_n < 0.8171$ kontrol parametre aralığında devam etmektedir (bkz. Şekil 5.4(a)). $\beta_n = 0.8171$ değerini aldığında sistem ilk periyodu ikiye katlayan çatallanma yapar ve sistemin yörüngesi iki kararlı çözüm arasında dolaşım yapar. Bu iki periyodlu davranış, $0.8171 \leq \beta_n < 0.8848$ kontrol parametre aralığı boyunca devam eder. Bu aralıktan $\alpha_n = 0.67$, $\beta_n = 0.8200$ parametre değerleri seçildiğinde mekanizmanın $x_0 = 0.7333$ başlangıç noktasındaki yörüngesi aşağıdaki gibi bir periyod oluşturmaktadır (bkz. Şekil 5.4(b)):

$$\left(0.7333, I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(0.7333), \ldots, I^{101}\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(0.7333), I^{102}\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(0.7333), \ldots\right)$$
$$(0.7333, 0.7116, \ldots, 0.4056, 0.4492, 0.4056, 0.4492, 0.4056, 0.4492, 0.4056, 0.4492, \ldots).$$

Periyodik yörünge tanımına göre [90]; 2-periyodlu bir periyodik noktanın varlığı için gerek ve yeter koşul $I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(r) = w$ ve $I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(w) = r$ olacak şekilde r ve w noktalarının var olmasıdır. Ayrıca, $I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)\left[I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(r)\right] = r$ ve $I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)\left[I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(w)\right] = w$ sağlandığı takdirde r ve w noktaları $I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x^*)$ dönüşümünün ikinci iterasyonunun sabit noktalarına karşılık gelir. r ve w noktalarını bulabilmek için $I^2\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x^*) = x^*$ denkleminin çözülmesi gerekmektedir. $I^2\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x^*)$ polinomu sekizinci dereceden bir polinom olduğundan bu polinomun sekiz tane kökü bulunmaktadır. Ayrıca, $I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x^*)$ dönüşümünün 2-periyodlu sabit noktaların hesaplanması için aşağıdaki denklemin köklerinin elde edilmesi gerekmektedir.

$$
\begin{aligned}
&I^2(\alpha,\beta,f_\mu)(x^*) = I(\alpha,\beta,f_\mu)\left[I(\alpha,\beta,f_\mu)(x^*)\right]\\
&= (1-\alpha_n)\,I(\alpha,\beta,f_\mu)(x^*) + 4\alpha_n\left[(1+3\beta_n)\,I(\alpha,\beta,f_\mu)(x^*) - 4\beta_n I^2(\alpha,\beta,f_\mu)(x^*)\right]\\
&\times\left[1-(1+3\beta_n)\,I(\alpha,\beta,f_\mu)(x^*) + 4\beta_n I^2(\alpha,\beta,f_\mu)(x^*)\right]\\
&= I\left(4\alpha_n\left[(1+3\beta_n)x^* - 4\beta_n x^{*2}\right]\left[1-(1+3\beta_n)x^* + 4\beta_n x^{*2}\right] + (1-\alpha_n)x^*\right)\\
&= 4\alpha_n\left[\begin{array}{l}(1+3\beta_n)\left(4\alpha\left[(1+3\beta_n)x^* - 4\beta_n x^{*2}\right]\left[1-(1+3\beta_n)x^* + 4\beta_n x^{*2}\right] + (1-\alpha_n)x^*\right) - 4\beta_n\\ \\ \times\left(4\alpha_n\left[(1+3\beta_n)x^* - 4\beta_n x^{*2}\right]\left[1-(1+3\beta_n)x^* + 4\beta_n x^{*2}\right] + (1-\alpha_n)x^*\right)^2\end{array}\right]\\
&\times\left[\begin{array}{l}1-(1+3\beta_n)\left(4\alpha_n\left[(1+3\beta_n)x^* - 4\beta_n x^{*2}\right]\left[1-(1+3\beta_n)x^* + 4\beta_n x^{*2}\right] + (1-\alpha_n)x^*\right) + 4\beta_n\\ \\ \times\left(4\alpha_n\left[(1+3\beta_n)x^* - 4\beta_n x^{*2}\right]\left[1-(1+3\beta_n)x^* + 4\beta_n x^{*2}\right] + (1-\alpha_n)x^*\right)^2\end{array}\right]\\
&+ (1-\alpha_n)\left(4\alpha_n\left[(1+3\beta_n)x^* - 4\beta_n x^{*2}\right]\left[1-(1+3\beta_n)x^* + 4\beta_n x^{*2}\right] + (1-\alpha_n)x^*\right)\\
&= x^*.
\end{aligned}
$$

$x^* \in [0,1]$ olmak üzere $\alpha_n = 0.67$, $\beta_n = 0.8200$ parametre değerleri için

$$
\begin{aligned}
&I^2(\alpha,\beta,f_\mu)(x^*) = I\left((0.33)x^* + (2.68)\left[(3.46)x^* - (3.28)x^{*2}\right]\left[1-(3.46)x^* + (3.28)x^{*2}\right]\right)\\
&= (2.68)\times\left[\begin{array}{l}(3.46)\left((2.68)\left[(3.46)x^* - (3.28)x^{*2}\right]\left[1-(3.46)x^* + (3.28)x^{*2}\right] + (0.33)x^*\right) - (3.28)\\ \\ \times\left((2.68)\left[(3.46)x^* - (3.28)x^{*2}\right]\left[1-(3.46)x^* + (3.28)x^{*2}\right] + (0.33)x^*\right)^2\end{array}\right]\\
&\times\left[\begin{array}{l}1-(3.46)\left((2.68)\left[(3.46)x^* - (3.28)x^{*2}\right]\left[1-(3.46)x^* + (3.28)x^{*2}\right] + (0.33)x^*\right) + (3.28)\\ \\ \times\left((2.68)\left[(3.46)x^* - (3.28)x^{*2}\right]\left[1-(3.46)x^* + (3.28)x^{*2}\right] + (0.33)x^*\right)^2\end{array}\right]\\
&+ (0.33)\left((2.68)\left[(3.46)x^* - (3.28)x^{*2}\right]\left[1-(3.46)x^* + (3.28)x^{*2}\right] + (0.33)x^*\right)\\
&= x^*
\end{aligned}
$$

eşitliği *Matlab* programı ile çözüldüğünde

$$
\begin{array}{cccc}
r_1 = 0 & r_2 = 0.75 & r_3 = 0.4261 & r_4 = 0.9337\\
r_5 = 0.4056 & r_6 = 0.4492 & r_7 = 0.8787 & r_8 = 0.9598
\end{array}
$$

olacak şekilde sekiz tane 2-periyodlu reel periyodik sabit noktalar elde edilir. Ancak periyodik yörüngeler hem çekici hem de itici sabit noktalar içermektedirler. Bir 2-periyodlu x^* periyodik sabit noktasının çekici veya itici olup olmadığını belirlemek için Teorem 3.4'den

$$\left|\left[I^2(\alpha,\beta,f_\mu)\right]'(x^*)\right| < 1$$

türevini hesaplamak gerekmektedir. r_1 ve r_2 değerleri f_μ lojistik sisteminden, r_3 ve r_4 de $I(\alpha,\beta,f_\mu)$ kontrol mekanizmasından gelen, $I^2(\alpha,\beta,f_\mu)$ dönüşümü için aşikar kararsız sabit noktalardır. Bu nedenle; sadece r_5, r_6, r_7, r_8 periyodik sabit noktalarının kararlılık durumları incelenecektir.

Öncelikli olarak, bu dört periyodik sabit noktanın oluşturduğu yörüngeleri belirleyelim. $x^* = r_5 = 0.4056$ ve $x^* = r_6 = 0.4492$ alındığında

$$I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(r_5) = I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(0.4056) = 0.4492 = r_6$$
$$I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(r_6) = I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(0.4492) = 0.4056 = r_5$$

olarak elde edilir. Yani, $\{r_5, r_6\}$ sabit noktaları 2-periyodlu bir yörünge oluşturmaktadır. Bu yörüngenin kararlılığı

$$\left|\left[I^2\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)\right]'(r_5)\right| = \left|I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(r_6).I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(r_5)\right| \tag{5.25}$$

denkleminin çözümü ile belirlenebilir. (5.15) türev fonksiyonu kullanılarak; r_5 ve r_6 periyodik sabit noktalarının türevleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(r_5) = I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(0.4056) = -1.2284$$
$$I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(r_6) = I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(0.4492) = -0.7495.$$

(5.25)'de bu değerler yerine yazıldığında

$$\left|\left[I^2\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)\right]'(r_5)\right| = |(-1.2284).(-0.7495)| = 0.9207 < 1$$

olduğundan $r_5 = 0.4056$ sabit noktası 2-periyodlu kararlı periyodik sabit noktadır ve $\{r_5, r_6\}$ şeklindeki yörünge, başlangıç noktası hangisi alınırsa alınsın 2-periyodlu kararlı periyodik bir yörüngedir.

Diğer periyodik noktalar $r_7 = 0.8787$ ve $r_8 = 0.9598$ periyodik sabit noktalarının oluşturduğu yörüngenin kararlılığı için benzer düşünce kullanılarak

$$\left|\left[I^2\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)\right]'\left(r_7\right)\right| = \left|I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(r_8).I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)\left(r_7\right)\right| \tag{5.26}$$

elde edilir. Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizmasının türevi altında r_7 ve r_8 sabit noktalarının değerleri

$$I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)\left(r_7\right) = I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(0.8787) = 0.4260$$
$$I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(r_8) = I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(0.9598) = -2.7208.$$

şeklinde elde edilir. Bu değerler, (5.26)'de yerine yazıldığında

$$\left|\left[I^2\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)\right]'\left(r_7\right)\right| = |(0.4260).(-2.7208)| = 1.1591 > 1$$

bulunur. Bununla birlikte, $r_7 = 0.8787$ ve $r_8 = 0.9598$ sabit noktaları 2-periyodlu kararsız periyodik sabit noktalar olduğundan bu noktaların oluşturduğu yörüngeler de kararsız olmaktadır.

Buradan, $I\left(\alpha, \beta, f_\mu\right)$ kontrol mekanizmasının r_5 ve r_6 noktaları 2-periyodlu kararlı (çekici) periyodik sabit noktaları iken r_7 ve r_8, 2-periyodlu kararsız (itici) periyodik sabit noktaları olduğu sonucuna ulaşılır ve sistem kararlı çözümlerle periyodik bir yörünge izlemektedir. Bu süreç devam ettirildiğinde $\alpha_n = 0.67$ iken $\beta_n = 0.8848$ parametre değerine ulaştığında kontrol mekanizmasında ikinci kez periyodu ikiye katlayan çatallanma meydana gelir ve yörüngeler bu kez

$$(0.7333, \ldots, 0.5240, 0.3167, 0.5296, 0.3195, 0.5240, 0.3167, 0.5296, 0.3195, \ldots)$$

şeklinde 4-periyotlu yörünge oluşturarak dört kararlı çözüm arasında salınım yapmaktadır (bkz. Şekil 5.4(c)). (β_n) kontrol parametresinin değerleri arttıkça, $\alpha_n = 0.67$ ve $0.8171 < \beta_n \leq 0.9045$ kontrol parametre aralığında $2, 4, 8, 16, \ldots$ şeklinde 2^n'nin kuvvetleri olarak periyot katlayan çatallanmalar oluşmaktadır. Son olarak, $\beta_n = 0.9046$ değeri, periyot katlayan çatallanmaların sonsuz sayıda gerçekleştiği kaosa geçişin yeri olarak belirlenir. Artık kontrol mekanizmasının yörüngeleri düzenli dalgalanmalardan tamamen düzensiz veya kararsız dalgalanmalarla kaotik bölgeye dönüşmektedir (bkz. Şekil 5.4(d)).

Lineer olmayan dinamik sistemlerde, düzenlilik halinden kaosa geçişin karakteristiğini ortaya koymak için 3-periyodlu pencereler önemli rol oynamaktadır. Sarkovskii Teoremi'ne göre [9]; sürekli bir dönüşüm 3-periyodlu bir yörüngeye sahipse her muhtemel periyotla birlikte Sarkovskii sıralamasını takip eden sonsuz tane yörünge vardır. Ayrıca Periyod-3 Teoremi [8], 3-periyodlu yörüngelerin varlığının kaosa işaret ettiğini ifade eder. Bu takdirde, $I\left(\alpha, \beta, f_\mu\right)$ kontrol mekanizmasına ait üç periyodlu yörüngenin oluşması kaotik bölgenin varlığını garanti etmektedir. Bu düşünceden hareketle, kaotik bölgede oluşan 3-periyodlu pencerenin varlığını ispatlayalım.

$I\left(\alpha, \beta, f_\mu\right)$ kontrol mekanizmasının 3-periyodlu periyodik noktalarının hesaplanması için üçüncü iterasyonun çözümlerinin elde edilmesi; yani $I^3\left(\alpha, \beta, f_\mu\right)(x^*) = x^*$ dönüşümünün sabit noktalarının bulunması gerekmektedir.

$$
\begin{aligned}
&I^3\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x^*) = I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)\left[I^2\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x^*)\right] \\
&= I\left(I(4\alpha_n\left[(1+3\beta_n)x^* - 4\beta_n x^{*2}\right]\left[1-(1+3\beta_n)x^* + 4\beta_n x^{*2}\right] + (1-\alpha_n)x^*)\right) \\
&= I\left(\begin{array}{l}
4\alpha_n\left[\begin{array}{c}(1+3\beta_n)\left(\begin{array}{c}4\alpha_n\left[(1+3\beta_n)x^* - 4\beta_n x^{*2}\right] \\ \left[1-(1+3\beta_n)x^* + 4\beta_n x^{*2}\right] + (1-\alpha_n)x^*\end{array}\right) - 4\beta_n \\ \times\left(\begin{array}{c}4\alpha_n\left[(1+3\beta_n)x^* - 4\beta_n x^{*2}\right] \\ \left[1-(1+3\beta_n)x^* + 4\beta_n x^{*2}\right] + (1-\alpha_n)x^*\end{array}\right)^2\end{array}\right] \\
\times\left[\begin{array}{c}\text{1-}(1+3\beta_n)\left(\begin{array}{c}4\alpha_n\left[(1+3\beta_n)x^* - 4\beta_n x^{*2}\right] \\ \left[1-(1+3\beta_n)x^* + 4\beta_n x^{*2}\right] + (1-\alpha_n)x^*\end{array}\right) + 4\beta_n \\ \times\left(4\alpha_n\left[(1+3\beta_n)x^* - 4\beta_n x^{*2}\right]\left[1-(1+3\beta_n)x^* + 4\beta_n x^{*2}\right] + (1-\alpha_n)x^*\right)^2\end{array}\right] \\
+(1-\alpha_n)\left(4\alpha_n\left[(1+3\beta_n)x^* - 4\beta_n x^{*2}\right]\left[1-(1+3\beta_n)x^* + 4\beta_n x^{*2}\right] + (1-\alpha_n)x^*\right)
\end{array}\right)
\end{aligned}
$$

denklemin çözümlerinin bulunması analitik olarak oldukça zor olduğundan *Matlab* programı kullanılarak gerekli hesaplamalar yapılmıştır.

$x^* \in [0,1]$ olmak üzere $\alpha_n = 0.67$, $\beta_n = 0.9545$ parametre değerleri için $I^3\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x^*) = x^*$ çözüldüğünde

$$
\begin{array}{ccccc}
w_1 = 0 & w_2 = 0.75 & w_3 = 0.3628 & w_4 = 0.9110 & w_5 = 0.2238 \\
w_6 = 0.2313 & w_7 = 0.4604 & w_8 = 0.4957 & w_9 = 0.6503 & w_{10} = 0.6632 \\
w_{11} = 0.7881 & w_{12} = 0.8070 & w_{13} = 0.8493 & w_{14} = 0.8900 & w_{15} = 0.9440 \\
w_{16} = 0.9483 & & & &
\end{array}
$$

olacak şekilde 16 tane 3-periyodlu periyodik sabit nokta elde edilir. Bu periyodik noktaların kararlı olup olmadıkları Teorem 3.4 uygulanarak belirlenmiştir. w_1 ve w_2 noktaları lojistik sistemden, w_3 ve w_4 de $I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)$ kontrol mekanizmasından gelen, $I^3\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)$ dönüşümü için aşikar olan kararsız sabit noktalardır. Diğer 12 sabit noktanın oluşturduğu periyodik yörüngelerin kararlılık durumu Devaney'in zincir kuralı Teorem 3.3 uygulanarak incelenecektir. Ayrıca, birbirleriyle periyodik yörünge izleyen sabit noktalar Tanım 3.3'e göre

$$
I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(r) = w,\ I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(w) = s,\ I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(s) = r
$$

koşulunun sağlanmasıyla belirlenmiştir.

Öncelikle, $w_5 = 0.2238$ sabit noktasının $\{w_5, w_8, w_{10}\}$ şeklindeki 3-periyodlu yörüngesinin kararlılığını belirlemek için

$$
\left|\left[I^3\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)\right]'(w_5)\right| = \left|I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(w_{10}).I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(w_8).I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(w_5)\right| \quad (5.27)
$$

denklemini hesaplamak gerekir. Bu noktaların birinci türevindeki değerleri

$$I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(w_5) = I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(0.2238) = -1.6727$$
$$I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(w_8) = I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(0.4957) = 0.1297$$
$$I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(w_{10}) = I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(0.6632) = 2.7948$$

olarak elde edilir. (5.27)'de yerine yazıldığında

$$\left|\left[I^3\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)\right]'(w_5)\right| = |(-1.6727).(0.1297).(2.7948)| = 0.6063 < 1$$

olduğundan $w_5 = 0.2238$ sabit noktası 3-periyodlu kararlı periyodik sabit noktadır ve $\{w_5, w_8, w_{10}\}$ şeklindeki yörüngedir ve başlangıç noktasının seçiminden bağımsız olarak 3-periyodlu kararlı periyodik yörüngelerdir.

Benzer şekilde, $w_6 = 0.2313$ sabit noktasının $\{w_6, w_7, w_9\}$ yörüngesi için zincir kuralı uygulanırsa

$$\left|\left[I^3\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)\right]'(w_6)\right| = \left|I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(w_9).I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(w_7).I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(w_6)\right| \quad (5.28)$$

elde edilir. Türevleri hesaplandığında

$$I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(w_6) = I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(0.2313) = -1.7988$$
$$I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(w_7) = I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(0.4604) = -0.5454$$
$$I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(w_9) = I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(0.6503) = 2.6803$$

elde edilir. (5.28)'de yerine yazıldığında

$$\left|\left[I^3\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)\right]'(w_6)\right| = |(-1.7988).(-0.5454).(2.6803)| = 2.6295 > 1$$

olduğundan $w_6 = 0.2313$ sabit noktası 3-periyodlu kararsız periyodik sabit noktadır ve $\{w_6, w_7, w_9\}$ şeklinde oluşan yörünge kararsızdır.

Aynı metotla, $w_{11} = 0.7881$ periyodik noktasının $\{w_{11}, w_{13}, w_{16}\}$ yörüngesi için

$$\left|\left[I^3\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)\right]'(w_{11})\right| = \left|I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(w_{16}).I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(w_{13}).I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(w_{11})\right| \quad (5.29)$$

denkleminin hesaplanabilmesi için her bir periyodik noktanın türevi hesaplandığında

$$I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(w_{11}) = I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(0.7881) = 2.3331$$
$$I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(w_{13}) = I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(0.8493) = 0.7137$$
$$I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(w_{16}) = I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(0.9483) = -4.5522.$$

elde edilir. (5.29)'de yerine yazıldığında

$$\left|\left[I^3\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)\right]'(w_{11})\right| = |(2.3331).(0.7137).(-4.5522)| = 7.5800 > 1$$

olduğundan $w_{11} = 0.7881$ sabit noktası 3-periyodlu kararsız periyodik sabit noktadır ve $\{w_{11}, w_{13}, w_{16}\}$ yörüngesi kararsızdır.

Son olarak, $w_{12} = 0.8070$ periyodik noktasının $\left\{w_{12}, w_{14}, w_{15}\right\}$ yörüngesi için zincir kuralı uygulandığında

$$\left|\left[I^3\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)\right]'(w_{12})\right| = \left|I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(w_{15}).I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)\left(w_{14}\right).I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(w_{12})\right|$$

denkleminin çözümü için türev değerleri

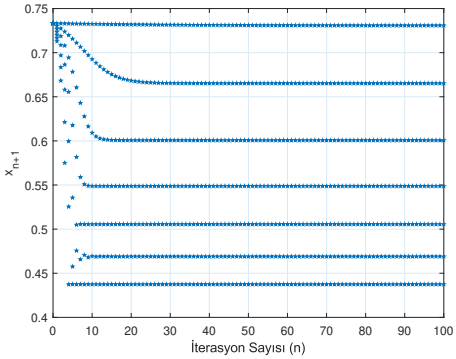
$$I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(w_{15}) = I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(0.9440) = -4.2456$$
$$I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)\left(w_{14}\right) = I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(0.8900) = -1.0174$$
$$I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(w_{12}) = I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(0.8070) = 1.9487$$

olarak elde edilir. Buradan

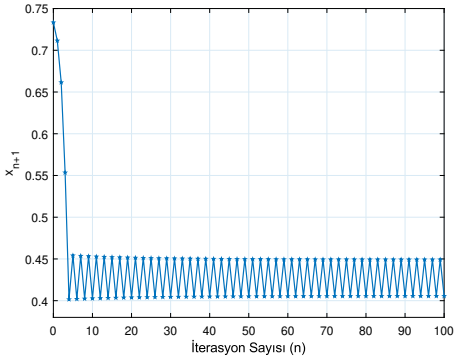
$$\left|\left[I^3\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)\right]'(w_{12})\right| = |(-4.2456).(-1.0174).(1.9487)| = 8.4174 > 1$$

olduğundan $w_{12} = 0.8070$ sabit noktası 3-periyodlu kararsız periyodik sabit noktadır ve $\left\{w_{12}, w_{14}, w_{15}\right\}$ şeklinde oluşan yörünge de kararsızdır.

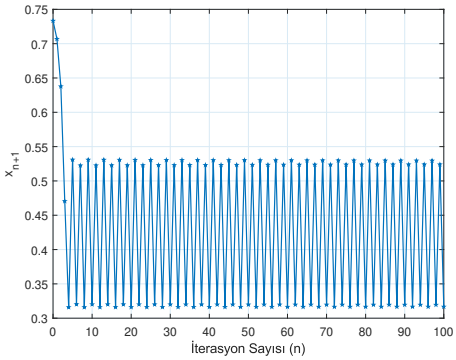
Sonuç olarak; (5.12) ile verilen Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizmasının 3-periyodlu kararlı (çekici) bir $\{w_5, w_8, w_{10}\}$ periyodik yörüngesi bulunmaktadır. Sarkovskii Teoremi'ne göre [9]; düzensizlik içinde açılan bu pencere kaotik duruma geçişi garanti etmektedir (bkz. Şekil 5.4(e)).



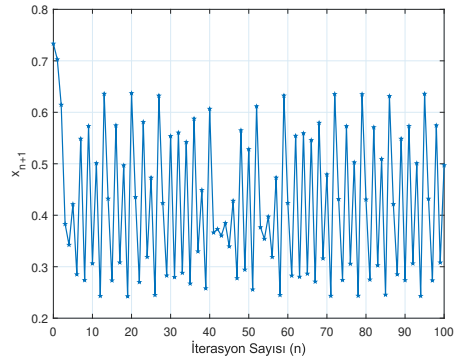
(a) $\alpha_n = 0.67$, $0.5 < \beta_n \leq 0.8171$ parametre değerleri için yakınsak yörüngeler



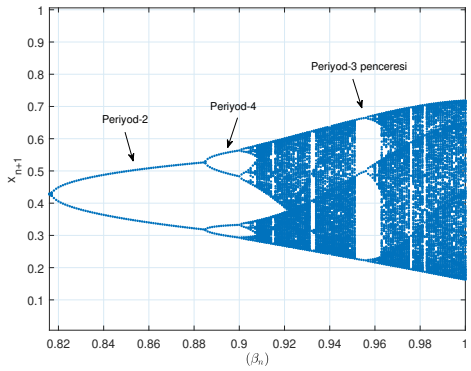
(b) $\alpha_n = 0.67$, $\beta_n = 0.8200$ parametre değeri için periyod-2 yörüngeleri



(c) $\alpha_n = 0.67$, $\beta_n = 0.8848$ parametre değeri için periyod-4 yörüngeleri



(d) $\alpha_n = 0.67$, $\beta_n = 0.9400$ parametre değeri için kararsız yörüngeler



(e) Kaotik bölgenin büyültülmüş hali

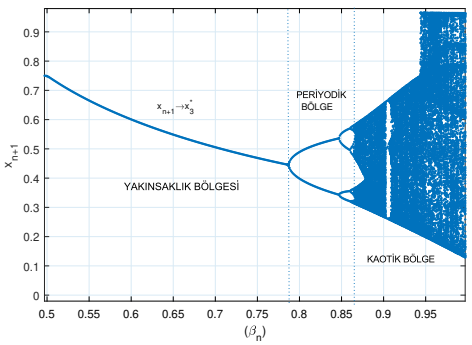
Şekil 5.4 $I\left(\alpha, \beta, f_\mu\right)$ kontrol mekanizmasının $x_0 = 0.7333$ başlangıç noktası için $\alpha_n = 0.67, \beta_n \in [0.5, 1)$ kontrol parametre değerleri için yörünge analizi

Buraya kadar Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizmasının $x_0 = 0.7333$ başlangıç noktası için $\alpha_n = 0.67$, $\beta_n \in [0.5, 1)$ kontrol parametre değerlerindeki dinamik davranışı ayrıntılı olarak incelemiştir. Yapılan hesaplamalar sonucunda; sadece $\alpha_n = 0.67$ değeri değil aynı zamanda $\alpha_n = 0.75, 0.85, 0.95$ parametre değerleri için de $\beta_n \in [0.5, 1)$ aralığındaki kontrol mekanizmasının oluşturduğu dinamik bölgelerin aralıkları belirlenmiş ve Tablo 5.1'e aktarılmıştır. Tablo 5.1'de elde edilen

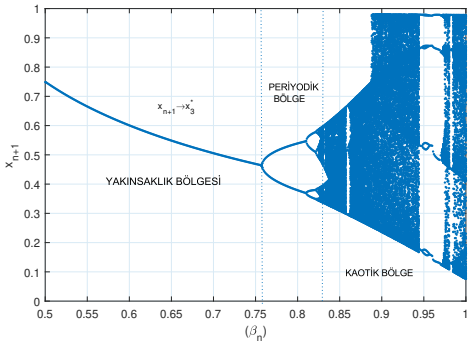
verilerin tümü Şekil 5.5'de çatallanma diyagramları ile gösterilmiştir. Çatallanma diyagramlarından görüldüğü üzere; kontrol mekanizmasının (α_n) parametre değerleri arttıkça kaos bölgesi artmakta ve kararlılık bölgesi azalmaktadır (bkz. Şekil 5.5).

Tablo 5.1 $\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta$ kararlılık aralığının dışında $I\left(\alpha, \beta, f_\mu\right)$ kontrol mekanizmasında oluşan dinamik bölgeler

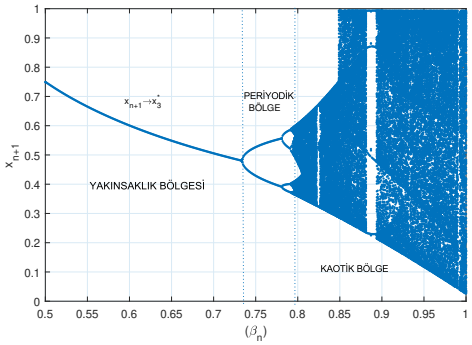
(α_n) Parametresi	(β_n) Parametresi	$I\left(\alpha, \beta, f_\mu\right)$ Kontrol Mekanizması
$0 < \alpha_n < 0.6666$	$0 < \beta_n < 0.5$	Kararlılık Bölgesi
	$0.5 < \beta_n \leq 0.8171$	Yakınsaklık Bölgesi
	$0.8171 < \beta_n \leq 0.9045$	Periyodik Bölge
$\alpha_n = 0.67$	$0.9045 < \beta_n < 1$	Kaotik Bölge
	$0.5 < \beta_n \leq 0.7874$	Yakınsaklık Bölgesi
	$0.7874 < \beta_n \leq 0.88$	Periyodik Bölge
$\alpha_n = 0.75$	$0.88 < \beta_n < 1$	Kaotik Bölge
	$0.5 < \beta_n \leq 0.7577$	Yakınsaklık Bölgesi
	$0.7577 < \beta_n \leq 0.8265$	Periyodik Bölge
$\alpha_n = 0.85$	$0.8265 < \beta_n < 1$	Kaotik Bölge
	$0.5 < \beta_n \leq 0.7339$	Yakınsaklık Bölgesi
	$0.7339 < \beta_n \leq 0.7940$	Periyodik Bölge
$\alpha_n = 0.95$	$0.7940 < \beta_n < 1$	Kaotik Bölge



(a) $\alpha_n = 0.75$, $\beta_n \in [0.5, 1)$



(b) $\alpha_n = 0.85$, $\beta_n \in [0.5, 1)$



(c) $\alpha_n = 0.95$, $\beta_n \in [0.5, 1)$

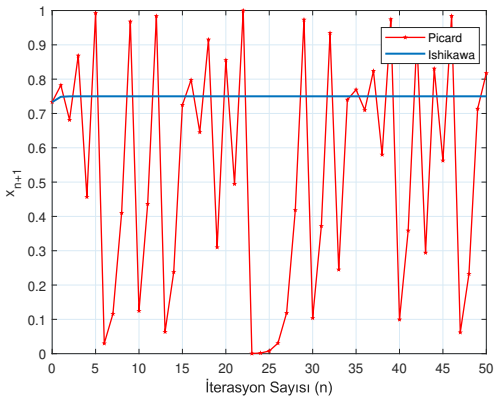
Şekil 5.5 $\alpha_n = 0.75, 0.85, 0.95$, $\beta_n \in [0.5, 1)$ kontrol parametre değerleri için çatallanma diyagramları

5.2.1.3 Ishikawa f.p.t. Kontrol Mekanizması ile Picard ve Mann İterasyonları ile Kurulan Kontrol Mekanizmalarının Kararlılık Hızlarının Karşılaştırılması

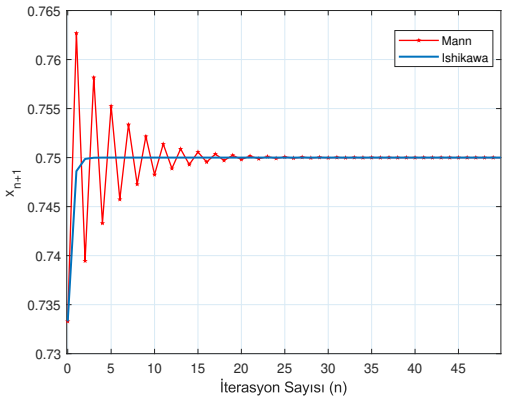
Ishikawa iterasyon yöntemi, Mann iterasyon yönteminin [86] genellemesi olarak 1974 yılında S. Ishikawa [83] tarafından tanımlanmıştır. Literatürde bir çok operatör sınıfı için genelleştirilmesi bulunan Ishikawa iterasyon yönteminin sürekli fonksiyonlar için Picard [142] ve Mann [86] iterasyon yöntemlerinden daha hızlı yakınsadığı 1976 yılında B.E. Rhoades [157] tarafından ispatlanmıştır. Bu düşünceden esinlenerek, bu bölümde iterasyon yönteminin yakınsama hızı ile kaotik fonksiyonu kararlı hale getirme hızı arasında bir ilişki olup olmadığı gösterilmeye çalışılacaktır.

$x_0 = 0.7333$ başlangıç noktasını alalım. $\Gamma_\alpha, \Gamma_{(\beta_n)}$ kararlılık aralığından $\alpha_n = 0.6$, $\beta_n = 0.25$ parametre değerleri seçilerek kaos özellikli lojistik fonksiyon Picard, Mann ve Ishikawa iterasyon yöntemleri ile kurulan kontrol mekanizmaları altında *Matlab* programı yardımıyla itere edilecektir. Elde edilen veriler Tablo 5.2'ye aktarılmıştır. Görüldüğü üzere, (5.12) Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizmasının, lojistik sistemin kararsız yörüngelerini Picard ve Mann iterasyonlarından daha hızlı kararlı hale dönüştürmektedir. Ishikawa yörüngesi ile 3. iterasyonda kararlılık sağlanırken Mann yörüngesi ancak 27. iterasyonda sistemin sabit noktasına yakınsamıştır, Picard yörüngesi ise kararlılık durumuna geçememiştir.

Şekil 5.6'de Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizması ve Picard iterasyonu altında lojistik sistemin yakınsaklık hızları gösterilmiştir. Burada Picard iterasyonunun yörüngeleri (5.11) ile verilen f_μ lojistik sistemine karşılık gelmektedir. Şekil 5.7'de ise Ishikawa [83] iterasyon yöntemi ile kurulan sabit nokta kontrol mekanizması ile Mann [86] iterasyonunun lojistik sistemi yakınsatma hızları gösterilmiştir.



Şekil 5.6 Lojistik dönüşüm altında Picard ve Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizmasının yörüngeleri



Şekil 5.7 Lojistik dönüşüm altında Mann ve Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizmasının yörüngeleri

Tablo 5.2 $x_0 = 0.7333$, $\alpha_n = 0.6, \beta_n = 0.25$ için Picard, Mann ve Ishikawa iterasyonları ile kurulan dinamik sistemlerin ilk 30 iterasyonu

n	Picard	Mann	Ishikawa	n	Picard	Mann	Ishikawa
1	0.7333	0.7333	0.7333	16	0.7249	0.7506	0.7500
2	0.7823	0.7627	0.7486	17	0.7977	0.7495	0.7500
3	0.6813	0.7395	0.7499	18	0.6455	0.7504	0.7500
4	0.8686	0.7582	**0.7500**	19	0.9154	0.7497	0.7500
5	0.4566	0.7433	0.7500	20	0.3099	0.7502	0.7500
6	0.9925	0.7552	0.7500	21	0.8555	0.7498	0.7500
7	0.0299	0.7457	0.7500	22	0.4945	0.7501	0.7500
8	0.1160	0.7534	0.7500	23	0.9999	0.7499	0.7500
9	0.4103	0.7473	0.7500	24	4,83E+00	0.7501	0.7500
10	0.9678	0.7522	0.7500	25	0.0019	0.7499	0.7500
11	0.1247	0.7483	0.7500	26	0.0077	0.7501	0.7500
12	0.4365	0.7514	0.7500	27	0.0306	**0.7500**	0.7500
13	0.9839	0.7489	0.7500	28	0.1187	0.7500	0.7500
14	0.0635	0.7509	0.7500	29	0.4184	0.7500	0.7500
15	0.2377	0.7493	0.7500	30	0.9734	0.7500	0.7500

Sonuç 5.2. *Ishikawa iterasyonu ile kurulmuş kaos kontrol mekanizması kaotik özellikli f_μ lojistik sistemini aynı kararlılık aralıklarında Berinde [71] ve Ashish vd. [72] tarafından çalışılmış olan Mann iterasyon yöntemi ile kurulan kaos kontrol mekanizmasından daha hızlı kararlı hale dönüştürerek sabit noktaya yakınsak hale getirmektedir. Ancak iterasyonların hız özellikleri kaos kontrol aralıklarında kalıtsal özellik olarak varlığını sürdürmektedir.*

5.3 Kararsız Periyodik Noktaların Stabilize Edilmesi

Dinamik sistemlerin periyodik noktaları bilimsel çalışmaların uygulama alanları için büyük önem taşımaktadır. Ancak periyodik yörüngeler, yani yüksek dereceli sabit noktalar için dinamik sistemlere ait genel özellikler sağlanmamaktadır. f_μ orijinal sistemi ile $I\left(\alpha, \beta, f_\mu\right)$ kontrol mekanizmasının periyodik noktaları arasında bire-bir eşleme olmasına rağmen bu periyodik noktaların bulundukları yerler farklıdır. Bunun sebebi, k birden büyük ise $x^{*(k)} = f_\mu^k(x^{*(k)})$ ve $x^{*(k)} = I^k\left(\alpha, \beta, f_\mu\right)(x^{*(k)})$ denklemlerinin çözümlerinin aynı olmamasından kaynaklanır. Çoğu uygulamada bu durum kabul edilebilir olsa da orijinal periyodik yörüngelerin tercih edildiği durumlar vardır. Bu bağlamda, tüm yörüngelerin istenen periyodik yörüngeye yakınsamasını sağlamak için büyümeye bağlı sabit nokta kontrol mekanizmasının düzenlenmesi gerekmektedir. Bu düşünceden hareketle; bu bölümde, Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizması periyodik yörüngeler için yeniden tanımlanmış ve kararsız periyodik noktaların stabilize edilmesi için gerekli koşullar üzerinde durulmuştur.

Kabul edelim ki; $x \in [a,b]$ olsun ve $f_\mu^m = \underbrace{f_\mu \circ f_\mu \circ \cdots \circ f}_{m \text{ defa}}$ bileşkesi f_μ fonksiyonunun m. tekrarını göstersin. $(\alpha_n),(\beta_n) \subset [0,1]$ kontrol parametreleri olmak üzere büyümeye bağlı Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizması m-periyodlu periyodik yörüngeler için aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$x_{n+1} = I_{(m)}\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_n) \equiv (1-\alpha_n)\,x_n + \alpha_n f_\mu^m\left[(1-\beta_n)\,x_n + \beta_n f_\mu^m(x_n)\right]. \quad (5.30)$$

Burada, $I_{(m)}\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)$ kontrol mekanizmasının sabit noktalar kümesi f_μ^m orijinal sistemi ile aynıdır. Ayrıca, uygun $(\alpha_n),(\beta_n)$ kontrol parametre seçimiyle (5.30) ile verilen sabit nokta kontrol mekanizması f_μ'den gelen kararlı m-periyodlu periyodik yörüngelere yol açmaktadır. Teorem 5.1 ve Teorem 5.2'de sağlanan benzer argumanlarla, bir-boyutlu diskrit dinamik sistemin kararsız periyodik noktalarının kararlılığını doğrulamak için bazı önemli sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Teorem 5.3. *(5.30) ile verilen Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizması, f_μ^m orijinal sistemi ile aynı reel m-periyodlu periyodik sabit noktalar kümesine sahiptir. Yani, $x^* \in [a,b]$ için $f_\mu^m(x^*) = x^*$ ise $I_{(m)}\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x^*) = x^*$ dır. Tersi, $y_n = x^*$ koşulu altında, her zaman doğrudur.*

İspat. $x^* \in [a,b]$, f_μ orijinal sisteminin m-periyodlu periyodik bir sabit noktası olsun, yani $f_\mu^m(x^*) = x^*$ dır. (5.30) ile verilen Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizması x^* periyodik sabit noktası için hesaplanırsa

$$\begin{aligned} I_{(m)}\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x^*) &= (1-\alpha_n)\,x^* + \alpha_n f_\mu^m\left[(1-\beta_n)\,x^* + \beta_n f_\mu^m(x^*)\right] \\ &= (1-\alpha_n)\,x^* + \alpha_n f_\mu^m\left[(1-\beta_n)\,x^* + \beta_n x^*\right] \\ &= (1-\alpha_n)\,x^* + \alpha_n f_\mu^m(x^*) + (1-\alpha_n)\,x^* \\ &= x^* + \alpha_n(x^* - x^*) \\ &= x^* \end{aligned}$$

elde edilir, yani $I_{(m)}\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x^*) = x^*$ olur. Buradan, x^* sabit noktasının $I_{(m)}\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)$ kontrol mekanizmasının m-periyodlu periyodik sabit noktası olduğu görülür.

Tersine, $x^* \in [a,b]$ noktası (5.30) ile verilen kontrol mekanizmasının m-periyodlu periyodik reel bir sabit noktası olsun. Teoremin hipotezinde verilen $y_n = x^*$ koşulu

altında $I_{(m)}\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x^*)=x^*$ ise

$$\begin{aligned}
&(1-\alpha_n)\,x^*+\alpha_n f_\mu^m\left[(1-\beta_n)\,x^*+\beta_n f_\mu^m(x^*)\right]=x^*\\
&(1-\alpha_n)\,x^*+\alpha_n f_\mu^m(x^*)=x^*\\
&\alpha_n\left(f_\mu^m(x^*)-x^*\right)=0
\end{aligned}$$

elde edilir. $\alpha_n\in(0,1)$ olduğundan $f_\mu^m(x^*)=x^*$ dır. Dolayısıyla, x^* sabit noktası f_μ orijinal sisteminin m-periyodlu periyodik bir sabit noktasıdır. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 5.4. *$x^*\in[a,b]$ noktası, f_μ bir-boyutlu diskrit dinamik sistemin m-periyodlu kararsız periyodik bir sabit noktası olsun. $\left|f_\mu^{m\prime}(x^*)\right|\neq 1$ olmak üzere (5.30) ile verilen Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizmasının*

$$\left|I'_{(m)}\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x^*)\right|<1$$

kararlılık koşulunu sağlayan $(\alpha_n),(\beta_n)\subset(0,1)$ kontrol parametrelerinin uygun bir aralığını bulmak her zaman mümkündür. Diğer bir ifadeyle, f_μ orijinal sisteminin x^* kararsız m-periyodlu periyodik sabit noktasını kararlı hale dönüştüren $\alpha_n\in\Gamma_\alpha=(\min\{\alpha_n\},\max\{\alpha_n\})$, $\beta_n\in\Gamma_\beta=(\min\{\beta_n\},\max\{\beta_n\})$ şeklinde uygun kontrol parametre aralıkları her zaman vardır.

İspat. Teoremin hipotezinde verilen kararlılık koşulunun sağlanması için $I_{(m)}\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)$ kontrol mekanizmasının türev fonksiyonunun elde edilmesi gerekmektedir. (5.30) ile verilen denklemin türevi alındığında

$$I'_{(m)}\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_n)=1-\alpha_n+\alpha_n f_\mu^{m\prime}\left[(1-\beta_n)\,x_n+\beta_n f_\mu^{m\prime}(x_n)\right]\left[1-\beta_n+\beta_n f_\mu^{m\prime}(x_n)\right]$$

elde edilir. x^* periyodik sabit noktası için hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
I'_{(m)}\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x^*)&=1-\alpha_n+\alpha_n f_\mu^{m\prime}\left[(1-\beta_n)\,x^*+\beta_n f_\mu^{m\prime}(x^*)\right]\left[1-\beta_n+\beta_n f_\mu^{m\prime}(x^*)\right]\\
&=1-\alpha_n+\alpha_n f_\mu^{m\prime}(x^*)\left[1+\beta_n\left(f_\mu^{m\prime}(x^*)-1\right)\right]
\end{aligned}$$

türev denklemi bulunur. x^* periyodik sabit noktası için $\left|f'_\mu(x^*)\right|>1$ koşulu altında $I'_{(m)}\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x^*)<1$ ve $I'_{(m)}\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x^*)>-1$ kararlılık durumları ayrı ayrı incelendiğinde ispatın geri kalan kısmı Teorem 5.2'nin ispatına benzerdir.

Aynı düşünceyle gerekli işlemler yapıldığında

$$\Gamma_\alpha = (\min\{\alpha_n\}, \max\{\alpha_n\}) = \left(0, \min\left\{\frac{-2}{f_\mu^{m\prime}(x^*)\left[1+\beta_n\left(f_\mu^{m\prime}(x^*)-1\right)\right]-1}\right\}\right), \tag{5.31}$$

$$\Gamma_\beta = (\min\{\beta_n\}, \max\{\beta_n\}) = \left(\max\left\{\left[\frac{1-f_\mu^{m\prime}(x^*)}{f_\mu^{m\prime}(x^*)} - \frac{2}{\alpha_n f_\mu^{m\prime}(x^*)}\right]\frac{1}{f_\mu^{m\prime}(x^*)-1}\right\}, \frac{-1}{f_\mu^{m\prime}(x^*)}\right)$$

kararlılık aralıkları elde edilir. Bu takdirde, kararsız m-periyodlu bir periyodik sabit nokta, Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizmasının kontrol parametreleri ile belirlenen bir aralıkta kararlı hale dönüştürülmüş olur. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sonuç 5.3. *Teorem 5.4'de $\beta_n = 0$ olarak alındığında, tek adımlı Mann iterasyon yöntemi [86] ile kurulan sabit nokta kontrol mekanizmasının [71, 72] belirlediği, kararsız m-periyodlu periyodik sabit noktaları kararlı hale dönüştüren kontrol parametre aralıkları elde edilir.*

5.3.1 Lojistik Sistemin Kararsız Periyodik Noktalarının Stabilize Edilmesi

Bölüm 5.2.1'de incelenen bir-boyutlu dinamik sistem olarak (5.11) ile verilen f_μ lojistik sistemini ele alalım. Tamamen kaotik davranışa sahip olan lojistik sistemin sonsuz sayıda kararsız periyodik sabit noktası vardır. Bu sebepten dolayı, daha basit olarak bu bölümde 2-periyotlu periyodik sabit noktaların stabilize edildiği durumlar ele alınacaktır.

İlk olarak, f_μ lojistik sisteminin 2-periyodlu periyodik sabit noktalarını belirleyelim. Bunun için, dördüncü dereceden $f_\mu^2(x^*) = f_\mu\left[f_\mu(x^*)\right] = x^*$ denkleminin çözülmesi gerekmektedir. Buradan

$$\begin{aligned} &f_\mu[4x^*(1-x^*)] = x^* \\ &16x^*(1-x^*)\left(4x^{*2}-4x^*+1\right) = x^* \\ &16x^*(1-x^*)\left(4x^{*2}-4x^*+1\right) - x^* = 0 \end{aligned}$$

denklemi *Mathematica* programı yardımıyla çözüldüğünde; $x_1^* = 0,\ x_2^* = \frac{3}{4}$ olacak şekilde iki tane lojistik sistemden gelen aşikar kararsız sabit noktalar ile

$$x_1^{*(2)} = \frac{5-\sqrt{5}}{8},\ x_2^{*(2)} = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$$

olacak şekilde iki tane aşikar olmayan 2-periyodlu periyodik sabit nokta elde edilir. Bu sabit noktaların kararlı olup olmadıklarını test etmek için $f_\mu^2(x^*)$ dönüşümünün türevi alınırsa

$$f_\mu^{2'}(x^*) = 16(1-2x^*)\left(8x^{*2}-8x^*+1\right)$$

elde edilir. $x_1^{*(2)}$ ve $x_2^{*(2)}$ sabit noktaları yerine yazılıp hesaplandığında

$$f_\mu^{2'}(x_1^{*(2)}) = f_\mu^{2'}(x_2^{*(2)}) = -4 < -1$$

elde edilir. Dolayısıyla, $x_1^{*(2)}$ ve $x_2^{*(2)}$ sabit noktaları 2-periyotlu kararsız periyodik sabit noktalardır.

(5.30) ile tanımlı $I_{(m)}\left(\alpha, \beta, f_\mu\right)$ kontrol mekanizması $m = 2$ için aşağıdaki şekilde yeniden tanımlansın:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= I_{(2)}\left(\alpha, \beta, f_\mu\right)(x_n) \equiv (1-\alpha_n)\, x_n + \alpha_n f_\mu^2\left[(1-\beta_n)\, x_n + \beta_n f_\mu^2(x_n)\right] \\ &= (1-\alpha_n)\, x_n + \alpha_n f_\mu^2\left[(1-\beta_n)\, x_n + 16\beta_n x_n (1-x_n)\left(4x_n^2 - 4x_n + 1\right)\right] \\ &= (1-\alpha_n)\, x_n + 16\alpha_n\left[(1-\beta_n)\, x_n + 16\beta_n x_n (1-x_n)\left(4x_n^2 - 4x_n + 1\right)\right] \\ &\times \left[1 - \left((1-\beta_n)\, x_n + 16\beta_n x_n (1-x_n)\left(4x_n^2 - 4x_n + 1\right)\right)\right] \\ &\times \begin{bmatrix} 4\left((1-\beta)\, x_n + 16\beta x_n (1-x_n)\left(4x_n^2 - 4x_n + 1\right)\right)^2 \\ -4\left((1-\beta)\, x_n + 16\beta x_n (1-x_n)\left(4x_n^2 - 4x_n + 1\right)\right) + 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Teorem 5.4'ün ispatında elde edilen ve (5.31) ile verilen kontrol parametre aralıkları kullanılarak 2-periyodlu $x_1^{*(2)} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$ kararsız periyodik sabit noktası için kararlılık aralığı aşağıdaki şekilde elde edilmiştir:

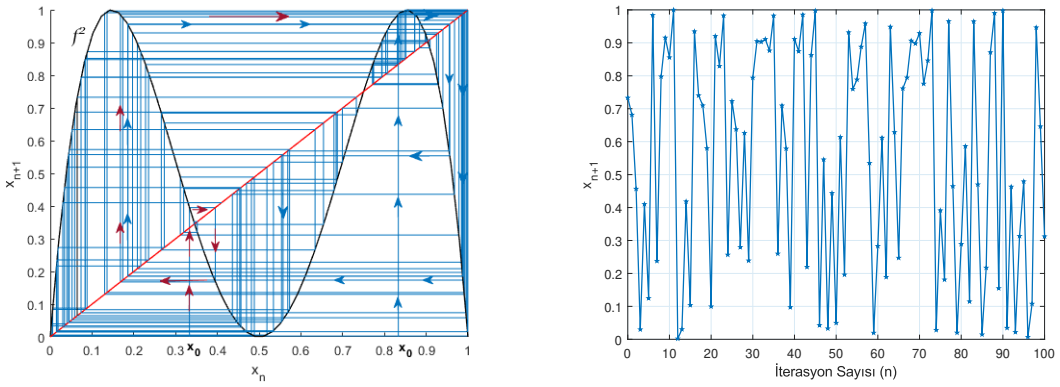
$$\Gamma_\alpha = \left(0, \min\left\{\frac{-2}{f_\mu^{2'}\left(x_1^{*(2)}\right)\left[1 + \beta_n\left(f_\mu^{2'}\left(x_1^{*(2)}\right) - 1\right)\right] - 1}\right\}\right) = \left(0, \frac{2}{5}\right) \tag{5.33}$$

$$\Gamma_\beta = \left(\max\left\{\left[\frac{1 - f_\mu^{2'}\left(x_1^{*(2)}\right)}{f_\mu^{2'}\left(x_1^{*(2)}\right)} - \frac{2}{\alpha_n f_\mu^{2'}\left(x_1^{*(2)}\right)}\right]\frac{1}{f_\mu^{2'}\left(x_1^{*(2)}\right) - 1}\right\}, \frac{-1}{f_\mu^{2'}\left(x_1^{*(2)}\right)}\right) = \left(0, \frac{1}{4}\right).$$

$f_\mu^{2'}(x_1^{*(2)}) = f_\mu^{2'}(x_2^{*(2)}) = -4$ olduğundan $x_2^{*(2)} = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$ periyodik sabit noktası için de aynı kararlılık aralığı elde edilir.

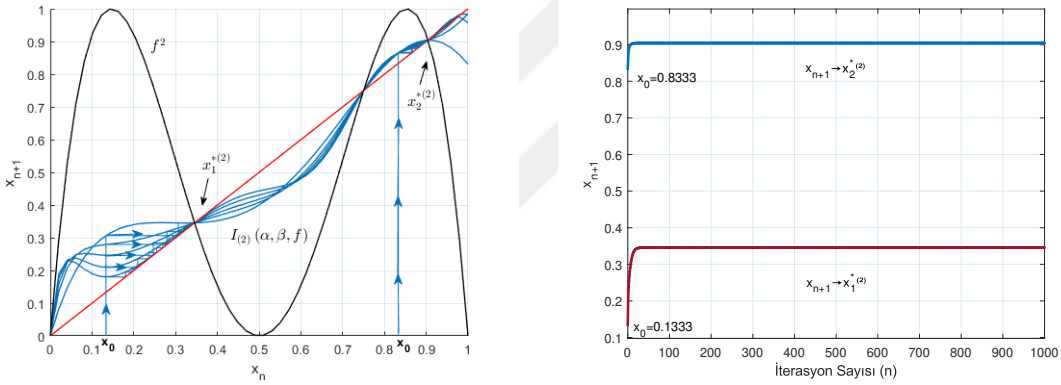
Yukarıda belirlenen kararlılık aralıkları için bilgisayar simülasyonlarıyla yapılan çizimler aşağıda verilmiştir. Şekil 5.8'de $x_{n+1} = f_\mu^2(x_n)$ sisteminin 2-periyodlu kararsız olan $x_1^{*(2)}$ ve $x_2^{*(2)}$ periyodik sabit noktaları için cobweb diyagramı ile itici yörüngeleri çizilerek yörünge diyagramı ile kararsız yörüngelerin davranışı gösterilmiştir. Daha sonra, (5.33) ile verilen kararlılık aralığından $\alpha_n = \beta_n = 0.2$ kontrol parametre değerleri seçilerek, $I_{(2)}\left(\alpha, \beta, f_\mu\right)$ kontrol mekanizması altında $x_0 = 0.1333$, $x_0 = 0.8333$ başlangıç noktaları için sistem itere edilmiştir. Şekil 5.9'da görüldüğü üzere; kontrol mekanizması $x_1^{*(2)}$ ve $x_2^{*(2)}$ itici sabit noktalarını çekici hale getirmiştir. Ayrıca, $x_0 = 0.1333$ başlangıç noktası için itere edildiğinde mekanizmanın $x_1^{*(2)} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$

periyodik sabit noktasına yakınsadığı; $x_0 = 0.8333$ başlangıç noktası için ise $x_2^{*(2)} = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$ periyodik sabit noktasına yakınsadığı görülmektedir.



(a) Cobweb diyagramı **(b)** Kararsız yörüngeler

Şekil 5.8 $x_{n+1} = f_\mu^2(x_n)$ sisteminin $x_1^{*(2)}$ ve $x_2^{*(2)}$ periyodik sabit noktalarının itici ve kararsız yörünge davranışı



(a) Cobweb diyagramı **(b)** Kararlı yörüngeler

Şekil 5.9 $x_{n+1} = f_\mu^2(x_n)$ sisteminin $x_1^{*(2)}$ ve $x_2^{*(2)}$ periyodik sabit noktalarının $I_{(2)}(\alpha,\beta,f_\mu)$ kontrol mekanizması ile çekici ve kararlı hale getirilmesi

Şimdi, f_μ lojistik sistemi için kararsız olan 2-periyodlu $x_1^{*(2)}$ ve $x_2^{*(2)}$ periyodik sabit noktalarının (5.33) kararlılık aralığından seçilen $\alpha_n = \beta_n = 0.2$ kontrol parametre değerleri için kararlı çözümler olduklarını analitik olarak ispatlayalım. Tanım 3.4'e göre; seçilen parametre değerlerinde periyodik sabit noktaların kararlı olduğunu göstermek için

$$\left|I'_{(2)}(\alpha,\beta,f_\mu)(x_1^{*(2)})\right| < 1, \quad \left|I'_{(2)}(\alpha,\beta,f_\mu)(x_2^{*(2)})\right| < 1$$

kararlılık şartının sağlanması gerekmektedir. 2-periyodlu yörüngeler gerekli işlemler

yapıldığında

$$\left|I'_{(2)}\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_1^{*(2)})\right| = \left|I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_2^{*(2)}).I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_1^{*(2)})\right|$$
$$\left|I'_{(2)}\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_2^{*(2)})\right| = \left|I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_1^{*(2)}).I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_2^{*(2)})\right| \tag{5.34}$$

elde edilir. (5.15) ile verilen türev denklemi $x_1^{*(2)}$ ve $x_2^{*(2)}$ periyodik sabit noktaları için aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır:

$$\begin{aligned} I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_1^{*(2)}) &= 4\times(0.2)\times\left[1+3\times(0.2)-8\times(0.2)\times\left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)\right] \\ &\quad\times\left[1-2\times(1+3\times(0.2))\times\left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)+8\times(0.2)\times\left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)^2\right]+1-(0.2) \\ &= 0.8715. \end{aligned} \tag{5.35}$$

$$\begin{aligned} I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_2^{*(2)}) &= 4\times(0.2)\times\left[1+3\times(0.2)-8\times(0.2)\times\left(\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)\right] \\ &\quad\times\left[1-2\times(1+3\times(0.2))\times\left(\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)+8\times(0.2)\times\left(\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)^2\right]+1-(0.2) \\ &= 0.6062. \end{aligned} \tag{5.36}$$

(5.35) ve (5.36) türev değerleri (5.34)'da yerine yazılırsa

$$\left|I'_{(2)}\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_1^{*(2)})\right| = \left|I'_{(2)}\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_2^{*(2)})\right| = |0.8715\times 0.6062| = 0.5283 < 1$$

elde edilir. Dolayısıyla, $x_1^{*(2)}$ ve $x_2^{*(2)}$ 2-periyodlu periyodik sabit noktaları kararlıdır.

5.4 Ishikawa İterasyon Yöntemi için Lyapunov Üsteli

Bu bölümde, Ishikawa iterasyon yöntemi [83] ile elde edilen Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizmasının sabit ve periyodik yörüngelerinin kararlılığı Lyapunov üsteli tekniği kullanılarak gösterilmiştir. Bölüm 4.4'de n-adımlı iterasyon yöntemlerinin genellemesi olarak Multistep iterasyon yöntemi [85] için Lyapunov üstelinin formülasyonu elde edilmiştir. n-adımlı iterasyon yöntemleri için (4.16) olarak tanımlanan Lyapunov üsteli iki adımlı Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizması için aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left|I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_k)\right|. \tag{5.37}$$

x_1 sabit yörüngesi için Lyapunov üsteli

$$\lambda = \ln\left|I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_1)\right| \tag{5.38}$$

eşitliğine indirgenir.

Bölüm 5.2.1 ve Bölüm 5.3.1'de incelenen kaos özellikli lojistik fonksiyonun kararsız sabit noktalarının ve kararsız periyodik noktalarının stabilitesi için elde edilen sonuçlar göz önüne alınarak; aynı parametre aralıklarında Lyapunov üstellerini belirleyerek kaostan düzene geçişi gösterelim.

a) $x_2^* = 0.75$ **sabit noktası için Lyapunov üsteli:**

x_2^* sabit yörüngesi için Lyapunov üsteli, (5.38) kullanılarak aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\lambda = \ln \left| I'\left(\alpha, \beta, f_\mu\right)(x_2^*) \right| \tag{5.39}$$

(5.20) ile verilen $\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta$ kararlılık aralıklarından $\alpha_n = 0.4$ ve $\beta_n = 0.25$ parametre değerlerini seçelim. (5.15) denklemi kullanılarak x_2^* sabit noktasının türevi aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} I'\left(\alpha, \beta, f_\mu\right)(x_2^*) &= 1-(0.4)+4\times(0.4)\times[1+3\times(0.25)-8\times(0.25)\times(0.75)] \\ &\quad \times\left[1-2\times(1+3\times 0.25)\times(0.75)+8\times(0.25)\times(0.75)^2\right] \\ &= 0.4. \end{aligned}$$

Elde edilen türev, (5.39)'de yerine yazılırsa Laypunov üsteli

$$\lambda = \ln \left| I'\left(\alpha, \beta, f_\mu\right)(x_2^*) \right| = \ln \left| I'\left(\alpha, \beta, f_\mu\right)(0.75) \right| = \ln|0.4| = -0.9163$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla, $\lambda = -0.9163 < 0$ olduğundan yani Lyapunov üsteli negatif bir değer iken, Lyapunov üstelinin tanımı [53] gereğince; $x_2^* = \frac{3}{4}$ sabit noktası kararlıdır.

b) $x_1^{*(2)} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$, $x_2^{*(2)} = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$ **periyodik noktaları için Lyapunov üsteli:**

(5.37) denklemi kullanılarak, $x_1^{*(2)}$ ve $x_2^{*(2)}$ periyodik yörüngeleri için Lyapunov üsteli şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$\lambda = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2} \ln \left| I'\left(\alpha, \beta, f_\mu\right)(x_k^{(2)}) \right|. \tag{5.40}$$

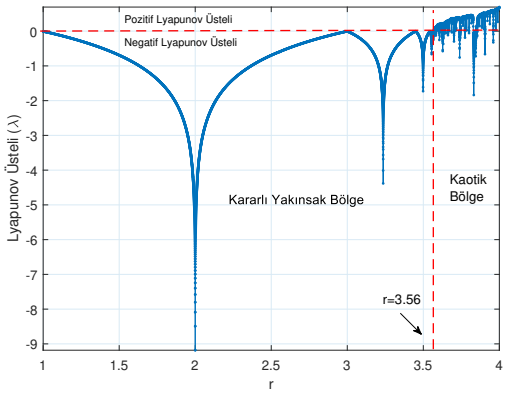
(5.33) ile verilen $\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta$ kararlılık aralıklarından $\alpha_n = \beta_n = 0.2$ değerleri seçilsin. $x_1^{*(2)}$ ve $x_2^{*(2)}$ periyodik sabit noktalarının kontrol mekanizmasındaki türevleri önceki bölümde (5.35) ve (5.36)'de hesaplanmıştı. (5.40) denkleminde yerine yazıldığında

Lyapunov üsteli

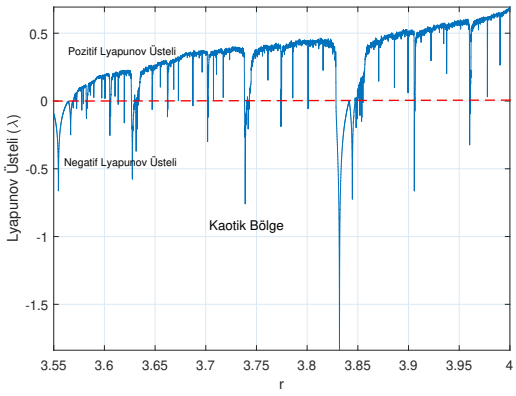
$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\ln\left|I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_k^{(2)})\right| \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\left|I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_1^{*(2)})\right| + \ln\left|I'\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x_2^{*(2)})\right|\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln|0.8715| + \ln|0.6062|\right) = \frac{1}{2}\left(-0.1375 - 0.5005\right) \\ &= -0.6380\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. $\lambda = -0.6380 < 0$ olduğundan yani Lyapunov üsteli negatif bir değer iken, Lyapunov üstelinin tanımı [53] gereğince; $x_1^{*(2)} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$, ve $x_2^{*(2)} = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$ periyodik sabit noktaları kararlıdır.

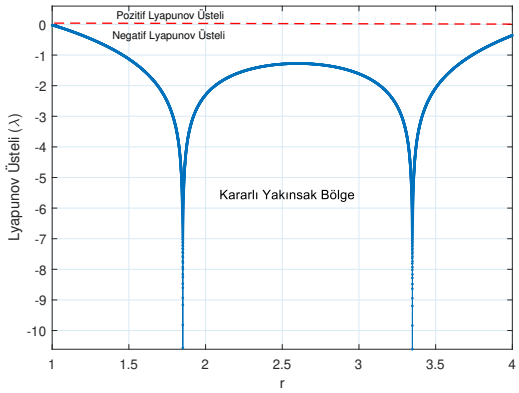
Şimdi, (5.3) ile verilen Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizması altında $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$ standart lojistik sisteminin kararlılık durumunu Lyapunov üsteli diyagramlarıyla inceleyelim. $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$ lojistik sisteminin $\mu \in [1,4]$ aralığı için Lyapunov üsteli diyagramı Şekil 5.10'de verilmiştir. Görüldüğü üzere, $\mu = 3.569$ büyüme oranı parametre değerinde lojistik sistemin başlangıç koşullarına hassas bağımlılığı artmakta ve Lyapunov üsteli negatiften pozitife geçerek kaotik bölgeyi oluşturmaktadır. $\mu \in [3.55,4]$ aralığı için Lyapunov üstelinin pozitif olduğu kaotik bölgenin büyültülmüş durumu Şekil 5.11'de gösterilmiştir. $\mu = 4$ olduğunda $f_\mu(x) = 4x(1-x)$ lojistik sisteminin x_2^* kararsız yörüngesi, (5.3) Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizmasının belirlediği kontrol parametre aralıklarında Lyapunov üsteli ile kararlı hale dönüştürüldüğü analitik olarak yukarıdaki **(a)** maddesi ile ispatlanmıştır. Buradan, $\alpha_n = 0.4$, $\beta_n = 0.25$ kontrol parametre değerleri için $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$ lojistik dönüşümünün $\mu \in [3.569,4]$ aralığında pozitif olan Lyapunov üstelinin negatife dönüştüğü ve kaotik bölgenin kararlı bölgeye indirgendiği Şekil 5.12'deki diyagramda açık olarak görülmektedir. Şekil 5.13'de ise **(b)**'de ispatı verilen, $\alpha_n = \beta_n = 0.2$ kontrol parametre değerleri için $f_\mu(x) = 4x(1-x)$ lojistik dönüşümünün $x_1^{*(2)}$ ve $x_2^{*(2)}$ kararsız 2-periyodlu periyodik yörüngelerinin Lyapunov üstellerinin negatif, yani kararlı bölge oluşturduğu gösterilmiştir.



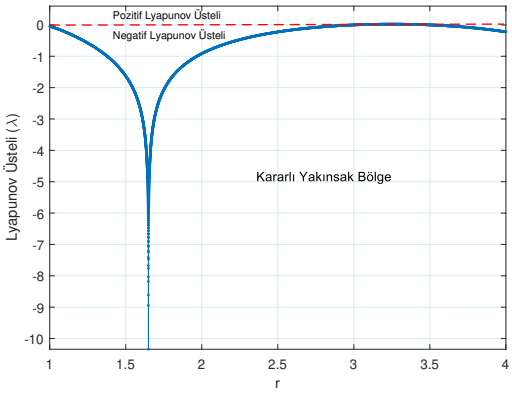
Şekil 5.10 $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$ lojistik sisteminin $\mu \in [1,4]$ aralığındaki Lyapunov üsteli diyagramı



Şekil 5.11 $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$ lojistik sisteminin $\mu \in [3.55,4]$ aralığındaki kaotik bölgenin büyültülmüş hali



Şekil 5.12 $I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)$ kontrol mekanizmasının $\alpha_n = 0.4$, $\beta_n = 0.25$ için $\mu \in [1,4]$ aralığındaki Lyapunov üsteli diyagramı



Şekil 5.13 $I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)$ kontrol mekanizmasının $\alpha_n = \beta_n = 0.2$ için $\mu \in [1,4]$ aralığındaki Lyapunov üsteli diyagramı

5.5 Uygulama: Trafik Akış Modellerinin Ishikawa İterasyon Yöntemi ile Kaos Kontrolü

Literatürde trafik modelleri üzerine makroskobik ve mikroskobik olmak üzere iki farklı bakış açısı geliştirilmiştir. Kaotik bir dinamik trafik modeli trafik akışının kararsız ve tahmin edilemez olduğu anlamına gelmektedir. Trafik akışı bir dış parametredeki değişiklikler sonucunda kaotik hale gelir ve bu sebepten trafik akışında ortaya çıkan kaosun kontrol edilmesi gereklilik haline gelir. Mikroskobik açıdan bakıldığında bu etki her bir aracın hızı ve bulunduğu pozisyona karşılık gelirken; makroskobik açıdan bakıldığında trafik akışının hızı ve yoğunluğu olarak düşünülebilir. Bizim çalışmamız makroskobik trafik akışı modeli üzerinde yoğunlaşmaktadır.

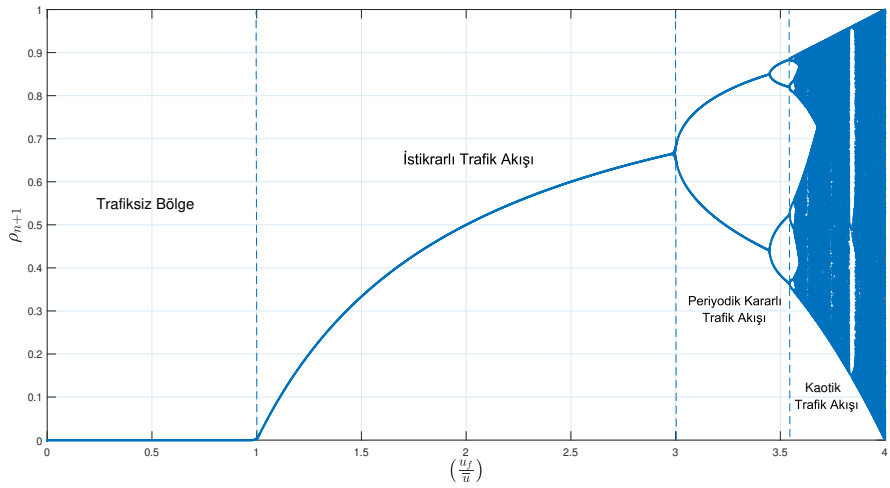
Cho [158] ve Chung [159], Tayvan'daki Sun Yat-sen karayolu üzerinde kontrol parametresinin etkisiyle birlikte kaotik trafik akışını araştırmışlardır ve ortalama

yoğunluğu açık olarak saptayabilmek için iki kısa zaman dilimi arasında inceleme yapmışlardır. 2005 yılında, Lo ve Cho [89] akış-yoğunluk-hız temel diyagramı ile Greenshield'in modelini biraraya getirerek lojistik dönüşüm formunda bir diskrit dinamik trafik akış modeli sunmuştur. Bu modelin kontrol parametresini standart lojistik sistem ile ilişkilendirerek kaotik bir trafik akışını stabil hale getirmek için gerekli koşullar üzerinde çalışmışlardır.

Bir-boyutlu diskrit dinamik trafik akış modeli

$$\nu_{n+1} = f_\mu(\nu_n) \equiv \frac{u_f}{\overline{u}}\nu_n(1-\nu_n) \tag{5.41}$$

şeklinde ifade edilir [89]. Bu modelin değişkeni (ν_n) doluluk oranıdır. Doluluk oranı (ν_n), belirli bir alanın fiili esas doluluk süresi ile kullanılabilir süresinin oranına karşılık gelmektedir; bu nedenle doluluk oranının değeri $[0,1]$ aralığındadır. Modelin dinamik davranışı gösteren kontrol parametresi $\left(\frac{u_f}{\overline{u}}\right)$ oranıdır; yani serbest akış hızının ortalama hıza oranıdır. (5.41) ile verilen diskrit dinamik trafik akışı modeli ile (3.3) standart lojistik büyüme modeli karşılaştırıldığında; $\frac{u_f}{\overline{u}}$ oranı $r \in [0,4]$ kontrol parametresine karşılık gelir. (ν_n) kullanım süresi ise $x_n \in [0,1]$ değişkeni ile ölçülebilir. Bu trafik akış modelinin trafikte oluşturduğu dalgalanmalar Şekil 5.14'deki çatallanma diyagramı üzerinde gösterilmiştir.



Şekil 5.14 $\nu_{n+1} = \frac{u_f}{\overline{u}}\nu_n(1-\nu_n)$ trafik akış modelininin $\frac{u_f}{\overline{u}} \in [0,4]$ kontrol parametresi için çatallanma diyagramı

(5.41) diskrit dinamik trafik akışı modeli göz önüne alındığında; kontrol parametresi $\frac{u_f}{\overline{u}} \in (0,1]$ olduğunda sistem tek bir kararlı 0 sabit noktasına sahiptir. Yani, yol üzerindeki trafik akışı çok azdır ve kontrol edilmeye ihtiyaç yoktur. $\frac{u_f}{\overline{u}} \in (1,3]$ iken trafik akışı istikrarlı (kararlı) bir şekilde ilerlemektedir. Örneğin; $\frac{u_f}{\overline{u}} = 2$ ise

karayolu üzerindeki ortalama hız trafik akış hızının yarısı kadardır. $\frac{u_f}{\bar{u}} = 3$ olduğunda ortalama hız trafik akış hızının üçte biri kadardır ve model iki periyodlu bir yörüngeden oluşmaktadır. Bu iki durum birbirine yakınsa, kararlı bir trafik akışı meydana gelir. Kontrol parametresi $\frac{u_f}{\bar{u}} = 3.569$ kritik değerine ulaştığında ise trafik akışı karmaşık hale gelir ve kaos oluşur. Yol üzerinde hiç bir trafik kuralının geçerliliği kalmaz. Tam bu noktada kaos kontrol mekanizmalarının gereksinimi ortaya çıkmaktadır. Trafik akışını temsil eden kaos yapılı lojistik fonksiyonda dış faktörleri temsil eden r katsayısı belirli bir sayıya eriştiğinde dış faktörlerin ana akımı engellediği anlamı ortaya çıkmaktadır. Örneğin; dış etki olarak sinyalizasyon sürelerinin uzunluğu, yol üzerine park edilmiş araçların çokluğu, yan yol alternatiflerinin mümkün olmayışı, havanın yağışlı olması gibi etkiler lojistik fonksiyon üzerinde gerçekleşmiş demektir. Ancak Ishikawa kontrol mekanizmasının uygulanması lojistik fonksiyonda trafik akışını engelleyen ve r parametresi ile temsil edilen sistemi $(\alpha_n), (\beta_n)$ gibi yeni dış faktörlerin yardımıyla trafik akışını düzenlemek demektir. Ancak bu düzenleyici dış etki $(\alpha_n), (\beta_n)$'nın belirli aralıkları için geçerli olabilmektedir. Örneğin; orijinal lojistik fonksiyonda sinyalizasyon aralıkları uzun iken kontrol mekanizmaları altında $(\alpha_n), (\beta_n)$ ile temsil edilen bu sürelerin kısaltılması ya da orjinal fonksiyonda yan yol alternatifleri mevcut değil iken kontrol mekanizması altında yan yol alternatiflerinin açılması gibi dış faktörlerin devreye sokulması olarak ifade edilebilir.

Lo ve Cho'nun [89] çalışmasından esinlenerek; dinamik özelliklere sahip trafik akış modelinin kaosu sabit nokta iterasyon yöntemleriyle kurulan kontrol mekanizmaları ile kontrol edilebilir. Sabit nokta teorinin argumanlarıyla bakıldığında; (5.41) ile verilen trafik modeli Picard iterasyon yöntemine [142] karşılık gelmektedir. Literatürde tek adımlı Mann iterasyon yöntemi [86] ile trafik akışının kaosu üzerine farklı perspektiften incelenen çalışmalar bulunmaktadır [72, 151].

Bu çalışmada; iki adımlı Ishikawa iterasyon yöntemi [83] ile trafik akışında oluşan kaosun kontrolü, iterasyon yöntemine ait parametreler ile çalışılarak yeni bir trafik kontrol modeli geliştirilmiştir. Böylelikle, Picard [142] ve Mann [86] iterasyonlarına göre trafik akışında meydana gelen kaos daha hızlı kontrol altına alınabilir ve yol üzerinde oluşabilecek kazalar iki parametrenin sağladığı kolaylıkla en aza indirgenebilecektir.

Kaotik özelliğe sahip bir fonksiyon olarak (5.41) ile verilen trafik akış modeli göz önüne alındığında; (5.3) Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizması kullanılarak

$$\begin{aligned} \nu_{n+1} &= I\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(\nu_n) \equiv (1-\alpha_n)\,\nu_n + \alpha_n f_\mu\left[(1-\beta_n)\,\nu_n + \beta_n f_\mu(\nu_n)\right] \\ &= (1-\alpha_n)\,\nu_n + \alpha_n f_\mu\left[(1-\beta_n)\,\nu_n + \beta_n \frac{u_f}{\overline{u}}\,\nu_n(1-\nu_n)\right] \\ &= (1-\alpha_n)\,\nu_n + \alpha_n f_\mu\left[\nu_n\left(1+\beta_n\left(\frac{u_f}{\overline{u}}(1-\nu_n)-1\right)\right)\right] \\ &= (1-\alpha_n)\,\nu_n + \frac{u_f}{\overline{u}}\alpha_n\left[\nu_n\left(1+\beta_n\left(\frac{u_f}{\overline{u}}(1-\nu_n)-1\right)\right)\right] \\ &\times\left[1-\nu_n\left(1+\beta_n\left(\frac{u_f}{\overline{u}}(1-\nu_n)-1\right)\right)\right] \end{aligned} \tag{5.42}$$

şeklinde yeni bir trafik kontrol modeli tanımlansın. $\frac{u_f}{\overline{u}} \in [0,4]$ dinamik özelliklere sahip parametre, $\nu_n \in [0,1]$ yolun kullanım değişkeni ve $(\alpha_n),(\beta_n) \subset [0,1]$ dizileri trafik kontrol parametreleridir. Bu modelde, herhangi bir $x_0 \in [0,1]$ başlangıç değeri için trafik sistemindeki kaotik akış (α_n) ve (β_n) parametrelerinin belirlediği bir aralıkta kontrol edilebilir. Bu parametreler yol üzerindeki kavşakları, trafik sinyallerini, kaldırıma park eden araçları, havanın yağmurlu olması, sisli olması veya kar yağışlı olması gibi araç hızından farklı temsil eden trafik akışını değiştiren dış etkilerdir. Böylelikle trafik kontrol birimleri, trafik akış değişkenlerinin değerlerini azaltarak trafik sıkışıklığını en aza indirgeyebilirler.

Kalabalık bir otoyolda tüm araçlar hız limitine uyduğu takdirde ulaşılmak istenilen yere hızlı sürmeye çalışarak varılacağından daha kısa sürede ulaşılır. Bir trafik akışında, trafik yoğunluğu arttığında maksimum hıza bir sınır konularak trafik daha rahat akacak hale getirilebilir. Çünkü bu sınırlama, hızlanmak ve fren yapmak için geçen zaman arasındaki farkın etkisini azaltır. Bu bilgilere dayanarak; (5.42) ile verilen Ishikawa trafik kontrol modelinde $\frac{u_f}{\overline{u}} = 4$ olarak alındığında; araçların ortalama hızı yol üzerindeki maksimum hız limitinin dörtte biri kadar alınmış olur. Ayrıca, (5.41) ile verilen bir-boyutlu diskrit dinamik trafik modeli $\frac{u_f}{\overline{u}} = 4$ değerinde kaotik trafik davranışı göstermektedir.

Bölüm 5.2.1 ve Bölüm 5.3.1'de ayrıntılı olarak incelelenen lojistik büyümenin kaotik bölgesi, trafik akış modeli için düşünüldüğünde aşağıda verilen sonuçlara ulaşılır:

- $\frac{u_f}{\overline{u}} = 4$ değerinde; kararsız sabit noktalara sahip olan (5.41) trafik modeli; (5.42) kontrol sisteminin belirlediği $\alpha_n \in \left(0,\frac{2}{3}\right)$, $\beta_n \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$ parametre aralıklarında kararlı sabit noktalara sahiptir. Böylelikle, yol üzerindeki kaotik trafik akışı istikrarlı (kararlı) hale gelir ve trafiksiz bölgeye indirgenmiş olur.

- $\frac{u_f}{\overline{u}} = 4$ değerinde; kararsız periyodik sabit noktalara sahip olan (5.41) trafik modeli; (5.42) kontrol sisteminin belirlediği $\alpha_n \in \left(0, \frac{2}{5}\right)$, $\beta_n \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ parametre aralıklarında kararlı periyodik sabit noktalara sahiptir. Yani; istikrarsız trafik akışı kararlı trafik bölgesine indirgenmiş olur.

Trafik operatörleri veya denetleyicileri, yol üzerindeki güvenliği ve hizmet düzeyini iyileştirmek için istikrarlı trafik koşullarını sağlaması gerekmektedir. Bu anlamda; iki parametre ile kaos kontrolü sağlayan Ishikawa trafik kontrol modeli , tek parametreli modellere göre sistemin hassas bağımlılığını daha hızlı azaltır ve trafiğin kararlılık performansını daha hızlı artırır. Geliştirilen kontrol modeline ait parametrelerin değerleri belirlenen aralıkta tutuldukça trafik akışının kararlılığı kontrol altına alınabilir.

Bölüm 5.2.1.2'de elde edilen veriler kullanılarak; özel olarak aşağıdaki sonuçlar da elde edilebilir:

- $\alpha_n = 0.67$, $0.5 < \beta_n \leq 0.8171$ iken sistem asimptotik kararlı sabit noktalar oluşturur, yani trafik akışı kararlı durumdadır.
- $\alpha_n = 0.67$, $0.8171 < \beta_n \leq 0.9045$ iken trafik akışı 2-kararlı, 4-kararlı, 8-kararlı, ... olacak şekilde benzer kararlı durumlarda kabul edilir.
- $\alpha_n = 0.67$, $0.9045 < \beta_n < 1$ iken trafik akışı kaotik hale gelir ve yol üzerinde hiçbir trafik kuralı yoktur.

6
NOOR İTERASYON YÖNTEMİ İLE KAOS KONTROL

Bu bölümde üç parametre içeren Noor iterasyon yöntemi [84] ile yeni bir kaos kontrol mekanizması geliştirilmiştir. Bir-boyutlu diskrit dinamik sistemlerin kararsız sabit noktaları ve periyodik sabit noktaları için üç kontrol parametresi ile kararlılık aralıkları belirlenmiştir. Koatik fonksiyon sınıfı olarak kübik fonksiyon seçilerek, Noor f.p.t. kontrol mekanizması altında yörünge dinamiklerinin analizleri bilgisayar desteği ile incelenmiştir. Ayrıca Lyapunov üstelleri tekniği ile ıraksak yörüngelerin yakınsaması kontrol edilmiştir. Son olarak da, üç parametreli Noor sabit nokta kontrol sistemi altında trafik akış modeli lojistik fonksiyon kullanılarak modellenmiştir.

6.1 Noor Sabit Nokta Kaos Kontrol Mekanizması

(5.1) ile verilen bir-boyutlu diskrit dinamik sistemini ele alalım. $[a,b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere f_μ, $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı reel-değerli sürekli bir fonksiyon olsun. Teorem 4.3 gereğince; f_μ fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında en az bir sabit noktaya sahiptir. (4.6) ile verilen Noor iterasyon yöntemi [84], (5.1) orjinal sistemi altında aşağıdaki şekilde yeniden düzenlendiği takdirde

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (1-\alpha_n)\, x_n + \alpha_n f_\mu\left(y_n^1\right) \\ &= x_n + \alpha_n\left(f_\mu\left(y_n^1\right) - x_n\right) \\ &= x_n + \alpha_n\left[f_\mu\left(x_n + \beta_n^1\left(f_\mu\left(y_n^2\right) - x_n\right)\right) - x_n\right] \\ &= x_n + \alpha_n\left[f_\mu\left(x_n + \beta_n^1\left(f_\mu\left(x_n + \beta_n^2\left(f_\mu\left(x_n\right) - x_n\right)\right) - x_n\right)\right) - x_n\right] \end{aligned}$$

elde edilir. Büyümeye bağlı üç adımlı Noor tipten sabit nokta kaos kontrol mekanizması $i = 1,2$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_{n+1} = N\left(\alpha, \beta^i, f_\mu\right)(x_n) \equiv (1-\alpha_n)\, x_n + \alpha_n f_\mu\left[x_n + \beta_n^1\left(f_\mu\left(x_n + \beta_n^2\left(f_\mu\left(x_n\right) - x_n\right)\right) - x_n\right)\right] \tag{6.1}$$

şeklinde tanımlanır. Kısaca, "Noor f.p.t. kontrol mekanizması" olarak adlandırılır. Burada, $(\alpha_n), \left(\beta_n^i\right) \subset [0,1]$ $(i = 1,2)$ parametreleri (6.1) sisteminin kontrol

parametreleridir. Eğer (6.1)'de $\alpha_n = 1$, $\beta_n^1 = 0$ olarak alınırsa kontrol mekanizması, (5.1) ile verilen lineer olmayan diskrit dinamik sisteme indirgenir. $\alpha_n = 0$ için $x_{n+1} = x_n$ olacak şekilde aşikar kararlı sistem elde edilir, yani tüm (x_n) değerleri için sistem kararlı haldedir. Bu sebepten $(\alpha_n), \left(\beta_n^i\right)$ $(i = 1, 2)$ kontrol parametreleri $(0, 1)$ açık aralığında alınacaktır.

Bir-boyutlu diskrit dinamik sistemler için (4.10) ile verilen büyüme oranı ile Noor f.p.t. kontrol mekanizması matematiksel olarak denktir:

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} = \alpha_n \left[\frac{f_\mu\left(y_n^1\right)}{x_n} - 1 \right]. \tag{6.2}$$

Yukarıdaki ilişkinin Noor iterasyon yöntemi [84] ile ifadesi aşağıda verilen işlem süreçleriyle açıklanabilir. Tanım 4.5 kullanılarak

$$y_n^1 = \left(1 - \beta_n^1\right) x_n + \beta_n^1 f_\mu\left(y_n^2\right),\ y_n^2 = \left(1 - \beta_n^2\right) x_n + \beta_n^2 f_\mu\left(x_n\right)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (1 - \alpha_n) x_n + \alpha_n f_\mu\left(y_n^1\right) \\ x_{n+1} &= x_n - \alpha_n x_n + \alpha_n f_\mu\left(y_n^1\right) \\ x_{n+1} - x_n &= \alpha_n f_\mu\left(y_n^1\right) - \alpha_n x_n \\ x_{n+1} - x_n &= \alpha_n \left(f_\mu\left(y_n^1\right) - x_n\right) \end{aligned}$$

şeklinde büyüme fonksiyonu elde edilir. Dolayısıyla, $(\alpha_n), \left(\beta_n^i\right)$ $(i = 1, 2)$ kontrol parametreleri, (5.1) orijinal sisteminin büyümesini üç parametre ile kontrol etmektedir. Eğer f_μ fonksiyonu kaotik ise büyüme kaosa sebep olur. Ayrıca, (6.2) büyüme oranı eşitliği $x_n = 0$ için tanımsız olduğundan orijin $[a, b]$ tanım aralığından çıkartılır. Böylelikle, (5.1) ile verilen bir-boyutlu diskrit dinamik sistemin büyümeye dair değişimini kontrol eden üç adımlı bir sabit nokta kaos kontrol mekanizması elde edilmiş olur.

Noor f.p.t. kontrol mekanizmasının bir $x_0 \in [a, b]$ başlangıç noktasındaki yörüngeleri, $i = 1, 2$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_1 = N(\alpha,\beta^i,f_\mu)(x_0) = (1-\alpha_n)x_0 + \alpha_n f_\mu\left[x_0 + \beta_n^1\left(f_\mu\left(x_0 + \beta_n^2\left(f_\mu(x_0)-x_0\right)\right)-x_0\right)\right]$$
$$x_2 = N(\alpha,\beta^i,f_\mu)(x_1) = N(\alpha,\beta^i,f_\mu)\left[N(\alpha,\beta^i,f_\mu)(x_0)\right] = (1-\alpha_n)N(\alpha,\beta^i,f_\mu)(x_0) + \alpha_n$$
$$f_\mu\left[\begin{array}{c} N(\alpha,\beta^i,f_\mu)(x_0)+\beta_n^1 \\ \left[f_\mu\left[N(\alpha,\beta^i,f_\mu)(x_0)+\beta_n^2\left[f_\mu\left(N(\alpha,\beta^i,f_\mu)(x_0)\right)-N(\alpha,\beta^i,f_\mu)(x_0)\right]\right]-N(\alpha,\beta^i,f_\mu)(x_0)\right] \end{array}\right]$$
$$x_3 = N(\alpha,\beta^i,f_\mu)(x_2) = N(\alpha,\beta^i,f_\mu)\left[N^2(\alpha,\beta^i,f_\mu)(x_0)\right] = (1-\alpha_n)N^2(\alpha,\beta^i,f_\mu)(x_0) + \alpha_n$$
$$f_\mu\left[\begin{array}{c} N^2(\alpha,\beta^i,f_\mu)(x_0)+\beta_n^1 \\ \left[f_\mu\left[N^2(\alpha,\beta^i,f_\mu)(x_0)+\beta_n^2\left[f_\mu\left(N^2(\alpha,\beta^i,f_\mu)(x_0)\right)-N^2(\alpha,\beta^i,f_\mu)(x_0)\right]\right]-N^2(\alpha,\beta^i,f_\mu)(x_0)\right] \end{array}\right]$$
$$\vdots$$
$$x_{n+1} = N(\alpha,\beta^i,f_\mu)(x_n) = N(\alpha,\beta^i,f_\mu)\left[N^n(\alpha,\beta^i,f_\mu)(x_0)\right] = (1-\alpha_n)N^n(\alpha,\beta^i,f_\mu)(x_0) + \alpha_n$$
$$f_\mu\left[\begin{array}{c} N^n(\alpha,\beta^i,f_\mu)(x_0)+\beta_n^1 \\ \left[f_\mu\left[N^n(\alpha,\beta^i,f_\mu)(x_0)+\beta_n^2\left[f_\mu\left(N^n(\alpha,\beta^i,f_\mu)(x_0)\right)-N^n(\alpha,\beta^i,f_\mu)(x_0)\right]\right]-N^n(\alpha,\beta^i,f_\mu)(x_0)\right] \end{array}\right]$$

şeklindeki iterasyon dizisidir. Son denklemde, $x_n = N^n(\alpha,\beta^i,f_\mu)(x_0)$ $(i=1,2)$ alındığında (6.1) ile verilen Noor f.p.t. kontrol mekanizması elde edilir. Ayrıca, yörünge dizisi

$$x_0, x_1 = N(\alpha,\beta^i,f_\mu)(x_0), x_2 = N^2(\alpha,\beta^i,f_\mu)(x_0),\ldots,x_{n+1} = N^{n+1}(\alpha,\beta^i,f_\mu)(x_0)$$

şeklinde ifade edilir. Burada, $N^{n+1}(\alpha,\beta^i,f_\mu)(x_0)$ iterasyonu $N(\alpha,\beta^i,f_\mu)(x_0)$ dönüşümünün $(n+1)$. iterasyonuna karşılık gelmektedir.

6.2 Kararsız Sabit Noktaların Stabilize Edilmesi

Bu bölümde, kaotik özelliğe sahip bir-boyutlu diskrit dinamik sistem olarak f_μ fonksiyonunun üç parametreye bağlı Noor f.p.t. kontrol mekanizması ile kaostan kararlılığa geçişi için gerekli koşullar belirlenerek teorik kanıtları sunulmuştur. Öncelikle, orijinal sistem ile kontrol mekanizması arasında genel dinamik özelliklerin sağlanması için aşağıdaki ilişki verilmiştir.

Teorem 6.1. *(5.1) ile verilen f_μ orijinal sistemi ve (6.1) ile verilen Noor f.p.t. kontrol mekanizması aynı reel sabit noktalar kümesini paylaşmaktadır. Yani, $x^* \in [a,b]$ için $f_\mu(x^*) = x^*$ ise $N(\alpha,\beta^i,f_\mu)(x^*) = x^*$ $(i=1,2)$ dır. Tersi, $y_n^1 = x^*$ koşulu altında, her zaman doğrudur.*

İspat. Kabul edelim ki; f_μ orijinal sisteminin reel bir sabit noktası $x^* \in [a,b]$ olsun. Yani, $f_\mu(x^*) = x^*$ sağlanır. (6.1) ile verilen Noor f.p.t. kontrol mekanizması x^* sabit

noktası için düzenlendğinde $i=1,2$ için

$$\begin{aligned} N\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x^*) &= (1-\alpha_n)\,x^* + \alpha_n f_\mu\left[x^* + \beta_n^1\left(f_\mu\left(x^* + \beta_n^2\left(f_\mu(x^*)-x^*\right)\right)-x^*\right)\right] \\ &= (1-\alpha_n)\,x^* + \alpha_n f_\mu\left[x^* + \beta_n^1\left(f_\mu(x^*)-x^*\right)\right] \\ &= (1-\alpha_n)\,x^* + \alpha_n f_\mu(x^*) \\ &= x^* + \alpha_n(x^*-x^*) \\ &= x^* \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, x^* sabit noktası Noor f.p.t. kontrol mekanizmasının da bir sabit noktasıdır.

Tersine, Noor f.p.t. kontrol mekanizmasının reel bir sabit noktası $x^* \in [a,b]$ olduğunu kabul edelim. Yani, $N\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x^*) = x^*$ $(i=1,2)$ olsun. Hipotezde verilen koşul altında, (4.6) iterasyon yönteminde $y_n^1 = x^*$ alınarak kontrol mekanizmasında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &(1-\alpha_n)\,x^* + \alpha_n f_\mu\left[x^* + \beta_n^1\left(f_\mu\left(x^* + \beta_n^2\left(f_\mu(x^*)-x^*\right)\right)-x^*\right)\right] = x^* \\ &(1-\alpha_n)\,x^* + \alpha_n f_\mu\left(y_n^1\right) = x^* \\ &(1-\alpha_n)\,x^* + \alpha_n f_\mu(x^*) = x^* \\ &\alpha_n\left(f_\mu(x^*)-x^*\right) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $\alpha_n \in (0,1)$ olduğundan $f_\mu(x^*) = x^*$ olur. Dolayısıyla x^* sabit noktası, f_μ orijinal sisteminin bir sabit noktasıdır. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 6.2. *(5.1) ile verilen f_μ orijinal sisteminin kararsız bir sabit noktası $x^* \in [a,b]$ olsun. $\left|f_\mu'(x^*)\right| \neq 1$ olmak üzere (6.1) ile tanımlı Noor f.p.t. kontrol mekanizmasının*

$$\left|N'\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x^*)\right| < 1$$

kararlılık koşulunu sağlayan $(\alpha_n), \left(\beta_n^i\right) \subset (0,1)$ $(i=1,2)$ kontrol parametrelerinin uygun bir aralığını bulmak her zaman mümkündür. Diğer bir ifadeyle, f_μ orijinal sisteminin x^* kararsız sabit noktasını kararlı hale getiren $\alpha_n \in \Gamma_\alpha = (\min\{\alpha_n\}, \max\{\alpha_n\})$, $\beta_n^i \in \Gamma_{\beta^i} = \left(\min\left\{\beta_n^i\right\}, \max\left\{\beta_n^i\right\}\right)$ $(i=1,2)$ şeklinde uygun kontrol parametre aralıkları her zaman vardır.

İspat. $x^* \in [a,b]$ noktası (5.1) ile verilen f_μ orijinal sisteminin kararsız bir sabit noktası olsun. Öncelikli olarak, teoremin hipotezinde verilen $\left|N'\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x^*)\right| < 1$ kararlılık şartının sağlanabilmesi için $N\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)$ $(i=1,2)$ kontrol mekanizmasının x^* sabit noktasındaki türev fonksiyonunun belirlenmesi gerekmektedir.

Gerekli hesaplamalar yapıldığında, (6.1) denkleminin türevi $i = 1, 2$ için

$$N'\left(\alpha, \beta^i, f_\mu\right)(x_n) = 1 + \alpha_n \left(f'_\mu\left(y_n^1\right)\left(1 + \beta_n^1 \left(f'_\mu\left(y_n^2\right)\left(1 + \beta_n^2 \left(f'_\mu(x_n) - 1\right)\right) - 1\right)\right) - 1\right) \tag{6.3}$$

olarak elde edilir. x^* sabit noktası için ise

$$N'\left(\alpha, \beta^i, f_\mu\right)(x^*) = 1 + \alpha_n \left(f'_\mu(x^*)\left(1 + \beta_n^1 \left(f'_\mu(x^*)\left(1 + \beta_n^2 \left(f'_\mu(x^*) - 1\right)\right) - 1\right)\right) - 1\right) \tag{6.4}$$

şeklindedir.

Buradan hareketle, $f'_\mu(x^*) < -1$ koşulunu sağlayan kararsız sabit noktaların kararlılığını belirlemek için iki durum ortaya çıkmaktadır.

Durum 1. $N'\left(\alpha, \beta^i, f_\mu\right)(x^*) < 1$ $(i = 1, 2)$ ise (6.4)'den

$$\begin{aligned} 1 + \alpha_n \left(f'_\mu(x^*)\left(1 + \beta_n^1 \left(f'_\mu(x^*)\left(1 + \beta_n^2 \left(f'_\mu(x^*) - 1\right)\right) - 1\right)\right) - 1\right) &< 1 \\ \alpha_n \left(f'_\mu(x^*)\left(1 + \beta_n^1 \left(f'_\mu(x^*)\left(1 + \beta_n^2 \left(f'_\mu(x^*) - 1\right)\right) - 1\right)\right) - 1\right) &< 0 \end{aligned} \tag{6.5}$$

elde edilir. $\alpha_n \in (0, 1)$ olduğundan

$$f'_\mu(x^*)\left(1 + \beta_n^1 \left(f'_\mu(x^*)\left(1 + \beta_n^2 \left(f'_\mu(x^*) - 1\right)\right) - 1\right)\right) - 1 < 0 \tag{6.6}$$

olması gerekmektedir. Dolayısıyla, (6.5)'de eşitsizliğin her iki tarafı (6.6)'ya bölündüğünde $\alpha_n > 0$ olur ve $\min\{\alpha_n\} = 0$ elde edilir.

Ayrıca, (6.6)'da $f'_\mu(x^*) < -1$ şartı göz önüne alınarak gerekli işlemler yapıldığında

$$\begin{aligned} f'_\mu(x^*)\left(1 + \beta_n^1 \left(f'_\mu(x^*)\left(1 + \beta_n^2 \left(f'_\mu(x^*) - 1\right)\right) - 1\right)\right) &< 1 \\ 1 + \beta_n^1 \left(f'_\mu(x^*)\left(1 + \beta_n^2 \left(f'_\mu(x^*) - 1\right)\right) - 1\right) &> \frac{1}{f'_\mu(x^*)} \\ \beta_n^1 \left(f'_\mu(x^*)\left(1 + \beta_n^2 \left(f'_\mu(x^*) - 1\right)\right) - 1\right) &> \frac{1 - f'_\mu(x^*)}{f'_\mu(x^*)} \end{aligned} \tag{6.7}$$

elde edilir. Eşitsizliğin sol tarafında, $f'_\mu(x^*) < -1$ ve $\beta_n^2 \in (0, 1)$ için

$$f'_\mu(x^*)\left(1 + \beta_n^2 \left(f'_\mu(x^*) - 1\right)\right) - 1 < 0 \tag{6.8}$$

olduğundan, (6.7)'de $\left(\beta_n^1\right)$ parametresi çekilirse

$$\beta_n^1 < \min\left\{\frac{1 - f'_\mu(x^*)}{f'_\mu(x^*)} \frac{1}{f'_\mu(x^*)\left(1 + \beta_n^2 \left(f'_\mu(x^*) - 1\right)\right) - 1}\right\} = \max\left\{\beta_n^1\right\} \tag{6.9}$$

elde edilir. Ayrıca (6.8) denklemi düzenlendiğinde $\left(\beta_n^2\right)$ parametresinin üst sınırı

$$
\begin{aligned}
f_\mu'(x^*)\left(1+\beta_n^2\left(f_\mu'(x^*)-1\right)\right)-1<0 \\
f_\mu'(x^*)\left(1+\beta_n^2\left(f_\mu'(x^*)-1\right)\right)<1 \\
1+\beta_n^2\left(f_\mu'(x^*)-1\right)>\frac{1}{f_\mu'(x^*)} \\
\beta_n^2\left(f_\mu'(x^*)-1\right)>\frac{1-f_\mu'(x^*)}{f_\mu'(x^*)} \\
\beta_n^2<\frac{-1}{f_\mu'(x^*)}=\max\left\{\beta_n^2\right\} \qquad (6.10)
\end{aligned}
$$

şeklinde bulunur. Diğer taraftan, (6.7) denkleminden $\left(\beta_n^2\right)$ parametresi yalnız bırakılırsa

$$
\begin{aligned}
\beta_n^1\left(f_\mu'(x^*)\left(1+\beta_n^2\left(f_\mu'(x^*)-1\right)\right)-1\right)>\frac{1-f_\mu'(x^*)}{f_\mu'(x^*)} \\
f_\mu'(x^*)\left(1+\beta_n^2\left(f_\mu'(x^*)-1\right)\right)-1>\frac{1-f_\mu'(x^*)}{f_\mu'(x^*)\beta_n^1} \\
\beta_n^2\left(f_\mu'(x^*)-1\right)<\frac{1-f_\mu'(x^*)}{f_\mu'(x^*)}\left[\frac{1}{f_\mu'(x^*)\beta_n^1}+1\right] \\
\beta_n^2\left(f_\mu'(x^*)-1\right)<\frac{1-f_\mu'(x^*)}{\left[f_\mu'(x^*)\right]^2\beta_n^1}+\frac{1-f_\mu'(x^*)}{f_\mu'(x^*)} \\
\beta_n^2>\left[\frac{1-f_\mu'(x^*)}{f_\mu'^2(x^*)\beta_n^1}+\frac{1-f_\mu'(x^*)}{f_\mu'(x^*)}\right]\frac{1}{\left(f_\mu'(x^*)-1\right)}
\end{aligned}
$$

ve buradan

$$
\max\left\{\left[\frac{1-f_\mu'(x^*)}{f_\mu'^2(x^*)\beta_n^1}+\frac{1-f_\mu'(x^*)}{f_\mu'(x^*)}\right]\frac{1}{\left(f_\mu'(x^*)-1\right)}\right\}=\min\left\{\beta_n^2\right\}<\beta_n^2 \qquad (6.11)
$$

elde edilir.

Durum 2. $N'\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x^*)>-1$ $(i=1,2)$ ise (6.4)'den

$$
\begin{aligned}
1+\alpha_n\left(f_\mu'(x^*)\left(1+\beta_n^1\left(f_\mu'(x^*)\left(1+\beta_n^2\left(f_\mu'(x^*)-1\right)\right)-1\right)\right)-1\right)>-1 \\
\alpha_n\left(f_\mu'(x^*)\left(1+\beta_n^1\left(f_\mu'(x^*)\left(1+\beta_n^2\left(f_\mu'(x^*)-1\right)\right)-1\right)\right)-1\right)>-2 \qquad (6.12)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (6.6) eşitsizliğinin negatif olduğu göz önüne alınarak (α_n) parametresinin

üst sınırı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\alpha_n < \min\left\{\frac{-2}{f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^1\left(f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^2\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right)-1\right)\right)-1}\right\} = \max\{\alpha_n\}. \tag{6.13}$$

(6.12) denkleminde $\alpha_n \in (0,1)$ ve $f'_\mu(x^*) < -1$ olduğu göz önüne alınarak $\left(\beta_n^1\right)$ parametresi yalnız bırakılırsa

$$\begin{aligned}
f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^1\left(f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^2\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right)-1\right)\right)-1 &> -\frac{2}{\alpha_n}\\
f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^1\left(f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^2\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right)-1\right)\right) &> 1-\frac{2}{\alpha_n}\\
\beta_n^1\left(f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^2\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right)-1\right) &< \frac{1-f'_\mu(x^*)}{f'_\mu(x^*)}-\frac{2}{\alpha_n f'_\mu(x^*)}
\end{aligned}$$

olur ve (6.8) denkleminin negatif olmasından kaynaklı

$$\beta_n^1 > \left(\frac{1-f'_\mu(x^*)}{f'_\mu(x^*)}-\frac{2}{\alpha_n f'_\mu(x^*)}\right)\frac{1}{f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^2\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right)-1}$$

olarak elde edilir. Buradan $\left(\beta_n^1\right)$ parametresinin alt sınırı

$$\max\left\{\left(\frac{1-f'_\mu(x^*)}{f'_\mu(x^*)}-\frac{2}{\alpha_n f'_\mu(x^*)}\right)\frac{1}{f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^2\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right)-1}\right\} = \min\left\{\beta_n^1\right\} < \beta_n^1 \tag{6.14}$$

şeklindedir.

Yukarıda elde edilen kontrol parametre dizilerine ait (6.9), (6.10), (6.11), (6.13), (6.14) denklemleri göz önüne alındığında, $f'_\mu(x^*) < -1$ koşulu altında Noor f.p.t. kontrol mekanizmasının $(\alpha_n), \left(\beta_n^i\right)$ $(i=1,2)$ kontrol parametrelerinin x^* kararsız sabit noktasını kararlı hale dönüştüren stabilite aralıkları aşağıdaki şekilde belirlenmiştir:

$$\begin{aligned}
\alpha_n \in \Gamma_{(\alpha_n)} &= (\min\{\alpha_n\}, \max\{\alpha_n\}) \\
&= \left(0, \min\left\{\frac{-2}{f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^1\left(f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^2\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right)-1\right)\right)-1}\right\}\right) \\
\beta_n^1 \in \Gamma_{(\beta_n^1)} &= \left(\min\left\{\beta_n^1\right\}, \max\left\{\beta_n^1\right\}\right) \\
&= \left(\begin{array}{l} \max\left\{\left(\frac{1-f'_\mu(x^*)}{f'_\mu(x^*)} - \frac{2}{\alpha_n f'_\mu(x^*)}\right)\frac{1}{f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^2\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right)-1}\right\}, \\ \min\left\{\frac{1-f'_\mu(x^*)}{f'_\mu(x^*)}\frac{1}{f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^2\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right)-1}\right\} \end{array}\right) \\
\beta_n^2 \in \Gamma_{(\beta_n^2)} &= \left(\min\left\{\beta_n^2\right\}, \max\left\{\beta_n^2\right\}\right) \\
&= \left(\max\left\{\left[\frac{1-f'_\mu(x^*)}{f'^2_\mu(x^*)\beta_n^1} + \frac{1-f'_\mu(x^*)}{f'_\mu(x^*)}\right]\frac{1}{\left(f'_\mu(x^*)-1\right)}\right\}, \frac{-1}{f'_\mu(x^*)}\right). \qquad (6.15)
\end{aligned}$$

Şimdi, $f'_\mu(x^*) > 1$ koşuluna uyan kararsız sabit noktaların $\left|N'\left(\alpha, \beta^i, f_\mu\right)(x^*)\right| < 1$ $(i = 1, 2)$ kararlılık şartını sağlayan kontrol parametrelerine ait aralıkları belirlemeye çalışalım.

Durum 3. $f'_\mu(x^*) > 1$ koşulu altında, $N'\left(\alpha, \beta^i, f_\mu\right)(x^*) < 1$ $(i = 1, 2)$ ise

$$\alpha_n\left(f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^1\left(f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^2\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right)-1\right)\right)-1\right) < 0$$

denkleminde $\beta_n^1, \beta_n^2 \in (0,1)$ ve $f'_\mu(x^*) > 1$ olduğundan

$$f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^1\left(f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^2\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right)-1\right)\right)-1 > 0 \qquad (6.16)$$

elde edilir. Bu durumda $\alpha_n < 0$ olmasını gerektirir; ancak $\alpha_n \in (0,1)$ kontrol parametresinin tanım aralığı ile çelişmektedir.

Durum 4. $f'_\mu(x^*) > 1$ koşulu altında, $N'\left(\alpha, \beta^i, f_\mu\right)(x^*) > -1$ $(i = 1, 2)$ ise

$$\alpha_n\left(f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^1\left(f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^2\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right)-1\right)\right)-1\right) > -2$$

eşitsizliğinde $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$ parametresi çekildiğinde

$$\alpha_n > \frac{-2}{f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^1\left(f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^2\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right)-1\right)\right)-1}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\alpha_n \in \left(\frac{-2}{f'_\mu(x^*)\Big(1+\beta_n^1\Big(f'_\mu(x^*)\Big(1+\beta_n^2\Big(f'_\mu(x^*)-1\Big)\Big)-1\Big)\Big)-1}, 0 \right)$$

aralığında olması gerekir. Ancak $\alpha_n \in (0,1)$ tanım aralığı ile çelişki elde edilir.

Durum 3 ve Durum 4'den; $f'_\mu(x^*) > 1$ koşulu altında $N\big(\alpha, \beta^i, f_\mu\big)\,(i=1,2)$ kaos kontrol mekanizmasının f_μ orijinal sistemini kararlı hale getirecek parametre değerlerinin bulunmadığı görülmektedir. Dolayısıyla, $f'_\mu(x^*) > 1$ koşulunu sağlayan kararsız sabit noktalar için Teorem 6.1 uygulanamaz. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sonuç 6.1. *Teorem 6.2'nin hipotezleri altında elde edilen (6.15) kontrol parametre aralıklarında $\beta_n^2 = 0$ olarak alınırsa; iki parametreye bağlı Ishikawa f.p.t. kontrol mekanizmasının kararsız sabit noktaların stabilize edilmesi için belirlediği (5.10) kontrol parametre aralıkları elde edilir.*

Sonuç 6.2. *Teorem 6.2'de $\beta_n^1 = \beta_n^2 = 0$ olarak alındığında, tek adımlı Mann iterasyon yöntemi [86] ile kurulan sabit nokta kontrol mekanizmasının [71, 72] belirlediği, kararsız sabit noktaları kararlı hale dönüştüren kontrol parametre aralıkları elde edilir.*

Noor iterasyon yöntemi [84] ile kurulan kaos kontrol mekanizmasının analitik ispatında elde edilen veriler kullanılarak kaotik davranışa sahip kübik sistemin kararsız sabit noktalarına uygulanması aşağıda incelenecektir.

6.2.1 Kaotik Fonksiyon Olarak Kübik Sistem Uygulaması

$g_\mu : [1,2] \to [1,2]$ olmak üzere

$$x_{n+1} = g_\mu(x_n) \equiv 1 + (x_n - 1)\,(4x_n - 7)^2 \tag{6.17}$$

kübik sistemini ele alalım. $g_\mu(x^*) = x^*$ denklemi çözüldüğünde sistemin

$$x_1^* = 1,\ x_2^* = \frac{3}{2},\ x_3^* = 2 \tag{6.18}$$

olacak şekilde üç tane sabit noktası elde edilir. Tanım 3.2 gereğince; sabit noktaların kararlı olup olmadıklarını belirlemek için kübik sistemin

$$g'_\mu(x^*) = (4x^* - 7)(12x^* - 15)$$

şeklinde elde edilen türev fonksiyonunda gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$g'_\mu\left(x_1^*\right)=9>1,\ g'_\mu\left(x_2^*\right)=-3<-1,\ g'_\mu\left(x_3^*\right)=9>1$$

olduğundan $x_1^*,\ x_2^*,\ x_3^*$ sabit noktaları kararsız (itici) sabit noktalardır. Teorem 6.2'nin hipotezleri altında, kübik sistemin x_2^* kararsız sabit noktasını kararlı hale dönüştürecek Noor f.p.t. kontrol mekanizmasının kontrol parametre aralıklarını belirleyelim ve ardından hem kararlılık aralığında hem de aralığın dışında meydana gelen dinamik davranışların yörünge analizini yaparak bilgisayar simülasyonları ile gösterelim.

Öncelikle, (6.1) ile verilen Noor f.p.t. kontrol mekanizması (6.17) kübik sistemi altında yeniden düzenlenmelidir. $i=1,2$ için

$$\begin{aligned}
&x_{n+1}=N\left(\alpha,\beta^i,g_\mu\right)(x_n)\equiv(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n g_\mu\left(x_n+\beta_n^1\left(g_\mu\left(x_n+\beta_n^2\left(g_\mu(x_n)-x_n\right)\right)-x_n\right)\right)\\
&=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n g_\mu\left(x_n+\beta_n^1\left(g_\mu\left(x_n+\beta_n^2\left(1+(x_n-1)(4x_n-7)^2-x_n\right)\right)-x_n\right)\right)\\
&=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n g_\mu\left(x_n+\beta_n^1\left(\begin{array}{c}1+\left(\left(x_n+\beta_n^2\left(1+(x_n-1)(4x_n-7)^2-x_n\right)\right)-1\right)\\ \times\left(4\left(x_n+\beta_n^2\left(1+(x_n-1)(4x_n-7)^2-x_n\right)\right)-7\right)^2-x_n\end{array}\right)\right)\\
&=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n\\
&\times\left[\begin{array}{c}1+(x_n-1)\left(1+\beta_n^1\left(\begin{array}{c}\left(1-8\beta_n^2(2-x_n)(2x_n-3)\right)\\ \times\left(4x_n+32\beta_n^2(1-x_n)(2-x_n)(2x_n-3)-7\right)^2-1\end{array}\right)\right)\\ \times\left(4\left(x_n+\beta_n^1(x_n-1)\left(\begin{array}{c}\left(1-8\beta_n^2(2-x_n)(2x_n-3)\right)\\ \times\left(4x_n+32\beta_n^2(1-x_n)(2-x_n)(2x_n-3)-7\right)^2-1\end{array}\right)\right)-7\right)^2\end{array}\right]
\end{aligned}\tag{6.19}$$

olacak şekilde kaos kontrol mekanizması elde edilir. Bu sistemin diskrit dinamik sistemlerin taşıdığı genel özelliklere sahip olabilmesi için Teorem 6.1 ve Teorem 6.2'nin sağlandığını ispatlayalım.

Orijinal sistem ile kontrol mekanizmasının aynı sabit noktalara sahip olduğunu gösterebilmek için $N\left(\alpha,\beta^i,g_\mu\right)(x^*)=x^*$ $(i=1,2)$ denkleminin köklerinin elde edilmesi gerekmektedir. $x^*\in[1,2]$ sabit noktası için (6.19) düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}
&N\left(\alpha,\beta^i,g_\mu\right)(x^*)=(1-\alpha_n)x^*+\alpha_n\\
&\times\left[\begin{array}{c}-1+x^*-\beta_n^1x^*+\beta_n^1\left[\begin{array}{c}1+(x^*-1)\left(1+8\beta_n^2\left(6-7x^*+2(x^*)^2\right)\right)\\ \times\left(-7+4x^*+32\beta_n^2\left(-6+13x^*-9(x^*)^2+2(x^*)^3\right)\right)^2\end{array}\right]\\ \left[7-4\left[x^*-\beta_n^1x^*+\beta_n^1\left(\begin{array}{c}1+(x^*-1)\left(1+8\beta_n^2\left(6-7x^*+2(x^*)^2\right)\right)\\ \times\left(-7+4x^*+32\beta_n^2\left(-6+13x^*-9(x^*)^2+2(x^*)^3\right)\right)^2\end{array}\right)\right]\right]^2\end{array}\right]=x^*
\end{aligned}$$

eşitliğinin çözümüne ihtiyaç vardır. Bu denklemin analitik olarak hesaplanması oldukça zor olduğundan *Mathematica 9.0* programı kullanılarak çözüldüğünde; $x_1^*=1,\ x_2^*=\frac{3}{2},\ x_3^*=2$ olacak şekilde kübik sistem ile aynı olan üç tane reel sabit nokta ile 24 tane kompleks kök elde edilmektedir. Dolayısıyla, g_μ kübik sistemi ile $N\left(\alpha,\beta^i,g_\mu\right)$

kontrol mekanizması aynı reel sabit noktalar kümesine sahiptir. Yani, Teorem 6.1 sağlanmaktadır.

Şimdi, Teorem 6.2'nin hipotezlerine göre; $g'_\mu\left(x_2^*\right) < -1$ şartını sağlayan $x_2^* = \frac{3}{2}$ kararsız sabit noktasının kararlılık aralığının belirlenmesi için $\left|N'\left(\alpha,\beta^i,g_\mu\right)\left(x_2^*\right)\right| < 1$ şartının sağlanması gerekmektedir. Bu takdirde, ilk olarak (6.19) kontrol mekanizmasının bir $x^* \in [1,2]$ sabit noktasındaki türev denklemi

$$\begin{aligned}
&N'\left(\alpha,\beta^i,g_\mu\right)(x^*) = 1-\alpha_n+\alpha_n \\
&\times\left[\begin{array}{l} 1-\beta_n^1+8\beta_n^1(-1+x^*)\left(1+8\beta_n^2\left(6-7x^*+2x^{*2}\right)\right)\left(1+8\beta_n^2\left(13-18x^*+6x^{*2}\right)\right) \\ \times\left(-7+4x^*+32\beta_n^2\left(-6+13x^*-9x^{*2}+2x^{*3}\right)\right)+\beta_n^1\left(1+8\beta_n^2\left(13-18x^*+6x^{*2}\right)\right) \\ \times\left(-7+4x^*+32\beta_n^2\left(-6+13x^*-9x^{*2}+2x^{*3}\right)\right)^2 \end{array}\right] \\
&\times\left[7+4\left(-1+\beta_n^1\right)x^*-4\beta_n^1\left(\begin{array}{l} 1+(-1+x^*)\left(1+8\beta_n^2\left(6-7x^*+2x^{*2}\right)\right) \\ \times\left(-7+4x^*+32\beta_n^2\left(-6+13x^*-9x^{*2}+2x^{*3}\right)\right)^2 \end{array}\right)\right]^2 \\
&+8\alpha_n\left[\begin{array}{l} -1+\beta_n^1+x^*-\beta_n^1x^*+\beta_n^1(-1+x^*)\left(1+8\beta_n^2\left(6-7x^*+2x^{*2}\right)\right) \\ \times\left(-7+4x^*+32\beta_n^2\left(-6+13x^*-9x^{*2}+2x^{*3}\right)\right)^2 \end{array}\right] \\
&\times\left[\begin{array}{l} 1-\beta_n^1+8\beta_n^1(-1+x^*)\left(1+8\beta_n^2\left(6-7x^*+2x^{*2}\right)\right)\left(1+8\beta_n^2\left(13-18x^*+6x^{*2}\right)\right) \\ \times\left(-7+4x^*+32\beta_n^2\left(-6+13x^*-9x^{*2}+2x^{*3}\right)\right)+\beta_n^1\left(1+8\beta_n^2\left(13-18x^*+6x^{*2}\right)\right) \\ \times\left(-7+4x^*+32\beta_n^2\left(-6+13x^*-9x^{*2}+2x^{*3}\right)\right)^2 \end{array}\right] \\
&\times\left[-7-4\left(-1+\beta_n^1\right)x^*+4\beta_n^1\left(\begin{array}{l} 1+(-1+x^*)\left(1+8\beta_n^2\left(6-7x^*+2x^{*2}\right)\right) \\ \times\left(-7+4x^*+32\beta_n^2\left(-6+13x^*-9x^{*2}+2x^{*3}\right)\right)^2 \end{array}\right)\right] \qquad (6.20)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. $x_2^* = \frac{3}{2}$ kararsız sabit noktası için hesaplanırsa, $i = 1,2$ için

$$N\left(\alpha,\beta^i,g_\mu\right)\left(x_2^*\right) = 1+4\alpha_n\left(3\beta_n^1-9\beta_n^1\beta_n^2-1\right)$$

elde edilir.

$$\left|N\left(\alpha,\beta^i,g_\mu\right)\left(x_2^*\right)\right| = \left|1+4\alpha_n\left(3\beta_n^1-9\beta_n^1\beta_n^2-1\right)\right| < 1$$

kararlılık koşulunun sağlanabilmesi için iki durum oluşmaktadır:

Durum 1. $g'_\mu\left(x_2^*\right) < -1$ için $N\left(\alpha,\beta^i,g_\mu\right)\left(x_2^*\right) < 1$ ise

$$\begin{aligned}
1+4\alpha_n\left(3\beta_n^1-9\beta_n^1\beta_n^2-1\right) &< 1 \\
4\alpha_n\left(3\beta_n^1-9\beta_n^1\beta_n^2-1\right) &< 0 \\
\alpha_n\left(3\beta_n^1-9\beta_n^1\beta_n^2-1\right) &< 0
\end{aligned}$$

elde edilir. $(\alpha_n) \subset (0,1)$ olduğundan

$$3\beta_n^1-9\beta_n^1\beta_n^2-1 < 0 \qquad (6.21)$$

olur. Dolayısıyla, (α_n) parametresinin alt sınırı

$$\alpha_n > 0 = \min\{\alpha_n\}$$

olarak elde edilir. Ayrıca, (6.21)'den $1-3\beta_n^2 > 0$ için

$$\begin{aligned} 3\beta_n^1 - 9\beta_n^1\beta_n^2 - 1 &< 0 \\ 3\beta_n^1\left(1-3\beta_n^2\right) &< 1 \\ \beta_n^1 &< \frac{1}{3\left(1-3\beta_n^2\right)} \end{aligned}$$

olur ve $\min\left\{\beta_n^2\right\} = 0$ iken

$$\beta_n^1 < \min\left\{\frac{1}{3\left(1-3\beta_n^2\right)}\right\} = \frac{1}{3\left(1-3\min\left\{\beta_n^2\right\}\right)} = \frac{1}{3} = \max\left\{\beta_n^1\right\}$$

elde edilir. Bununla birlikte, $1-3\beta_n^2 > 0$ denkleminden

$$\beta_n^2 < \frac{1}{3} = \max\left\{\beta_n^2\right\}$$

üst sınırı bulunur.

Durum 2. $g'\left(x_2^*\right) < -1$ için $N\left(\alpha, \beta^i, g_\mu\right)\left(x_2^*\right) > -1$ ise

$$\begin{aligned} 1 + 4\alpha_n\left(3\beta_n^1 - 9\beta_n^1\beta_n^2 - 1\right) &> -1 \\ 4\alpha_n\left(3\beta_n^1 - 9\beta_n^1\beta_n^2 - 1\right) &> -2 \end{aligned} \tag{6.22}$$

elde edilir. (6.21) denklemi negatif tanımlı ve $\max\left\{\beta_n^2\right\} = \frac{1}{3}$ için

$$\begin{aligned} \alpha_n &< \min\left\{\frac{-2}{4\left(3\beta_n^1 - 9\beta_n^1\beta_n^2 - 1\right)}\right\} = \frac{-2}{4\left(3\beta_n^1 - 9\beta_n^1\max\left\{\beta_n^2\right\} - 1\right)} \\ &= \frac{-2}{4\left(3\beta_n^1 - 3\beta_n^1 - 1\right)} = \frac{1}{2} = \max\{\alpha_n\} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca (6.22) denkleminde $\left(\beta_n^1\right)$ parametresi yalnız bırakılırsa

$$
\begin{aligned}
3\beta_n^1 - 9\beta_n^1\beta_n^2 - 1 &> -\frac{1}{2\alpha_n} \\
3\beta_n^1 - 9\beta_n^1\beta_n^2 &> 1 - \frac{1}{2\alpha_n} \\
\beta_n^1\left(1 - 3\beta_n^2\right) &> \frac{1}{3} - \frac{1}{6\alpha_n} \\
\beta_n^1 &> \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6\alpha_n}\right)\frac{1}{\left(1-3\beta_n^2\right)}
\end{aligned}
$$

olur. Buradan, $\max\{\alpha_n\} = \frac{1}{2}$ için

$$
\begin{aligned}
\min\left\{\beta_n^1\right\} &= \max\left\{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6\alpha_n}\right)\frac{1}{\left(1-3\beta_n^2\right)}\right\} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6\max\{\alpha_n\}}\right)\frac{1}{\left(1-3\beta_n^2\right)} \\
&= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right)\frac{1}{\left(1-3\beta_n^2\right)} = 0 < \beta_n^1
\end{aligned}
$$

şeklinde hesaplanır.

Yukarıda elde edilen sonuçlara dayanarak, (6.17) ile verilen g kübik sisteminin kararsız $x_2^* = \frac{3}{2}$ sabit noktasını kararlı hale getiren Noor f.p.t. kontrol mekanizmasına ait parametre aralıkları aşağıdaki şekilde belirlenmiş olur:

$$
\begin{aligned}
\Gamma_\alpha &= \left(\min\{\alpha_n\}, \max\{\alpha_n\}\right) = \left(0, \frac{1}{2}\right) \\
\Gamma_{\beta^1} &= \left(\min\left\{\beta_n^1\right\}, \max\left\{\beta_n^1\right\}\right) = \left(0, \frac{1}{3}\right) \\
\Gamma_{\beta^2} &= \left(\min\left\{\beta_n^2\right\}, \max\left\{\beta_n^2\right\}\right) = \left(0, \frac{1}{3}\right).
\end{aligned}
\tag{6.23}
$$

6.2.1.1 Γ_α, Γ_{β^i} $(i = 1,2)$ Kararlılık Aralığında Yörünge Dinamiklerinin Analizi

Bu başlık altında; bir önceki bölümde analitik olarak belirlenen $\Gamma_\alpha, \Gamma_{\beta^i}$ $(i = 1,2)$ kontrol parametre aralıklarında (6.17) kübik sisteminin kaotik yörüngelerinin kararlı davranışa geçişi bilgisayar simülasyonları üzerinden gösterilecektir. Tüm bilgisayar analizleri Matlab [155] programı kullanılarak yapılmıştır.

Öncelikle, (6.17) kübik sisteminin herhangi bir $x_0 \in [1,2]$ başlangıç değerindeki yörüngeleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
x_1 &= g_\mu(x_0) = 1+(x_0-1)(4x_0-7)^2 \\
x_2 &= g_\mu\big(g_\mu(x_0)\big) = 1-3(x_0-1)(4x_0-7)^2+4(x_0-1)^2(4x_0-7)^4 \\
&\vdots \\
x_{n+1} &= g_\mu\Big(g_\mu^n(x_0)\Big) = 1+\Big(g_\mu^n(x_0)-1\Big)\Big(4g_\mu^n(x_0)-7\Big)^2.
\end{aligned}$$

Kabul edelim ki; başlangıç değeri $x_0 = 1.3333$ olsun. Bu takdirde, kübik sistemin ilk 100 yörüngesi hesaplandığında

$$\Big(1.3333, g_\mu(1.3333), g_\mu^2(1.3333), g_\mu^3(1.3333), \ldots, g_\mu^{n+1}(1.3333)\Big)$$
$$(1.3333, 1.9260, 1.4588, \ldots, 1.0119, 1.1034, 1.6918, 1.0375, 1.3049, 1.9664, \ldots)$$

iterasyon dizisi elde edilir ve bu yörüngenin bir noktaya yakınsamadığı, düzensiz bir periyod izlediği açık olarak görülmektedir. Şimdi bu başlangıç noktasındaki kararsız yörüngelerin kararlı olduğu parametre aralığı olarak belirlenen (6.23) ile verilen $\Gamma_\alpha, \Gamma_{\beta^i}$ $(i=1,2)$ aralığından değerler seçelim ve (6.19) ile verilen Noor f.p.t. kontrol mekanizmasına ait dinamik davranışı inceleyelim.

Bir $x_0 \in [1,2]$ başlangıç değeri için (6.19) ile verilen Noor f.p.t. kontrol mekanizması, $g_\mu(x_0) = 1+(x_0-1)(4x_0-7)^2$ kübik fonksiyonu altında itere edildiğinde

$$\begin{aligned}
x_1 &= N\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0) = (1-\alpha_n)x_0+\alpha_n \\
&\times[-1+x_0-\beta_n^1 x_0+\beta_n^1[1+(x_0-1)\big(1+8\beta_n^2\big(6-7x_0+2x_0^2\big)\big) \\
&\times(-7+4x_0+32\beta_n^2\big(-6+13x_0-9(x_0)^2+2x_0^3\big))]^2 \\
&\times(7-(4x_0-\beta_n^1(x_0+\beta_n^1(1+(x_0-1)\big(1+8\beta_n^2\big(6-7x_0+2x_0^2\big)\big) \\
&\times\big(-7+4x_0+32\beta_n^2\big(-6+13x_0-9x_0^2+2x_0^3\big)\big)^2))^2] \\
x_2 &= N\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_1) = N\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)[N\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)] = (1-\alpha_n)N\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)+\alpha_n \\
&\times[-1+N\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)-\beta_n^1 N\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)+\beta_n^1[1+\big(N\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)-1\big) \\
&\times(1+8\beta_n^2(6-7N\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)+2N^2\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)))(-7+4N\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0) \\
&+32\beta_n^2\big(-6+13N\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)-9N^2\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)+2N^3\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)\big)]^2 \\
&\times(7-(4N\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)-\beta_n^1(N\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)+\beta_n^1(1+(N\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)-1) \\
&\times(1+8\beta_n^2(6-7N\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)+2N^2\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)))(-7+4N\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0) \\
&+32\beta_n^2(-6+13N\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)-9N^2\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)+2N^3\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)))^2))^2]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_3 &= N\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_2) = N\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)[N^2\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)] = (1-\alpha_n)N^2\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)+\alpha_n\\
&\times[-1+N^2\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)-\beta_n^1N^2\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)+\beta_n^1[1+(N^2\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)-1)\\
&\times(1+8\beta_n^2(6-7N^2\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)+2N^4\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)))(-7+4N^2\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)\\
&+32\beta_n^2(-6+13N^2\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)-9N^4\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)+2N^6\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)))]^2\\
&\times(7-(4N^2\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)-\beta_n^1(N^2\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)+\beta_n^1(1+N^2\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)-1)\\
&\times(1+8\beta_n^2(6-7N^2\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)+2N^4\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)))(-7+4N^2\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)\\
&+32\beta_n^2(-6+13N^2\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)-9N^4\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)+2N^6\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)))^2))^2]\\
&\vdots\\
x_{n+1} &= N\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_n) = N\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)[N^n\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)] = (1-\alpha_n)N^n\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)+\alpha_n\\
&\times[-1+N^n\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)-\beta_n^1N^n\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)+\beta_n^1[1+(N^n\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)-1)\\
&\times(1+8\beta_n^2(6-7N^n\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)+2N^{2n}\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)))(-7+4N^n\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)\\
&+32\beta_n^2(-6+13N^n\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)-9N^{2n}\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)+2N^{3n}\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)))]^2\\
&\times(7-(4N^n\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)-\beta_n^1(N^n\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)+\beta_n^1(1+(N^n\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)-1)\\
&\times(1+8\beta_n^2(6-7N^n\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)+2N^{2n}\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)))(-7+4N^n\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)\\
&+32\beta_n^2(-6+13N^n\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)-9N^{2n}\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)+2N^{3n}\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(x_0)))^2))^2] \qquad (6.24)
\end{aligned}
$$

şeklinde yörünge dizisi elde edilir.

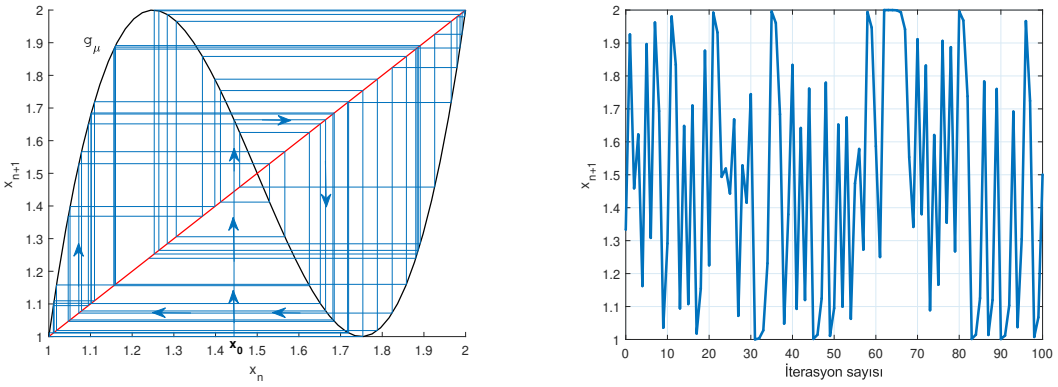
Kabul edelim ki; $x_0 = 1.3333$ başlangıç noktası olsun. (6.23) ile verilen $\Gamma_\alpha, \Gamma_{\beta^i}$ $(i = 1,2)$ kararlılık aralığından $\alpha_n = 0.25$, $\beta_n^1 = \beta_n^2 = 0.15$ parametre değerlerini seçelim. Eğer (6.24) göz önüne alınarak, $N\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)$ $(i = 1,2)$ kontrol mekanizmasının $x_0 = 1.3333$ başlangıç noktasındaki iterasyon dizisinin ilk 100 yörüngesi Matlab yazılımı ile hesaplanırsa aşağıdaki şekilde bir yörünge oluşturur:

$$
\Big(1.3333, N\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)(1.3333), N\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)^2(1.3333),\ldots,N\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)^{n+1}(1.3333),\ldots\Big)
$$

$$
(1.3333, 1.4508, 1.4876, 1.4969, 1.4992, 1.4998, \mathbf{1.500,1.500,1.500,1.500},\ldots).
$$

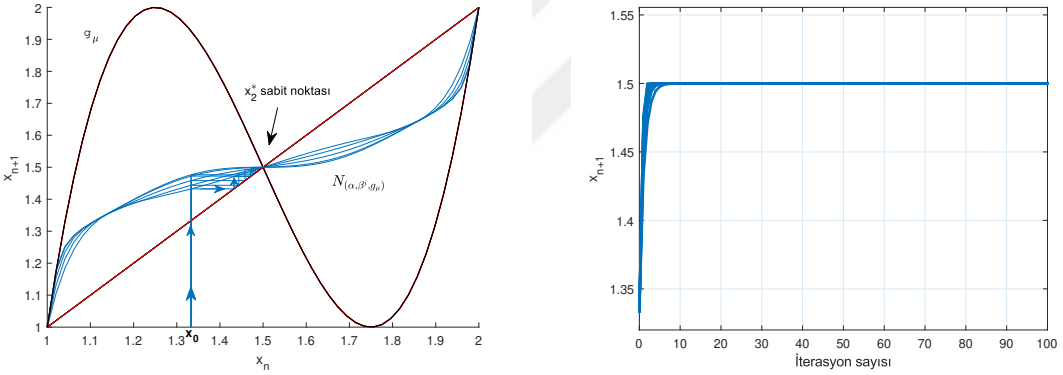
Yukarıda görüldüğü üzere; bir $x_0 = 1.3333$ başlangıç noktasında kübik sistemin yörüngesi kaotik yani düzensiz iken $N\big(\alpha,\beta^i,g_\mu\big)$ $(i = 1,2)$ kontrol mekanizması altında oluşan yörüngeler tek bir noktaya yakınsamaktadır ve yakınsadığı nokta da sistemin $x_2^* = 1.5$ sabit noktasıdır. Yani, x_2^* sabit noktası kübik dönüşüm için itici yörünge oluşturur iken Noor f.p.t. kontrol mekanizmasının belirlediği parametre aralığından seçilen değerler için çekici yörüngelere dönüşerek kararlı sabit nokta olmaktadır. Elde edilen yörüngelerin grafik gösterimleri aşağıda verilmiştir. Şekil 6.1'de verilen grafiklerde $x_0 = 1.3333$ başlangıç değeri alınarak itere edilen g_μ kübik sisteminin $x_2^* = 1.5$ sabit noktasının itici bir sabit nokta olduğu ve ıraksak veya kaotik bir yörünge çizdiği açık olarak görülmektedir. Şekil 6.2'de ise $\alpha_n = 0.25$,

$\beta_n^1 = 0.15$ ve $0 < \beta_n^2 < 0.3333$ parametre aralığında $x_2^* = 1.5$ sabit noktasının kontrol mekanizması ile çekici sabit nokta olarak davrandığı ve tüm yörüngelerin bu sabit noktaya yakınsadığı fonksiyon ve yörünge diyagramları üzerinde gösterilmiştir.



(a) Cobweb diyagramı **(b)** Kararsız yörüngeler

Şekil 6.1 g_μ kübik sisteminin x_2^* sabit noktasının itici ve kararsız yörünge davranışı



(a) Cobweb diyagramı **(b)** Kararlı yörüngeler

Şekil 6.2 g_μ kübik sisteminin x_2^* sabit noktasının $N\left(\alpha, \beta^i, g_\mu\right)$ $(i = 1, 2)$ kontrol mekanizmasının parametreleriyle çekici ve kararlı yörüngelere dönüşmesi

6.2.1.2 Γ_α, Γ_{β^i} $(i = 1, 2)$ Kararlılık Aralığının Dışında Noor f.p.t. Kontrol Mekanizmasının Dinamik Davranış Analizi

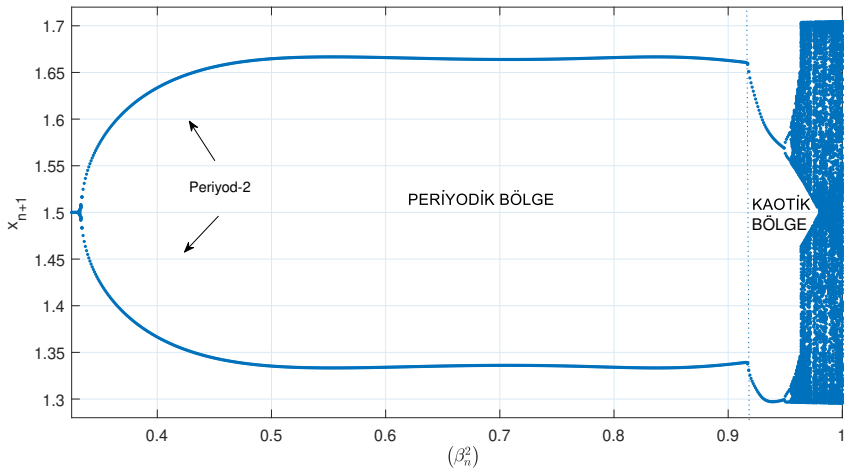
Önceki bölümde; Teorem 6.2 koşulları altında, kübik sistemin kararsız (itici) olan $x_2^* = \frac{3}{2}$ sabit noktasının (6.23) ile verilen Γ_α, Γ_{β^i} $(i = 1, 2)$ kararlılık aralığında kararlı (çekici) sabit noktaya dönüştüğü gösterildi. Bu bölümde, Noor f.p.t. kontrol mekanizmasının kararlılık aralığının dışında yörüngelerinin dinamik davranışı incelenecektir. Bu nedenle, belirli bir başlangıç koşulu altında kararlılık aralığının dışında seçilen parametre değerleri alınarak yörüngelerin davranış analizleri nümerik hesaplamalarla belirlenecek ve bilgisayar simülasyonları ile desteklenecektir.

Kabul edelim ki; $x_0 = 1.3333$ başlangıç koşulu olsun. Tablo 6.1'de $x_0 = 1.3333$ başlangıç noktası alınarak $(\alpha_n), \left(\beta_n^i\right)$ $(i = 1,2)$ kontrol parametrelerinin $N\left(\alpha, \beta^i, g_\mu\right)$ $(i = 1,2)$ kaos kontrol mekanizması üzerindeki etkisi incelenmiştir. Kontrol aralığının dışına çıkıldığında sistem önce periyodik daha sonra kaotik bölge oluşturmaktadır.

Tablo 6.1 $\Gamma_\alpha, \Gamma_{\beta^i}$ kararlılık aralığının dışında $N\left(\alpha, \beta^i, g_\mu\right)$ $(i = 1,2)$ kontrol mekanizmasında oluşan dinamik bölgeler

$(\alpha_n), \left(\beta_n^1\right)$ Parametre Değerleri	$\left(\beta_n^2\right)$ Parametre Değeri	$N\left(\alpha, \beta^i, g_\mu\right)$ $(i = 1,2)$ Kontrol Mekanizması
$0 < \alpha_n < 0.5,\ 0 < \beta_n^1 < 0.3333$	$0 < \beta_n^2 < 0.3333$	Kararlı Davranış
$\alpha_n = 0.5,\ \beta_n^1 = 0.3333$	$0.3333 \leq \beta_n^2 < 0.9555$ $0.9555 \leq \beta_n^2 < 1$	Periyodik Davranış Kaotik Davranış
$\alpha_n = 0.75,\ \beta_n^1 = 0.6666$	$0.3333 \leq \beta_n^2 < 0.6056$ $0.6056 \leq \beta_n^2 < 1$	Periyodik Davranış Kaotik Davranış
$\alpha_n = \beta_n^1 = 0.95$	$0.3333 \leq \beta_n^2 < 1$	Kaotik Davranış

Örneğin; $x_0 = 1.3333$ başlangıç şartı altında, $\alpha_n = 0.5$, $\beta_n^1 = 0.3333$ parametre değerleri için kontrol mekanizması $\beta_n^2 \in [0.3333, 0.9555)$ aralığında periyodik ve $\beta_n^2 \in [0.9555, 1)$ aralığında kaotik davranış göstermektedir. Bu parametre değerlerine ait oluşan bölgelerin tümü Şekil 6.3'de verilen çatallanma diyagramında gösterilmiştir.



Şekil 6.3 $N\left(\alpha, \beta^i, g_\mu\right)$ $(i = 1,2)$ kontrol mekanizmasının $x_0 = 1.3333$ başlangıç noktası için $\alpha_n = 0.5$, $\beta_n^1 = 0.3333$,$\beta_n^2 \in [0.3333, 1)$ parametre aralığında çatallanma diyagramı

$N\left(\alpha,\beta^i,g_\mu\right)$ $(i=1,2)$ kontrol mekanizması $\alpha_n=0.5$, $\beta_n^1=0.3333$ iken $\beta_n^2=0.3333$ parametre değerini aldığında periyodu ikiye katlayan çatallanmaya uğramaktadır ve iki kararlı çözüm arasında periyodik bir döngü oluşmaktadır. Bu parametre değerleri için $x_0=1.3333$ başlangıç noktasındaki ilk 1000 yörünge Matlab programı ile hesaplandığında

$$\left(1.3333,N\left(\alpha,\beta^i,g_\mu\right)(1.3333),\ldots,N^{998}\left(\alpha,\beta^i,g_\mu\right)(1.3333),N^{999}\left(\alpha,\beta^i,g_\mu\right)(1.3333),\ldots\right)$$
$$(1.3333,1.6066,\ldots,1.4950,1.5050,1.4950,1.5050,1.4950,1.5050,1.4950,\ldots)$$

şeklinde elde edilir. Tanım 3.3'e göre; $p_1=1.4950$ ve $p_2=1.5050$ noktaları $i=1,2$ için

$$N\left(\alpha,\beta^i,g_\mu\right)(p_1)=N\left(\alpha,\beta^i,g_\mu\right)(1.4950)=1.5050=p_2$$
$$N\left(\alpha,\beta^i,g_\mu\right)(p_2)=N\left(\alpha,\beta^i,g_\mu\right)(1.5050)=1.4950=p_1$$

sağladığından 2-periyodlu periyodik sabit noktalardır. Teorem 3.4 gereğince; p_1 ve p_2 noktalarının kararlı (çekici) veya kararsız (itici) sabit noktalar olup olmadığını belirlemenin yolu

$$\left|\left[N\left(\alpha,\beta^i,g_\mu\right)^2\right]'(x^*)\right|<1$$

koşulunun sağlanmasıdır. Bu koşulun sağlanması için periyodik yörüngeler için zincir kuralı uygulanırsa $x^*=p_1=1.4950$ ve $x^*=p_2=1.5050$ için

$$\left|\left[N\left(\alpha,\beta^i,g_\mu\right)^2\right]'(p_1)\right|=\left|N\left(\alpha,\beta^i,g_\mu\right)'(p_2).N\left(\alpha,\beta^i,g_\mu\right)'(p_1)\right| \tag{6.25}$$

türevlerinin hesaplanması gerekmektedir.

Noor f.p.t. kontrol mekanizmasının (6.20) ile verilen türev fonksiyonu altında p_1 ve p_2 periyodik sabit noktalarının değerleri hesaplandığında

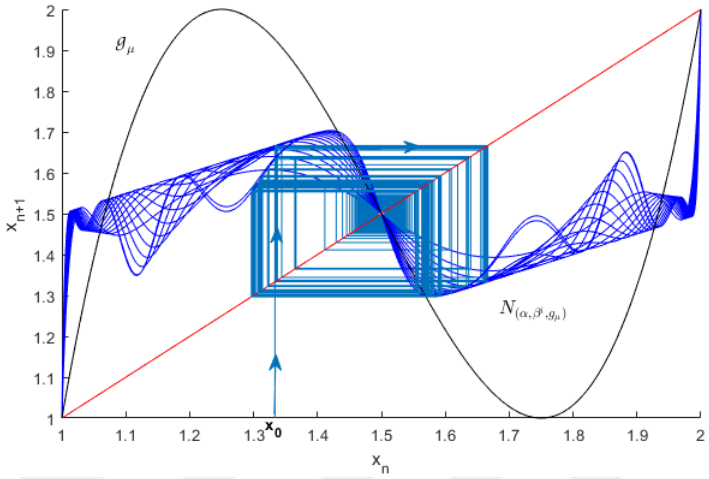
$$N\left(\alpha,\beta^i,g_\mu\right)'(p_2)=N\left(\alpha,\beta^i,g_\mu\right)'(1.5050)=-0.9986$$
$$N\left(\alpha,\beta^i,g_\mu\right)'(p_1)=N\left(\alpha,\beta^i,g_\mu\right)'(1.4950)=-0.9986$$

elde edilir. Bu değerler (6.25)'de yerine yazılırsa

$$\left|\left[N\left(\alpha,\beta^i,g_\mu\right)^2\right]'(p_1)\right|=|(-0.9986).(-0.9986)|=0.9972<1$$

elde edilir. Dolayısıyla, $p_1=1.4950$ ve $p_2=1.5050$ sabit noktaları 2-periyodlu kararlı veya çekici periyodik sabit noktalardır ve bu noktaların oluşturduğu yörüngeler kararlı periyodik yörüngelerdir.

Şekil 6.4'de, $N\left(\alpha,\beta^i,g_\mu\right)$ $(i=1,2)$ kontrol mekanizmasının $\alpha_n=0.5$, $\beta_n^1=0.3333$ ve $\beta_n^2\in[0.3333,0.9555)$ parametre aralıklarında oluşan periyodik bölgesine ait fonksiyon diyagramı verilmiştir. $x_0=1.3333$ başlangıç değeri alınarak kontrol mekanizması periyodik parametre değerleri altında itere edildiğinde $x_2^*=\frac{3}{4}$ sabit noktasının etrafında çekici bir yörünge oluşturduğu görülmektedir. Bu davranış periyodik sabit noktaların kararlı yörüngeler oluşturduğu anlamına gelmektedir.



Şekil 6.4 $N\left(\alpha,\beta^i,g_\mu\right)$ $(i=1,2)$ kontrol mekanizmasının $x_0=1.3333$ başlangıç noktasındaki periyodik yörüngeleri

6.3 Kararsız Periyodik Noktaların Stabilize Edilmesi

Bir-boyutlu diskrit dinamik sistemlerin kararsız periyodik yörüngelerinin kararlı hale dönüştürülmesi kaos kontrolü için önemlidir. Böylelikle kaosun başlangıcının bir işareti olan periyodik davranış yakınsak bir yörüngeye dönüştürülerek kontrol edilmeye daha uygun hale gelir. Bu bölümde, bir-boyutlu diskrit dinamik sistem olan f_μ orijinal sisteminin periyodik yörüngelerinin üç adımlı sabit nokta iterasyon yöntemi ile kurulan $N\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)$ $(i=1,2)$ olarak gösterilen Noor f.p.t. kontrol mekanizması ile stabilitesinin sağlanması amaçlanmıştır. Bölüm 5.3'de bahsedildiği üzere, orijinal sistem ile sabit nokta kaos kontrol mekanizmalarının periyodik noktaları bire-bir eşlenmesine rağmen farklı yerlerde bulunmaktadır. Bunun nedeni, $k>1$ ise $x^{*(k)}=f_\mu^k(x^{*(k)})$ ve $x^{*(k)}=N^k\left(\alpha,\beta,f_\mu\right)(x^{*(k)})$ denklemlerinin çözümlerinin farklı olmasıdır. Bu sebeple, periyodik yörüngelerin yakınsaklığının sağlanması için büyümeye bağlı Noor f.p.t. kontrol mekanizmasının dinamik sistemlerin genel özelliklerini sağlayacak şekilde yeniden düzenlenmesi gerekmektedir.

$x \in [a,b]$ olsun ve $f_\mu^m = \underbrace{f_\mu \circ f_\mu \circ \cdots \circ f}_{n \text{ defa}}$ bileşkesi f_μ fonksiyonunun m. tekrarını göstersin. $(\alpha_n), \left(\beta_n^i\right)$ $(i=1,2)$ kontrol parametreleri olmak üzere (6.1) ile verilen Noor f.p.t. kontrol mekanizmasını aşağıdaki şekilde yeniden tanımlayalım:

$$x_{n+1} = N_{(m)}\left(\alpha, \beta^i, f_\mu\right)(x^*) = (1-\alpha_n)\, x_n + \alpha_n f_\mu^m \left[x_n + \beta_n^1 \left(f_\mu^m \left(x_n + \beta_n^2 \left(f_\mu^m (x_n) - x_n\right)\right) - x_n\right)\right]. \tag{6.26}$$

(6.26) ile tanımlanan üç parametreye bağlı sabit nokta kontrol mekanizmasının Teorem 6.1 ve Teorem 6.2'de ispatlanan diskrit dinamik sistemlere ait genel özellikleri, m-periyodlu periyodik sabit noktalar için aşağıda verilmiştir.

Teorem 6.3. *(6.26) ile verilen Noor f.p.t. kontrol mekanizması, f_μ^m orijinal sistemi ile aynı reel m-periyodlu periyodik sabit noktalar kümesini paylaşırlar. Yani, $x^* \in [a,b]$ için $f_\mu^m(x^*) = x^*$ ise $N_{(m)}\left(\alpha, \beta^i, f_\mu\right)(x^*) = x^*$ $(i=1,2)$'dır. Tersi, $y_n^1 = x^*$ koşulu altında, her zaman doğrudur.*

İspat. $x^* \in [a,b]$, f_μ orijinal sisteminin m-periyodlu periyodik bir sabit noktası olsun, yani $f_\mu^m(x^*) = x^*$ dır. Bu takdirde, (6.26) ile verilen Noor f.p.t. kontrol mekanizması $i=1,2$ olmak üzere x^* periyodik sabit noktası için

$$\begin{aligned} N_{(m)}\left(\alpha, \beta^i, f_\mu\right)(x^*) &= (1-\alpha_n)\, x^* + \alpha_n f_\mu^m \left[x^* + \beta_n^1 \left(f_\mu^m \left(x^* + \beta_n^2 \left(f_\mu^m (x^*) - x^*\right)\right) - x^*\right)\right] \\ &= (1-\alpha_n)\, x^* + \alpha_n f_\mu^m \left(x^* + \beta_n^1 \left(f_\mu^m (x^*) - x^*\right)\right) \\ &= (1-\alpha_n)\, x^* + \alpha_n f_\mu^m \left(x^* + \beta_n^1 (x^* - x^*)\right) \\ &= x^* + \alpha_n (x^* - x^*) \\ &= x^* \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla, x^* periyodik sabit noktası aynı zamanda $N_{(m)}\left(\alpha, \beta^i, f_\mu\right)$ $(i=1,2)$ kontrol mekanizmasının da m-periyodlu periyodik sabit noktasıdır.

Tersine, $x^* \in [a,b]$ noktası (6.26) ile verilen kontrol mekanizmasının m-periyodlu periyodik reel bir sabit noktası olsun. Teoremin hipotezinde verilen $y_n^1 = x^*$ koşulu altında $N_{(m)}\left(\alpha, \beta^i, f_\mu\right)(x^*) = x^*$ $(i=1,2)$ ise

$$\begin{aligned} \alpha_n f_\mu^m \left(y_n^1\right) + (1-\alpha_n)\, x^* &= x^* \\ \alpha_n f_\mu^m (x^*) + (1-\alpha_n)\, x^* &= x^* \\ \alpha_n \left(f_\mu^m (x^*) - x^*\right) &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $\alpha_n \in (0,1)$ olduğundan $f_\mu^m (x^*) = x^*$ dır. Dolayısıyla, x^* sabit noktası f_μ orijinal sisteminin m-periyodlu periyodik bir sabit noktasıdır. İspat tamamlanır. ■

Teorem 6.4. *$x^* \in [a,b]$, f_μ orijinal sisteminin m-periyodlu kararsız periyodik bir sabit noktası olsun. $\left|f_\mu^{m\prime}(x^*)\right| \neq 1$ olmak üzere (6.26) ile verilen Noor f.p.t. kontrol mekanizmasının*

$$\left|N'_{(m)}\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x^*)\right| < 1$$

kararlılık koşulu altında, her $n \in \mathbb{N}$ için $(\alpha_n),\left(\beta_n^i\right) \subset (0,1)$ $(i=1,2)$ kontrol parametrelerinin etkin olduğu bir aralık bulmak her zaman mümkündür. Diğer bir ifadeyle, f_μ orijinal sisteminin x^* kararsız m-periyodlu periyodik sabit noktasını kararlı hale getiren $\alpha_n \in \Gamma_{(\alpha_n)} = (\min\{\alpha_n\},\max\{\alpha_n\})$, $\beta_n^i \in \Gamma_{\left(\beta_n^i\right)} = \left(\min\left\{\beta_n^i\right\},\max\left\{\beta_n^i\right\}\right)$ $(i=1,2)$ şeklinde uygun kontrol parametre aralıkları her zaman bulunur.

İspat. Teoremin hipotezinde verilen kararlılık koşulunun sağlanabilmesi için $N_{(m)}\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)$ $(i=1,2)$ kontrol mekanizmasının türev fonksiyonunun elde edilmesi gerekmektedir. (6.26) ile verilen Noor f.p.t. kontrol mekanizmasının türevi alındığında $i=1,2$ için

$$\begin{aligned} N'_{(m)}\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x_n) = 1-\alpha_n+\alpha_n f_\mu^{m\prime}\Big[x_n+\beta_n^1\Big(f_\mu^{m\prime}\Big(x_n+\beta_n^2\Big(f_\mu^{m\prime}(x_n)-x_n\Big)\Big)-x_n\Big)\Big] \\ \times\Big[1+\beta_n^1\Big(f_\mu^{m\prime}\Big(x_n+\beta_n^2\Big(f_\mu^{m\prime}(x_n)-x_n\Big)\Big)\Big(1+\beta_n^2\Big(f_\mu^{m\prime}(x_n)-1\Big)\Big)-1\Big)\Big] \end{aligned}$$

elde edilir. x^* periyodik sabit noktası için türev denklemi düzenlenirse $i=1,2$ için

$$\begin{aligned} N'_{(m)}\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x^*) &= 1-\alpha_n+\alpha_n f_\mu^{m\prime}\Big[x^*+\beta_n^1\Big(f_\mu^{m\prime}\Big(x^*+\beta_n^2\Big(f_\mu^{m\prime}(x^*)-x^*\Big)\Big)-x^*\Big)\Big] \\ &\times\Big[1+\beta_n^1\Big(f_\mu^{m\prime}\Big(x^*+\beta_n^2\Big(f_\mu^{m\prime}(x^*)-x^*\Big)\Big)\Big(1+\beta_n^2\Big(f_\mu^{m\prime}(x^*)-1\Big)\Big)-1\Big)\Big] \\ &= 1-\alpha_n+\alpha_n f_\mu^{m\prime}(x^*)\Big[1+\beta_n^1\Big(f_\mu^{m\prime}(x^*)\Big(1+\beta_n^2\Big(f_\mu^{m\prime}(x^*)-1\Big)\Big)-1\Big)\Big] \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

$\left|f'_\mu(x^*)\right| > 1$ koşulu altında $N'_{(m)}\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x^*) < 1$ ve $N'_{(m)}\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x^*) > -1$ $(i=1,2)$ kararlılık durumları ayrı ayrı incelendiğinde ispatın geri kalan kısmı Teorem 6.2 ile benzer olduğundan aynı işlem süreci uygulanacaktır.

$f_\mu^{m\prime}(x^*) < -1$ koşulu altında m-periyodlu kararsız periyodik sabit noktalar için kontrol parametre aralıkları aşağıdaki şekilde elde edilmiştir:

$$\begin{aligned}
\alpha_n \in \Gamma_{(\alpha_n)} &= (\min\{\alpha_n\}, \max\{\alpha_n\}) \\
&= \left(0, \min\left\{\frac{-2}{f_\mu^{m\prime}(x^*)\left(1+\beta_n^1\left(f_\mu^{m\prime}(x^*)\left(1+\beta_n^2\left(f_\mu^{m\prime}(x^*)-1\right)\right)-1\right)\right)-1}\right\}\right) \\
\beta_n^1 \in \Gamma_{(\beta_n^1)} &= \left(\min\left\{\beta_n^1\right\}, \max\left\{\beta_n^1\right\}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c} \max\left\{\left(\frac{1-f_\mu^{m\prime}(x^*)}{f_\mu^{m\prime}(x^*)} - \frac{2}{\alpha_n f_\mu^{m\prime}(x^*)}\right)\frac{1}{f_\mu^{m\prime}(x^*)\left(1+\beta_n^2\left(f_\mu^{m\prime}(x^*)-1\right)\right)-1}\right\}, \\ \min\left\{\frac{1-f_\mu^{m\prime}(x^*)}{f_\mu^{m\prime}(x^*)} \cdot \frac{1}{f_\mu^{m\prime}(x^*)\left(1+\beta_n^2\left(f_\mu^{m\prime}(x^*)-1\right)\right)-1}\right\} \end{array}\right) \\
\beta_n^2 \in \Gamma_{(\beta_n^2)} &= \left(\min\left\{\beta_n^2\right\}, \max\left\{\beta_n^2\right\}\right) \\
&= \left(\max\left\{\left[\frac{1-f_\mu^{m\prime}(x^*)}{f_\mu^{m\prime 2}(x^*)\beta_n^1} + \frac{1-f_\mu^{m\prime}(x^*)}{f_\mu^{m\prime}(x^*)}\right]\frac{1}{\left(f_\mu^{m\prime}(x^*)-1\right)}\right\}, \frac{-1}{f_\mu^{m\prime}(x^*)}\right). \qquad (6.27)
\end{aligned}$$

Böylelikle, kararsız m-periyodlu bir periyodik sabit nokta, Noor f.p.t. kontrol mekanizmasının kontrol parametreleri ile belirlenen bir aralıkta kararlı hale dönüştürülebilir. ■

6.3.1 Kübik Sistemin Kararsız Periyodik Noktalarının Stabilize Edilmesi

Bu başlık altında, Bölüm 6.2.1'de kararsız sabit nokta yörüngelerinin incelendiği bir-boyutlu diskrit dinamik sistem olarak (6.17) ile verilen kübik sistemin kararsız yörüngelerinin kararlı olabilmesi için Noor f.p.t. kontrol mekanizmasına ait $(\alpha_n), \left(\beta_n^i\right)$ $(i = 1, 2)$ parametrelerinin belirlediği aralıklar elde edilecektir.

(6.17) ile verilen g_μ kübik sistemini yeniden ele alalım. İlk olarak, g_μ sisteminin 2-periyodlu periyodik periyodik sabit noktalarını elde etmek için $g_\mu^2(x^*) = g_\mu\left[g_\mu(x^*)\right] = x^*$ denkleminin köklerinin bulunması gerekmektedir. Sabit noktaları elde etmek için

$$\begin{aligned}
&g_\mu\left[1+(x_n-1)(4x_n-7)^2\right] = x^* \\
&1+(x^*-1)(4x^*-7)^2\left[4(x^*-1)(4x^*-7)^2-3\right]^2 = x^* \\
&(x^*-1)(4x^*-7)^2\left[4(x^*-1)(4x^*-7)^2-3\right]^2 = x^*-1 \\
&(x^*-1)\left[(4x^*-7)^2\left(4(x^*-1)(4x^*-7)^2-3\right)^2-1\right] = 0
\end{aligned}$$

denklemi çözüldüğünde $x_1^* = 1$, $x_2^* = \frac{3}{2}$ ve $x_3^* = 2$ olacak şekilde üç tanesi orijinal

sistemden gelen aşikar 2-periyodlu periyodik sabit nokta ile

$$x_{1,2}^{*(2)}=\frac{11\pm\sqrt{5}}{8},x_{3,4}^{*(2)}=\frac{13\pm\sqrt{5}}{8},x_{5,6}^{*(2)}=\frac{6\pm\sqrt{2}}{4}$$

olacak şekilde altı tanesi aşikar olmayan 2-periyodlu periyodik sabit nokta elde edilir. Bu sabit noktaların kararlı olup olmadıklarını test etmek amacı ile $g_\mu^2(x^*)$ fonksiyonunun türevi alınırsa

$$g_\mu^{2\prime}(x^*)=(4x^*-7)(12x^*-15)\left[4(x^*-1)(4x^*-7)^2-3\right)]\left[12(x^*-1)(4x^*-7)^2-3\right]$$

elde edilir. *Mathematica 9.0* [156] programı kullanılarak sabit noktaların türevleri hesaplandığında

$$g_\mu^{2\prime}\left(x_1^{*(2)}\right)=g_\mu^{2\prime}\left(x_2^{*(2)}\right)=-9<-1$$
$$g_\mu^{2\prime}\left(x_3^{*(2)}\right)=g_\mu^{2\prime}\left(x_4^{*(2)}\right)=-9<-1$$
$$g_\mu^{2\prime}\left(x_5^{*(2)}\right)=g_\mu^{2\prime}\left(x_6^{*(2)}\right)=9>1$$

şeklinde bulunur. Tanım 3.4 gereğince; aşikar olmayan tüm 2-periyodlu periyodik sabit noktaların kararsız oldukları görülmektedir. Ancak Teorem 6.2'nin hipotezine bağlı olarak, türevi -1'den küçük olan $x_{1,2}^{*(2)}=\frac{11\pm\sqrt{5}}{8}$, $x_{3,4}^{*(2)}=\frac{13\pm\sqrt{5}}{8}$ kararsız periyodik sabit noktaların parametre aralıkları hesaplanacaktır.

(6.26) ile tanımlı $N_{(m)}\left(\alpha,\beta^i,g_\mu\right)(x_n)$ Noor f.p.t. kontrol mekanizması $m=2$ için yeniden düzenlenirse

$$x_{n+1}=N_{(2)}\left(\alpha,\beta^i,g_\mu\right)(x_n)\equiv(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n g_\mu^2\left[x_n+\beta_n^1\left(g_\mu^2\left(x_n+\beta_n^2\left(g_\mu^2(x_n)-x_n\right)\right)-x_n\right)\right]$$

şeklinde tanımlanır. Bu algoritmanın analitik olarak çözümü oldukça zor olduğundan ötürü bilgisayar yazılım programları ile hesaplamalar yapılması gerekmektedir. Bununla birlikte, çözümün işlem prosedürleri Teorem 6.4'ün ispatında takip edilen yol ile tamamen aynı olduğundan (6.27)'de verilen kontrol parametrelerinin alt ve üst sınır denklemleri, $x_1^{*(2)}$ kararsız periyodik sabit noktası için uygulanacaktır.

İlk olarak, (6.27) aralığından (α_n) dizisinin minimum değerinin $\min\{\alpha_n\}=0$ olduğu bilinmektedir. (6.27)£den $\left(\beta_n^2\right)$ dizisinin maksimum değeri

$$\beta_n^2<\frac{-1}{g_\mu^{2\prime}\left(x_1^{*(2)}\right)}=\frac{1}{9}=\max\left\{\beta_n^2\right\}$$

olarak elde edilir. $\max\left\{\beta_n^2\right\}=\frac{1}{9}$ değeri için

$$\begin{aligned}\alpha_n &< \min\left\{\frac{-2}{\left(g_\mu^{2\prime}\left(x_1^{*(2)}\right)\left(1+\beta_n^1\left(g_\mu^{2\prime}\left(x_1^{*(2)}\right)\left(1+\beta_n^2\left(g_\mu^{2\prime}\left(x_1^{*(2)}\right)-1\right)\right)-1\right)\right)-1\right)}\right\}\\ &= \min\left\{\frac{-2}{10\left(9\beta_n^1-81\beta_n^1\beta_n^2-1\right)}\right\}=\frac{-2}{10\left(9\beta_n^1-81\beta_n^1\max\left\{\beta_n^2\right\}-1\right)}\\ &= \frac{-2}{10\left(9\beta_n^1-9\beta_n^1-1\right)}=\frac{1}{5}=\max\{\alpha_n\}\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. $\max\{\alpha_n\}=\frac{1}{5}$ için

$$\begin{aligned}\beta_n^1 &> \max\left\{\left(\frac{1-g_\mu^{2\prime}\left(x_1^{*(2)}\right)}{g^{2\prime}\left(x_1^{*(2)}\right)}-\frac{2}{\alpha_n g_\mu^{2\prime}\left(x_1^{*(2)}\right)}\right)\frac{1}{g_\mu^{2\prime}\left(x_1^{*(2)}\right)\left(1+\beta_n^2\left(g_\mu^{2\prime}\left(x_1^{*(2)}\right)-1\right)\right)-1}\right\}\\ &= \max\left\{\left(\frac{10}{9}-\frac{2}{9\alpha_n}\right)\frac{1}{10\left(1-9\beta_n^2\right)}\right\}=\left(\frac{10}{9}-\frac{2}{9\max\{\alpha_n\}}\right)\frac{1}{10\left(1-9\beta_n^2\right)}\\ &= \left(\frac{10}{9}-\frac{10}{9}\right)\frac{1}{10\left(1-9\beta_n^2\right)}=0=\min\left\{\beta_n^1\right\}\end{aligned}$$

olur. $\min\left\{\beta_n^2\right\}=0$ iken

$$\begin{aligned}\beta_n^1 &< \min\left\{\left(\frac{1-g_\mu^{2\prime}\left(x_1^{*(2)}\right)}{g_\mu^{2\prime}\left(x_1^{*(2)}\right)}\right)\frac{1}{\left(g_\mu^{2\prime}\left(x_1^{*(2)}\right)\left(1+\beta_n^2\left(g_\mu^{2\prime}\left(x_1^{*(2)}\right)-1\right)\right)-1\right)}\right\}\\ &= \frac{1}{9}\frac{1}{\max\left\{1-9\beta_n^2\right\}}=\frac{1}{9}\frac{1}{\left(1-9\min\left\{\beta_n^2\right\}\right)}=\frac{1}{9}=\max\left\{\beta_n^1\right\}\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buradan, $\max\left\{\beta_n^1\right\}=\frac{1}{9}$ olduğunda

$$\begin{aligned}\beta_n^2 &> \max\left\{\left[\frac{1-g_\mu^{2\prime}\left(x_1^{*(2)}\right)}{\left(g_\mu^{2\prime}\right)^2\left(x_1^{*(2)}\right)\beta_n^1}+\frac{1-g_\mu^{2\prime}\left(x_1^{*(2)}\right)}{g_\mu^{2\prime}\left(x_1^{*(2)}\right)}\right]\frac{1}{\left(g_\mu^{2\prime}\left(x_1^{*(2)}\right)-1\right)}\right\}\\ &= \left(\frac{10}{81\max\left\{\beta_n^1\right\}}-\frac{10}{9}\right)\frac{1}{8}=\left(\frac{10}{9}-\frac{10}{9}\right)\frac{1}{8}=0=\min\left\{\beta_n^2\right\}\end{aligned}$$

şeklinde bulunmaktadır.

Sonuç olarak; kübik sistemin $x_1^{*(2)}$ kararsız 2-periyodlu periyodik sabit noktası için Noor f.p.t. kontrol mekanizmasının kontrol parametrelerinin belirlediği kararlılık aralıkları aşağıdaki şekilde elde edilmiştir:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{(\alpha_n)} &= (\min\{\alpha_n\}, \max\{\alpha_n\}) = \left(0, \frac{1}{5}\right), \\
\Gamma_{(\beta_n^1)} &= \left(\min\left\{\beta_n^1\right\}, \max\left\{\beta_n^1\right\}\right) = \left(0, \frac{1}{9}\right), \\
\Gamma_{(\beta_n^2)} &= \left(\min\left\{\beta_n^2\right\}, \max\left\{\beta_n^2\right\}\right) = \left(0, \frac{1}{9}\right).
\end{aligned} \tag{6.28}$$

Burada, $g_\mu^{2\prime}\left(x_1^{*(2)}\right) = g_\mu^{2\prime}\left(x_2^{*(2)}\right) = g_\mu^{2\prime}\left(x_3^{*(2)}\right) = g_\mu^{2\prime}\left(x_4^{*(2)}\right) = -9$ olduğundan (6.28) ile vreilen kararlılık aralıkları yalnızca $(x_1^{*(2)})$ periyodik sabit noktasının değil aynı zamanda $(x_2^{*(2)}), (x_3^{*(2)}), (x_4^{*(2)})$ periyodik sabit noktalarının da kontrol aralığıdır.

6.4 Noor İterasyon Yöntemi için Lyapunov üsteli

m-periyodlu periyodik yörüngeler için Bölüm 4.4'de n adımlı iterasyon yöntemleri için en genel formda verilen Lyapunov üstel fonksiyonu, üç adımlı Noor f.p.t. kaos kontrol mekanizmasının 2-periyodlu periyodik yörüngeleri için aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\lambda = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2} \ln\left|N'\left(\alpha, \beta^i, g_\mu\right)(x_k)\right|, \ (i = 1, 2). \tag{6.29}$$

Bu bölümde, $x_1^{*(2)}$ ve $x_2^{*(2)}$ periyodik sabit noktalarının kararlılığını test etmek için Lyapunov üsteli tekniğinin uygulanması yeterlidir. Öncelikli olarak, $x_1^{*(2)}$ ve $x_2^{*(2)}$ periyodik sabit noktalarının kübik fonksiyondaki türevleri aşağıda verilen şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned}
g_\mu'\left(x_1^{*(2)}\right) &= \left(4x_1^{*(2)} - 7\right)\left(12x_1^{*(2)} - 15\right) \\
&= \left[4 \times \left(\frac{11+\sqrt{5}}{8}\right) - 7\right] \times \left[12 \times \left(\frac{11+\sqrt{5}}{8}\right) - 15\right] \\
&= -1.8541 \\
g_\mu'\left(x_2^{*(2)}\right) &= \left(4x_2^{*(2)} - 7\right)\left(12x_2^{*(2)} - 15\right) \\
&= \left[4 \times \left(\frac{11-\sqrt{5}}{8}\right) - 7\right] \times \left[12 \times \left(\frac{11-\sqrt{5}}{8}\right) - 15\right] \\
&= 4.8541.
\end{aligned}$$

Şimdi, (6.28) ile elde edilen kararlılık aralığından $(\alpha_n) = 0.15$, $\left(\beta_n^1\right) = \left(\beta_n^2\right) = 0.02$ değerlerini seçelim. (6.4) türev fonksiyonu kullanılarak bu parametre değerlerinde

kontrol mekanizmasının türevi $i = 1, 2$ için

$$N'\left(\alpha, \beta^i, g_\mu\right)(x_1^{*(2)}) = 0.5872$$
$$N'\left(\alpha, \beta^i, g_\mu\right)(x_2^{*(2)}) = 1.6397$$

olarak hesaplanır. Elde edilen türev değerleri (6.29)'da yerine yazılırsa ve $x_1^{*(2)}$ ve $x_2^{*(2)}$ kararsız 2-periyodlu periyodik sabit noktalar için Lyapunov üsteli aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2} \ln\left|N'\left(\alpha, \beta^i, g_\mu\right)(x_k^{(2)})\right|, \quad (i = 1, 2) \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln\left|N'\left(\alpha, \beta^i, g_\mu\right)(x_1^{*(2)})\right| + \ln\left|N'\left(\alpha, \beta^i, g_\mu\right)(x_2^{*(2)})\right|\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln|0.5872| + \ln|1.6397|\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-0.5324 + 0.4945\right) \\
&= -0.0379.
\end{aligned}$$

$\lambda = -0.0379 < 0$ olduğundan g_μ kübik sisteminin yörüngesinin seçilen parametre aralığında kararlı davrandığı sonucuna ulaşılır. Böylelikle, g_μ sisteminin 2-periyodlu periyodik kararsız sabit noktaları Noor f.p.t. kontrol mekanizması ile kararlı hale dönüştürülmüş olur.

6.5 Uygulama: Trafik Akış Modellerinin Noor İterasyon Yöntemi ile Kaos Kontrolü

Sabit nokta iterasyon yöntemleri, trafik akış problemlerinde ortaya çıkan kaosu kontrol etmek için trafik operatörleri ve planlayıcılarına kullanışlı bir metot sunmaktadır. İterasyon yöntemleri ile kurulan trafik akış modelleri ile yol sisteminin servis ve güvenlik seviyesi geliştirilebilir, böylece trafik kazalarının oranının azaltılması sağlanabilir. Trafik operatörleri yol sisteminin hizmet düzeyini ve güvenliğini iyileştirmek için istikrarlı trafik koşullarını sağlamak zorunda olduğundan trafik akışının kaosu kontrol edilmelidir. Trafik denetleyicileri, istenen hizmet düzeyine göre bir otoyol tasarımı yaparak kaotik trafiği kontrol edebilecek uygulanabilir bir kontrol modeli oluşturmak isterler. Bizim çalışmamız bu noktada, trafik operatörü ve planlayıcılarına iterasyon yöntemleri ile oluşturulan trafik kontrol modelleri sunarak uygun parametre aralıklarıyla trafiğin kaos kontrolünü sağlamaktadır.

Bir-boyutlu diskrit dinamik trafik akış modeli; (6.1) denklemi ile Bölüm 5.5'de verilmiş ve iki parametre içeren Ishikawa iterasyon yöntemi için geliştirilmiştir. Bu bilgilerden esinlenerek, bu bölümde üç parametre içeren Noor iterasyon yöntemi ile yeni bir trafik akış modeli tanımlanacaktır.

Kaotik trafik akış modeli olarak lojistik dönüşüm formunda tanımlanan

$$f_\mu(\nu_n) = \frac{u_f}{\overline{u}}\nu_n(1-\nu_n)$$

dönüşümü, (6.1) ile verilen Noor kontrol mekanizmasına aşağıdaki şekilde uygulansın:

$(\alpha_n), \left(\beta_n^i\right) \subset (0,1)$ $(i=1,2)$ trafik akış değişkenleri olmak üzere, Noor trafik akış kontrol modeli

$$\begin{aligned}
\nu_{n+1} &= N\left(\alpha, \beta^i, f_\mu\right)(\nu_n) \\
&\equiv (1-\alpha_n)\,\nu_n + \alpha_n f_\mu\left[\nu_n + \beta_n^1\left(f_\mu\left(\nu_n + \beta_n^2\left(f_\mu(\nu_n) - \nu_n\right)\right) - \nu_n\right)\right] \\
&= (1-\alpha_n)\,\nu_n + \alpha_n f_\mu[\nu_n + \beta_n^1(f_\mu(\nu_n + \beta_n^2(\frac{u_f}{\overline{u}}\nu_n(1-\nu_n) - \nu_n)) - \nu_n)] \\
&= \nu_n - \alpha_n\nu_n + \alpha_n\frac{u_f}{\overline{u}}[\nu_n - \beta_n^1\nu_n - \beta_n^1\frac{u_f}{\overline{u}}(-1+\beta_n^2(1+\frac{u_f}{\overline{u}}(-1+\nu_n)))\nu_n \\
&\times (1+(-1+\beta_n^2-\beta_n^2\frac{u_f}{\overline{u}})x + \beta_n^2\frac{u_f}{\overline{u}}\nu_n^2)][1+(-1+\beta_n^1)\nu_n + \beta_n^1\frac{u_f}{\overline{u}} \\
&\times (-1+\beta_n^2(1+\frac{u_f}{\overline{u}}(-1+\nu_n)))\nu_n(1+(-1+\beta_n^2-\beta_n^2\frac{u_f}{\overline{u}})\nu_n + \beta_n^2\frac{u_f}{\overline{u}}\nu_n^2)] \qquad (6.30)
\end{aligned}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu modelde, $\frac{u_f}{\overline{u}} \in [0,4]$ dinamik davranış gösteren parametre, $\nu_n \in [0,1]$ yolun araçlar tarafından kullanım süresine karşılık gelmektedir. $\frac{u_f}{\overline{u}}\nu_n(1-\nu_n)$ orijinal bir-boyutlu trafik modelinde $\frac{u_f}{\overline{u}} = 4$ olarak alındığında kaotik davranış gösteren kararsız trafik akışı elde edilir. Bu sistem, (6.30) ile tanımlanan kontrol sistemi yardımı ile $(\alpha_n), \left(\beta_n^i\right) \subset (0,1)$ $(i=1,2)$ parametrelerinin belirlediği uygun bir aralıkta kararlı ve istikrarlı hale getirilebilir.

Kabul edelim ki; $\frac{u_f}{\overline{u}} = 4$ için kaotik özelliğe sahip lojistik tipten trafik modeli $f_\mu(\nu_n) = 4\nu_n(1-\nu_n)$ olarak alınsın. (6.30) ile verilen kontrol mekanizmasına uygulandığında $i=1,2$ için

$$\begin{aligned}
\nu_{n+1} = N\left(\alpha, \beta^i, f_\mu\right)(\nu_n) &\equiv \nu_n - \alpha_n\nu_n + 4\alpha_n(\nu_n - \beta_n^1\nu_n - 4\beta_n^1\nu_n(1-(1+3\beta_n^2) \\
&\times \nu_n + 4\beta_n^2\nu_n^2)(-1+\beta_n^2(-3+4\nu_n)))(1+(-1+\beta_n^1)\nu_n + 4\beta_n^1\nu_n \\
&\times (1-(1+3\beta_n^2)\nu_n + 4\beta_n^2\nu_n^2)(-1+\beta_n^2(-3+4\nu_n))) \qquad (6.31)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Önceki bölümlerde ayrıntılı olarak incelenen f_μ lojistik dönüşümünün dinamiksel özellikleri göz önünde bulundurularak (6.30) trafik kontrol modelinin belirleyeceği kararlılık aralıkları hesaplanacaktır. Teorem 6.2'ye göre; f_μ lojistik dönüşümünün $\nu_2^* = \frac{3}{4}$ kararsız (itici) sabit noktasının kararlı (çekici) sabit noktaya dönüşmesi için

$$\left|N'\left(\alpha, \beta^i, f_\mu\right)(\nu_2^*)\right| < 1$$

şartını sağlayan parametre aralıklarının belirlenmesi gerekmektedir. Bu eşitsizliğin çözümünde Teorem 6.2'nin ispatı ile benzer işlem süreçleri uygulanacaktır.Bu nedenle, (6.15) ile verilen kararlılık denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\Gamma_\alpha &= (\min\{\alpha_n\}, \max\{\alpha_n\}) = \left(0, \frac{2}{3}\right) \\
\Gamma_{\beta^1} &= \left(\min\left\{\beta_n^1\right\}, \max\left\{\beta_n^1\right\}\right) = \left(0, \frac{1}{2}\right) \\
\Gamma_{\beta^2} &= \left(\min\left\{\beta_n^2\right\}, \max\left\{\beta_n^2\right\}\right) = \left(0, \frac{1}{2}\right)
\end{aligned} \tag{6.32}$$

olacak şekilde $(\alpha_n), \left(\beta_n^i\right) \subset (0,1)$ $(i = 1,2)$ kontrol parametre aralıkları elde edilir.

Diğer taraftan, f_μ lojistik dönüşümünün 2-periyodlu kararsız $\nu_1^{*(2)} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$ ve $\nu_2^{*(2)} = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$ periyodik sabit noktaları için de uygun kontrol parametre aralıkları bulunmaktadır. Teorem Teorem 6.4'ün ispatında, (6.27) ile verilen kararlılık denklemleri üzerinde gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned}
\Gamma_\alpha &= (\min\{\alpha_n\}, \max\{\alpha_n\}) = \left(0, \frac{2}{5}\right) \\
\Gamma_{\beta^1} &= \left(\min\left\{\beta_n^1\right\}, \max\left\{\beta_n^1\right\}\right) = \left(0, \frac{1}{4}\right) \\
\Gamma_{\beta^2} &= \left(\min\left\{\beta_n^2\right\}, \max\left\{\beta_n^2\right\}\right) = \left(0, \frac{1}{4}\right)
\end{aligned} \tag{6.33}$$

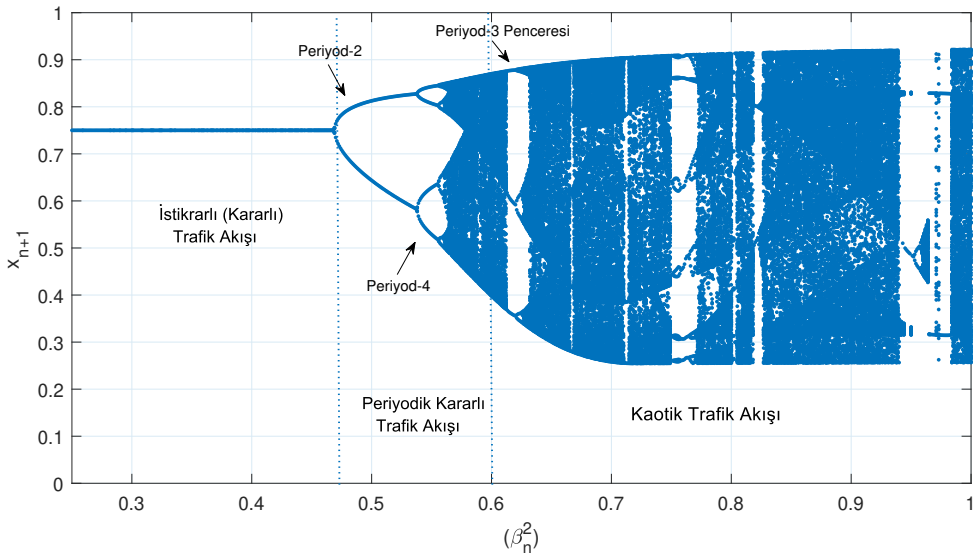
olacak şekilde 2-periyodlu periyodik $\nu_1^{*(2)}$ ve $\nu_2^{*(2)}$ sabit noktaları için kararlılık aralıkları elde edilir.

Kaotik bir trafik akışında araçların başlangıç koşullarına hassas bağımlılığı giderek artarak trafik kazalarına neden olmaktadır. Bu anlamda, Noor trafik modeli sistemin hassas bağımlılığını hızla azaltarak başlangıç koşullarına duyarsız hale getirebilir, diğer bir ifadeyle sistemin kararlılığını artırarak istikrarlı bir yapıya kavuşmasını sağlamaktadır. $\frac{u_f}{\overline{u}} = 4$ alınarak yol üzerindeki araçların ortalama hızı maksimum hız sınırının dörtte biri olarak tutulduğunda trafik akışı dengeye gelme eğiliminde olacaktır.

Yukarıda elde edilen verilere göre; (6.30) ile tanımlı Noor trafik akış modeli için aşağıdaki sonuçlara ulaşılmaktadır.

- $\frac{u_f}{\bar{u}} = 4$ olsun. Bu takdirde, (6.30) Noor trafik akış kontrol modeli $\alpha_n \in \left(0, \frac{2}{3}\right)$, $\beta_n^1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\beta_n^2 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ parametre aralıklarında kaotik bir trafik sistemini istikrarlı hale dönüştürür. Dolayısıyla, kararsız trafik akışı kararlı veya trafiksiz bölgeye indirgenir.

- $\frac{u_f}{\bar{u}} = 4$ olsun. Bu takdirde, (6.30) Noor trafik akış kontrol modelinin periyodik yörüngeler için belirlediği $\alpha_n \in \left(0, \frac{2}{5}\right)$, $\beta_n^1 \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$, $\beta_n^2 \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ parametre aralıklarında kararsız periyodik şekilde ilerleyen trafik sistemi kararlı periyodik davranışa dönüşür ve istikrarlı ilerleyen bir trafik bölgesi oluşturur.



Şekil 6.5 Noor trafik akış modelinin $\frac{u_f}{\bar{u}} = 4$ iken $x_0 = 0.7333$, $\alpha_n = 0.75$, $\beta_n^1 = 0.9$,$\beta_n^2 \in (0, 1)$ parametre aralığındaki çatallanma diyagramı

Bu model, önceki tanımlanan trafik kontrol modellerinden farklı olarak trafik akışındaki kaosu etkileyen üç trafik akış değişkenine sahiptir. Bu nedenle, trafiğin kararlılık performansını daha hızlı artıracağından trafik operatörlerine daha güçlü bir model sunmaktadır.

Noor kontrol mekanizmasıyla yapılan trafik akış tasarımı temelde ortalama hıza göre oluşan lojistik modelde dış faktörleri temsil eden parametrenin kaotik sınırlarda olduğu anlamındadır. Başka bir ifadeyle; trafik akışını modelleyen lojistik fonksiyonun yol ve araç ilişkisi bağlamında normal trafik akışını engelleyen bir düzeyde olduğunu ifade etmektedir. Ancak lojistik fonksiyonun sorunlu trafik akış modelini temsil ettiği parametre değeri $\mu = 4$ olarak bilinmektedir.

Trafik akışını sorunsuz hale getirmenin yollarından biri de bu lojistik modelin bir iteratif mekanizmayla kontrol edilmesidir. Noor kontrol mekanizması böyle bir imkan sunmaktadır. Noor iterasyonundaki $(\alpha_n), \left(\beta_n^1\right), \left(\beta_n^2\right) \subset (0,1)$ parametreleri orijinal lojistik fonksiyonda trafik akışını etkileyen dış faktörlere uygun çözümler sunacak imkanlar vermektedir. Matematik model olarak lojistik fonksiyon $\mu = 4$ değerinde trafiğin sorunlu olmasını temsil ederken; kontrol mekanizması altında $(\alpha_n), \left(\beta_n^1\right), \left(\beta_n^2\right)$ değerlerinin $\mu = 4$ ile çarpımı lojistik fonksiyonun çarpımla oluşan katsayısını $\mu < 4$ bandına indirmektedir.

Bu yeni durum, Noor kontrol sisteminin sorunlu ve trafik akışını etkileyen dış faktörlere Noor kontrol sisteminin parametreleri yardımıyla alternatif çözümler sunulduğu anlamına gelmektedir. Örneğin; orijinal lojistik modelde trafik akışını engelleyen sinyalizasyon sürelerinin uzunluğu, yol boyunca park etmiş araçların çokluğu, yağışlı günlerde bütün araçların trafiğe çıkmış olması, buzlanmadan kaynaklı kazalar vb. durumlar Noor kontrol mekanizması altında $(\alpha_n), \left(\beta_n^1\right), \left(\beta_n^2\right)$ parametrelerinin uygun seçimleriyle sinyalizasyon sürelerinin kısaltılması, park eden araçların kaldırılması, yağışlı günlerde trafiğe çıkan araç sayısının azaltılması, buzlu yollarda tuzlama çalışmalarının yapılması gibi işlemler trafikteki sorunu ortadan kaldıracaktır. Bu çözüm önerileri dış faktör olarak Noor kontrol mekanizmasının sahip olduğu üç parametresine yüklenerek bir trafik akış kontrol modeli oluşturmaya imkan sağlamaktadır.

7
MULTI-STEP İTERASYON YÖNTEMİ İLE KAOS KONTROL

Önceki bölümlerde, bir-boyutlu diskrit dinamik sistemlerin stabilize edilmesi için iki adımlı ve üç adımlı sabit nokta iterasyon yöntemleriyle büyümeye bağlı kaos kontrol mekanizmaları kurulmuş, kontrol parametreleri ile kararsız sabit noktalar ve periyodik noktaların kararlı hale getirilmesi için gerekli işlemler tüm aşamalarıyla verilmiştir. Çalışmanın seyri içerisinde iki adımlı, üç adımlı iterasyonların kontrol mekanizmasının elde edilmesi ve incelenmesi sonucunda doğal bir soru olarak çok adımlı iterasyonların kaos kontrol mekanizmasının nasıl olacağı problemi ortaya çıkmıştır. Bu bölümde, tezin önceki bölümlerinde iki ve üç adımlı iterasyon yöntemleri için ayrıntılı olarak incelenen kaos kontrol mekanizmaları, n-adımlı Multi-step iterasyonu için genellenerek yeni bir sabit nokta kaos kontrol mekanizması kurulmuştur.

n-adımlı iterasyon yöntemi olan Multi-step iterasyonu [85]; Noor [84], Ishikawa [83], Mann [86], Krasnoselskii [87], Picard [142] iterasyon yöntemlerinin bir genellemesidir. Bu iterasyonların kontrol parametrelerine ait belirlenen stabilite aralıkları; Multi-step iterasyon yöntemi ile kurulan kontrol mekanizmasının n tane parametre içeren kararlılık aralıklarının özel haline karşılık gelmektedir. Bu bölümde, yeni tanımlanan Multi-step f.p.t. kontrol mekanizmasının parametreleri ile bir boyutlu diskrit dinamik sistemlerin kararsız sabit noktaları ve periyodik yörüngelerinin kaos kontrolü için analitik sonuçlar verilmiştir.

7.1 Multi-step Sabit Nokta Kaos Kontrol Mekanizması

(4.9) ile verilen bir-boyutlu diskrit dinamik sistemini ele alalım. $[a,b] \in R$ olmak üzere f_μ, $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı sürekli bir fonksiyon olsun. Teorem 4.3 ile verilen Brouwer Sabit Nokta Teoremi [130] gereğince; f_μ fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında en az bir sabit noktaya sahiptir, yani $f_\mu(x^*) = x^*$ olacak şekilde en az bir $x^* \in [a,b]$ noktası vardır. Ayrıca, $f_\mu^{m\prime}(x^*)$ türev fonksiyonunun var olduğu kabul edilsin.

Multi-step iterasyon yöntemi [85], (4.9) ile verilen f_μ orjinal sistemi altında düzenlenirse, $(\alpha_n),\left(\beta_n^i\right) \subset [0,1]$ $\left(i=\overline{1,p-1},\ p\geq 2\right)$ kaos kontrol parametreleri olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&x_{n+1}=(1-\alpha_n)\,x_n+\alpha_n f_\mu\left(y_n^1\right)\\
&=x_n+\alpha_n\left(f_\mu\left(y_n^1\right)-x_n\right)\\
&=x_n+\alpha_n\left(f_\mu\left(x_n+\beta_n^1\left(f_\mu\left(y_n^2\right)-x_n\right)\right)-x_n\right)\\
&=x_n+\alpha_n\left(f_\mu\left(x_n+\beta_n^1\left(f_\mu\left(x_n+\beta_n^2\left(f_\mu\left(y_n^3\right)-x_n\right)\right)-x_n\right)\right)-x_n\right)\\
&\vdots\\
&=x_n+\alpha_n\left(f_\mu\left(x_n+\beta_n^1\left(f_\mu\left(x_n+\beta_n^2\left(\cdots f_\mu\left(x_n+\beta_n^{p-2}\left(f_\mu\left(y_n^{p-1}\right)-x_n\right)\right)-x_n\cdots\right)\right)-x_n\right)\right)-x_n\right)\\
&=x_n+\alpha_n\left(f_\mu\left(x_n+\beta_n^1\left(f_\mu\left(x_n+\beta_n^2\left(\cdots f_\mu\left(x_n+\beta_n^{p-1}\left(f_\mu\left(x_n\right)-x_n\right)\right)-x_n\cdots\right)\right)-x_n\right)\right)-x_n\right)
\end{aligned}
$$

olacak şekilde elde edilir. Yukarıdaki denklemlerin iç içe yazılması ile büyümeye bağlı n-adımlı Multi-step sabit nokta tipi kaos kontrol mekanizması

$$
\begin{aligned}
x_{n+1}&=M\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x_n)\equiv x_n+\alpha_n \qquad (7.1)\\
&\times\left(f_\mu\left(x_n+\beta_n^1\left(f_\mu\left(x_n+\beta_n^2\left(\cdots f_\mu\left(x_n+\beta_n^{p-1}\left(f_\mu\left(x_n\right)-x_n\right)\right)-x_n\cdots\right)\right)-x_n\right)\right)-x_n\right)
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlanır. Multi-step sabit nokta tipi kaos kontrol mekanizması kısaca Multi-step f.p.t. kontrol mekanizması olarak adlandırılır.

Eğer (7.1) ile verilen Multi-step f.p.t. kontrol mekanizmasında $\alpha_n=1$, $\beta_n^i=0$ $\left(i=\overline{1,p-1},\ p\geq 2\right)$ alınırsa mekanizmas (4.9) ile verilen lineer olmayan $x_{n+1}=f_\mu(x_n)$ sistemine indirgenir. Eğer $\alpha_n=0$ alınırsa $x_{n+1}=x_n$ aşikar kararlı sistem elde edilir, yani tüm (x_n) değerleri için sistem kararlı olmaktadır. Bu nedenle $(\alpha_n),\left(\beta_n^i\right)$ $\left(i=\overline{1,p-1},\ p\geq 2\right)$ kontrol parametre dizileri $(0,1)$ açık aralığında alınacaktır.

(4.10) eşitliği ile tanımlanan büyü kavramını,Multi-step iterasyon yöntem [85] için hesaplayalım. Tanım 4.6'da, $i=1,2,...,p-2$ için

$$
y_n^i=\left(1-\beta_n^i\right)x_n+\beta_n^i f_\mu\left(y_n^{i+1}\right),\ y_n^{p-1}=\left(1-\beta_n^{p-1}\right)x_n+\beta_n^{p-1}f_\mu\left(x_n\right)
$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
x_{n+1}&=(1-\alpha_n)\,x_n+\alpha_n f_\mu\left(y_n^1\right)\\
x_{n+1}&=x_n-\alpha_n x_n+\alpha_n f_\mu\left(y_n^1\right)\\
x_{n+1}-x_n&=\alpha_n f_\mu\left(y_n^1\right)-\alpha_n x_n\\
x_{n+1}-x_n&=\alpha_n\left(f_\mu\left(y_n^1\right)-x_n\right)
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik tabiatta değişime açık varlıkların parametreye bağlı olarak

pozitif ya da negatif yönde büyümesine karşılık gelmektedir. Buradan, (7.1) ile verilen Multi-step f.p.t. kontrol mekanizması aşağıdaki büyüme oranıyla matematiksel olarak denktir:

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n}=\alpha_n\left[\frac{f_\mu\left(y_n^1\right)}{x_n}-1\right]. \tag{7.2}$$

(7.2) büyüme oranı denklemi, n tane kontrol parametresine sahip Multi-step iterasyon yöntemine [85] karşılık gelir ve $(\alpha_n),\left(\beta_n^i\right)\left(i=\overline{1,p-1},\ p\geq 2\right)$ kontrol parametreleri, (4.9) diskrit dinamik sistemin büyümesini kontrol etmektedir. Eğer f_μ fonksiyonu kaotik veya kararsız, diğer bir ifadeyle, bir sabit noktaya yakınsamıyor ise büyüme sınırsız olarak sonsuza gider. Ayıca (7.2) ile verilen büyüme oranı eşitliği $x_n=0$ değeri için tanımsız olduğundan orijinin $[a,b]$ tanım aralığından çıkarılması gerekmektedir. Böylelikle, (4.9) ile verilen bir-boyutlu diskrit dinamik sistemin büyümeye dair değişimini kontrol eden n-adlı bir sabit nokta kaos kontrol mekanizması elde edilmiş olur.

7.2 Kararsız Sabit Noktaların Stabilize Edilmesi

Bu bölümde, bir-boyutlu diskrit dinamik sistemlerin kararsız sabit noktalarının n-adlı Multi-step f.p.t. kontrol mekanizmasıyla kararlı hale dönüştürülmesi için n tane parametrenin belirlediği kararlı aralıkları araştırılacaktır. Bu aralıklar, önceki bölüümlerde verilen iki adımlı Ishikawa ve üç adımlı Noor kontrol mekanizmalarına ait kontrol aralıklarının bir genellemesidir.

Teorem 7.1. *(4.9) ile verilen f_μ orijinal sistemi ile (7.1) ile verilen Multi-step f.p.t. kontrol mekanizmasıyla aynı reel sabit noktalar kümesini paylaşmaktdır. Yani, her $x^*\in[a,b]$ için $f_\mu(x^*)=x^*$ ise $M\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x^*)=x^*\ \left(i=\overline{1,p-1},\ p\geq 2\right)$ dır. Tersi, $y_n^1=x^*$ koşulu altında her zaman doğrudur.*

İspat. $x^*\in[a,b]$, f_μ orijinal sisteminin reel bir sabit noktası olsun, yani $f(x^*)=x^*$'dır. Bu takdirde, x^* sabit noktası (7.1) ile verilen Multi-step f.p.t. kontrol mekanizmasında yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&M\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x^*)=x^*+\alpha_n\\
&\times\left(f_\mu\left(x^*+\beta_n^1\left(f_\mu\left(x^*+\beta_n^2\left(\cdots f_\mu\left(x^*+\beta_n^{p-1}(x^*-x^*)\right)-x^*\cdots\right)\right)-x^*\right)\right)-x^*\right)\\
&=x^*+\alpha_n\left(f_\mu\left(x^*+\beta_n^1\left(f_\mu\left(x^*+\beta_n^2(\cdots(x^*-x^*)\cdots)\right)-x^*\right)\right)-x^*\right)\\
&=x^*+\alpha_n\left(f_\mu\left(x^*+\beta_n^1(x^*-x^*)\right)-x^*\right)\\
&=x^*+\alpha_n\left(f_\mu(x^*)-x^*\right)\\
&=x^*+\alpha_n(x^*-x^*)\\
&=x^*
\end{aligned}
$$

elde edilir. Dolayısıyla, f_μ orijinal sisteminin $x^*\in[a,b]$ sabit noktası, $M\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)$ $\left(i=\overline{1,p-1},\ p\geq 2\right)$ kontrol mekanizmasının da bir sabit noktası olmaktadır.

Tersine, $x^*\in[a,b]$ noktası (7.1) ile verilen Multi-step f.p.t. kontrol mekanizmasının da reel bir sabit noktası olsun. Teoremin hipotezinde verilen $y_n^1=x^*$ koşulu altında $M\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x^*)=x^*$ $\left(i=\overline{1,p-1},\ p\geq 2\right)$ ise

$$
\begin{aligned}
(1-\alpha_n)x^*+\alpha_n f_\mu\left(y_n^1\right)&=x^*\\
(1-\alpha_n)x^*+\alpha_n f_\mu(x^*)&=x^*\\
\alpha_n\left(f_\mu(x^*)-x^*\right)&=0
\end{aligned}
$$

olur. $\alpha_n\in(0,1)$ olduğundan $f_\mu(x^*)=x^*$ elde edilir. Dolayısıyla, x^* sabit noktası f_μ orijinal sisteminin de bir sabit noktasıdır. Böylece, f_μ orijinal sistemi ile $M\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)$ $\left(i=\overline{1,p-1},\ p\geq 2\right)$ kontrol mekanizması aynı sabit noktalar kümesine sahip olduğu ispatlanmıştır. ■

Teorem 7.2. *$x^*\in[a,b]$ noktası, (4.9) eşitliği ile verilen f_μ orijinal sisteminin kararsız bir sabit noktası olsun. $\left|f'_\mu(x^*)\right|\neq 1$ olmak üzere, (7.1) ile tanımlanan Multi-step f.p.t kontrol mekanizmasının*

$$
\left|M'\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x^*)\right|<1
$$

kararlılık koşulu altında, her $n\in N$ için $(\alpha_n),\left(\beta_n^i\right)\subset(0,1)$ $\left(i=\overline{1,p-1},\ p\geq 2\right)$ kontrol parametrelerinin etkin olduğu bir aralık bulmak her zaman mümkündür. Diğer bir ifadeyle, f_μ orijinal sisteminin $x^*\in[a,b]$ kararsız sabit noktasını kararlı hale getiren $\alpha_n\in\Gamma_{(\alpha_n)}=(\min\{\alpha_n\},\max\{\alpha_n\})$, $\beta_n^i\in\Gamma_{\left(\beta_n^i\right)}=\left(\min\left\{\beta_n^i\right\},\max\left\{\beta_n^i\right\}\right)$ $(i=\overline{1,p-1},\ p\geq 2)$ olacak şekilde uygun kontrol parametre aralıkları her zaman bulunur.

İspat. Kabul edelim ki; $x^*\in[a,b]$ noktası, (4.9) eşitliği ile verilen f_μ orijinal sisteminin kararsız bir sabit noktası olsun. Teoremin hipotezinde verilen kontrol

mekanizmasının kararlılık koşulunu gerçeklemek için, (7.1) ile verilen Multi-step f.p.t kontrol mekanizmasının x^* sabit noktasındaki değişimi, $M\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)$ $(i=\overline{1,p-1},\ p\geq 2)$ fonksiyonunun türeviyle elde edilir. Türev denkleminin elde edilişine dair işlem basamakları aşağıda açık olarak gösterilmilştir.

İlk olarak, (4.8) ile verilen Multi-step iterasyon yöntemi [85] düzenlenerek genel formda şu şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned}
x_{n+1}&=(1-\alpha_n)\,x_n+\alpha_n f_\mu\left(y_n^1\right)=x_n+\alpha_n\left(f_\mu\left(y_n^1\right)-x_n\right)\\
y_n^1&=\left(1-\beta_n^1\right)x_n+\beta_n^1 f_\mu\left(y_n^2\right)=x_n+\beta_n^1\left(f_\mu\left(y_n^2\right)-x_n\right)\\
y_n^2&=\left(1-\beta_n^2\right)x_n+\beta_n^2 f_\mu\left(y_n^3\right)=x_n+\beta_n^2\left(f_\mu\left(y_n^3\right)-x_n\right)\\
&\vdots\\
y_n^{p-2}&=\left(1-\beta_n^{p-2}\right)x_n+\beta_n^{p-2} f_\mu\left(y_n^{p-1}\right)=x_n+\beta_n^{p-2}\left(f_\mu\left(y_n^{p-1}\right)-x_n\right)\\
y_n^{p-1}&=\left(1-\beta_n^{p-1}\right)x_n+\beta_n^{p-1} f_\mu\left(x_n\right)=x_n+\beta_n^{p-1}\left(f_\mu\left(x_n\right)-x_n\right).
\end{aligned}\tag{7.3}$$

Bu ifadelerde $y_n^1,y_n^2,\ldots,y_n^{p-1}$ denklemleri iç içe yerine yazıldığında aşağıda verilen bileşke fonksiyonları elde edilir.

$$\begin{aligned}
x_{n+1}&=x_n+\alpha_n\left(f_\mu\left(x_n+\beta_n^1\left(\cdots f_\mu\left(x_n+\beta_n^{p-1}\left(f_\mu\left(x_n\right)-x_n\right)\right)-x_n\cdots\right)\right)-x_n\right)\\
y_n^1&=x_n+\beta_n^1\left(f_\mu\left(x_n+\beta_n^2\left(\cdots f_\mu\left(x_n+\beta_n^{p-1}\left(f_\mu\left(x_n\right)-x_n\right)\right)-x_n\cdots\right)\right)-x_n\right)\\
y_n^2&=x_n+\beta_n^2\left(f_\mu\left(x_n+\beta_n^3\left(\cdots f_\mu\left(x_n+\beta_n^{p-1}\left(f_\mu\left(x_n\right)-x_n\right)\right)-x_n\cdots\right)\right)-x_n\right)\\
&\vdots\\
y_n^{p-2}&=x_n+\beta_n^{p-2}\left(f_\mu\left(x_n+\beta_n^{p-1}\left(f_\mu\left(x_n\right)-x_n\right)\right)-x_n\right)\\
y_n^{p-1}&=x_n+\beta_n^{p-1}\left(f_\mu\left(x_n\right)-x_n\right).
\end{aligned}\tag{7.4}$$

(7.3) ile verilen denklemlerin ayrı ayrı türevleri alındığında, n-adımlı iterasyonun türev gösterimi

$$\begin{aligned}
x_{n+1}'&=1+\alpha_n\left(f_\mu'\left(y_n^1\right)\left(y_n^1\right)'-1\right)\\
\left(y_n^1\right)'&=1+\beta_n^1\left(f_\mu'\left(y_n^2\right)\left(y_n^2\right)'-1\right)\\
\left(y_n^2\right)'&=1+\beta_n^2\left(f_\mu'\left(y_n^3\right)\left(y_n^3\right)'-1\right)\\
&\vdots\\
\left(y_n^{p-2}\right)'&=1+\beta_n^{p-2}\left(f_\mu'\left(y_n^{p-1}\right)\left(y_n^{p-1}\right)'-1\right)\\
\left(y_n^{p-1}\right)'&=1+\beta_n^{p-1}\left(f_\mu'\left(x_n\right)-1\right)
\end{aligned}\tag{7.5}$$

biçimindedir. (7.5) türev eşitliklerinde (7.4) bileşke fonksiyonları yerine yazıldığında

$$
\begin{gathered}
x'_{n+1} = 1+\alpha_n\left(f'_\mu\left(x_n+\beta_n^1\left(f_\mu\left(x_n+\beta_n^2\left(\cdots f_\mu\left(x_n+\beta_n^{p-1}\left(f_\mu(x_n)-x_n\right)\right)-x_n\cdots\right)\right)-x_n\right)\right)\left(y_n^1\right)'-1\right)\\
\left(y_n^1\right)' = 1+\beta_n^1\left(f'_\mu\left(x_n+\beta_n^2\left(f_\mu\left(x_n+\beta_n^3\left(\cdots f_\mu\left(x_n+\beta_n^{p-1}\left(f_\mu(x_n)-x_n\right)\right)-x_n\cdots\right)\right)-x_n\right)\right)\left(y_n^2\right)'-1\right)\\
\left(y_n^2\right)' = 1+\beta_n^2\left(f'_\mu\left(x_n+\beta_n^3\left(f_\mu\left(x_n+\beta_n^4\left(\cdots f_\mu\left(x_n+\beta_n^{p-1}\left(f_\mu(x_n)-x_n\right)\right)-x_n\cdots\right)\right)-x_n\right)\right)\left(y_n^3\right)'-1\right)\\
\vdots\\
\left(y_n^{p-2}\right)' = 1+\beta_n^{p-2}\left(f'_\mu\left(x_n+\beta_n^{p-1}\left(f_\mu(x_n)-x_n\right)\right)\left(y_n^{p-1}\right)'-1\right)\\
\left(y_n^{p-1}\right)' = 1+\beta_n^{p-1}\left(f'_\mu(x_n)-1\right)
\end{gathered}
$$

elde edilir. Son olarak, türev denklemleri iç içe yazılarak yeniden düzenlendiğinde $M\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)$ $(i=\overline{1,p-1},\ p\geq 2)$ ile gösterilen Multi-step f.p.t. kontrol mekanizmasının türevi aşağıdaki şekilde elde edilmektedir.

$$
\begin{gathered}
M'\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x_n) = 1+\alpha_n \qquad (7.6)\\
\times\left(f'_\mu\left(y_n^1\right)\left(1+\beta_n^1\left(f'_\mu\left(y_n^2\right)\left(1+\beta_n^2\left(\cdots f'_\mu\left(y_n^{p-1}\right)\left(1+\beta_n^{p-1}\left(f'_\mu(x_n)-1\right)\right)-1\cdots\right)\right)-1\right)\right)-1\right).
\end{gathered}
$$

(7.6) ile verilen $M'\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)$ $(i=\overline{1,p-1},\ p\geq 2)$ türev fonksiyonu x^* sabit noktası için

$$
\begin{gathered}
M'\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x^*) = 1+\alpha_n \qquad (7.7)\\
\times\left(f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^1\left(f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^2\left(\cdots f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^{p-1}\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right)-1\cdots\right)\right)-1\right)\right)-1\right)
\end{gathered}
$$

olarak bulunur. Tanım 3.2 gereğince; x^* sabit noktası f_μ orijinal sisteminin kararsız bir sabit noktası ise $\left|f'_\mu(x^*)\right|>1$ olmalıdır. Buradan $f'_\mu(x^*)<-1$ ve $f'_\mu(x^*)>1$ olacak şekilde iki durum ortaya çıkmaktadır.

İlk olarak, $f'_\mu(x^*)<-1$ koşulu altında Multi-step f.p.t. kontrol mekanizması $i=\overline{1,p-1},\ p\geq 2$ olmak üzere

$$\left|M'\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x^*)\right|<1$$

hipotezini sağlaması için oluşan durumlar incelenecektir.

Durum 1. $f'_\mu(x^*)<-1$ olsun. $M'\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x^*)<1$ $(i=\overline{1,p-1},\ p\geq 2)$ iken (7.7) türev denkleminin

$$\alpha_n\left(f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^1\left(f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^2\left(\cdots f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^{p-1}\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right)-1\cdots\right)\right)-1\right)\right)-1\right)<0 \qquad (7.8)$$

eşitsizliğini sağlaması gerekmektedir.

$\alpha_n \in (0,1)$ parametre dizisi pozitif aralıkta tanımlı olduğundan

$$f'_\mu(x^*)\Big(1+\beta_n^1\Big(f'_\mu(x^*)\Big(1+\beta_n^2\Big(\cdots f'_\mu(x^*)\Big(1+\beta_n^{p-1}\Big(f'_\mu(x^*)-1\Big)\Big)-1\cdots\Big)\Big)-1\Big)\Big)-1<0 \tag{7.9}$$

elde edilir. Dolayısıyla, (7.8)'da $\alpha_n > 0$ olduğundan $\min\{\alpha_n\} = 0$ olarak bulunur. Diğer taraftan, benzer bir yaklaşım ile (7.9) denklemi, $f'_\mu(x^*) < -1$ koşulu altında $\left(\beta_n^i\right) \subset (0,1)$ $\left(i=\overline{1,p-1},\ p\geq 2\right)$ parametre değerleri için ayrı ayrı çekilerek hesaplanırsa, yukarıdaki veriler kullanılarak aşağıdaki gibi Multi-step genellemesi yapılabilmektedir.

$$\begin{aligned}
&f'_\mu(x^*)\Big(1+\beta_n^1\Big(f'_\mu(x^*)\Big(1+\beta_n^2\Big(\cdots f'_\mu(x^*)\Big(1+\beta_n^{p-1}\Big(f'_\mu(x^*)-1\Big)\Big)-1\cdots\Big)\Big)-1\Big)\Big)<1\\
&\Rightarrow 1+\beta_n^1\Big(f'_\mu(x^*)\Big(1+\beta_n^2\Big(\cdots f'_\mu(x^*)\Big(1+\beta_n^{p-1}\Big(f'_\mu(x^*)-1\Big)\Big)-1\cdots\Big)\Big)-1\Big)>\frac{1}{f'_\mu(x^*)}\\
&\Rightarrow \beta_n^1\Big(f'_\mu(x^*)\Big(1+\beta_n^2\Big(\cdots f'_\mu(x^*)\Big(1+\beta_n^{p-1}\Big(f'_\mu(x^*)-1\Big)\Big)-1\cdots\Big)\Big)-1\Big)>\frac{1}{f'_\mu(x^*)}-1\\
&\Rightarrow \beta_n^1\Big(f'_\mu(x^*)\Big(1+\beta_n^2\Big(\cdots f'_\mu(x^*)\Big(1+\beta_n^{p-1}\Big(f'_\mu(x^*)-1\Big)\Big)-1\cdots\Big)\Big)-1\Big)>\frac{1-f'_\mu(x^*)}{f'_\mu(x^*)}
\end{aligned} \tag{7.10}$$

$$\beta_n^1<\left(\frac{1-f'_\mu(x^*)}{f'_\mu(x^*)}\right)\frac{1}{f'_\mu(x^*)\Big(1+\beta_n^2\Big(\cdots f'_\mu(x^*)\Big(1+\beta_n^{p-1}\Big(f'_\mu(x^*)-1\Big)\Big)-1\cdots\Big)\Big)-1}.$$

Bununla birlikte; (7.10) göz önüne alınarak genelleme devam ettirilirse $\left(\beta_n^2\right)$ parametresi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\beta_n^2>\left(\frac{\Big[1-f'_\mu(x^*)\Big].\Big[1+\beta_n^1 f'_\mu(x^*)\Big]}{\beta_n^1 f'^2_\mu(x^*)}\right)\frac{1}{f'_\mu(x^*)\Big(1+\beta_n^3\Big(\cdots f'_\mu(x^*)\Big(1+\beta_n^{p-1}\Big(f'_\mu(x^*)-1\Big)\Big)-1\cdots\Big)\Big)-1}.$$

Bu süreç aynı düşünceyle sürdürüldüğünde $(p-1)'$in tek ve çift olmasına bağlı eşitsizlik yönü belirlenmek üzere Multi-step iterasyonunun son parametresi de aşağıda gösterilen biçimde genellenmektedir.

$$\begin{aligned}
\beta_n^3<&\left(\frac{\Big[1-f'_\mu(x^*)\Big].\Big[1+\beta_n^1 f'_\mu(x^*)+\beta_n^1\beta_n^2 f'^2_\mu(x^*)\Big]}{\beta_n^1 f'^3_\mu(x^*)}\right)\\
&\times\left(\frac{1}{f'_\mu(x^*)\Big(1+\beta_n^4\Big(\cdots f'_\mu(x^*)\Big(1+\beta_n^{p-1}\Big(f'_\mu(x^*)-1\Big)\Big)-1\cdots\Big)\Big)-1}\right)\\
&\vdots\\
\beta_n^{p-1}<&\left(\frac{\Big[1-f'_\mu(x^*)\Big].\Big[1+\beta_n^1 f'_\mu(x^*)+\beta_n^1\beta_n^2 f'^2_\mu(x^*)+\ldots+\beta_n^1\beta_n^2\beta_n^3\ldots\beta_n^{p-2} f'^{(p-1)}_\mu(x^*)\Big]}{\beta_n^1\beta_n^2\beta_n^3\ldots\beta_n^{p-2} f'^{(p-1)}_\mu(x^*)}\right)\frac{1}{f'_\mu(x^*)-1}.
\end{aligned}$$

Gerekli işlemler yapıldığında

$$\beta_n^1 < \min\left\{\left(\frac{1-f'_\mu(x^*)}{f'_\mu(x^*)}\right)\frac{1}{f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^2\left(\cdots f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^{p-1}\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right)-1\cdots\right)\right)-1}\right\} = \max\left\{\beta_n^1\right\}$$

$$\beta_n^2 > \max\left\{\begin{array}{c}\left(\frac{\left[1-f'_\mu(x^*)\right].\left[1+\beta_n^1 f'_\mu(x^*)\right]}{\beta_n^1 f'^2_\mu(x^*)}\right)\\ \times\frac{1}{f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^3\left(\cdots f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^{p-1}\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right)-1\cdots\right)\right)-1}\end{array}\right\} = \min\left\{\beta_n^2\right\}$$

$$\beta_n^3 < \min\left\{\begin{array}{c}\left(\frac{\left[1-f'_\mu(x^*)\right].\left[1+\beta_n^1 f'_\mu(x^*)+\beta_n^1\beta_n^2 f'^2_\mu(x^*)\right]}{\beta_n^1 f'^3_\mu(x^*)}\right)\\ \times\frac{1}{f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^4\left(\cdots f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^{p-1}\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right)-1\cdots\right)\right)-1}\end{array}\right\} = \max\left\{\beta_n^3\right\}$$

$$\vdots$$

$$\beta_n^{p-1} < \min\left\{\begin{array}{c}\left(\frac{\left[1-f'_\mu(x^*)\right].\left[1+\beta_n^1 f'_\mu(x^*)+\beta_n^1\beta_n^2 f'^2_\mu(x^*)+\ldots+\beta_n^1\beta_n^2\beta_n^3\ldots\beta_n^{p-2} f'^{(p-1)}_\mu(x^*)\right]}{\beta_n^1\beta_n^2\beta_n^3\ldots\beta_n^{p-2} f'^{(p-1)}_\mu(x^*)}\right)\\ \times\frac{1}{f'_\mu(x^*)-1}\end{array}\right\} = \max\left\{\beta_n^{p-1}\right\}$$

olacak şekilde $\left(\beta_n^i\right)$ $\left(i=\overline{1,p-1},\ p\geq 2\right)$ kontrol parametresinin maksimum ve minimum değerlerinin alt ve üst sınırları belirlenmiş olur.

Durum 2. $f'_\mu(x^*) < -1$ olsun. $M'\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x^*) > -1$ $(i=\overline{1,p-1},\ p\geq 2)$ iken (7.7)'den

$$\alpha_n\left(f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^1\left(f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^2\left(\cdots f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^{p-1}\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right)-1\cdots\right)\right)-1\right)\right)-1\right) > -2 \tag{7.11}$$

olması gerekmektedir. (7.11)'de (α_n) parametresi yalnız bırakılırsa üst sınırı aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\alpha_n < \min\left\{\frac{-2}{f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^1\left(f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^2\left(\cdots f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^{p-1}\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right)-1\cdots\right)\right)-1\right)\right)-1}\right\}$$
$$= \max\left\{\alpha_n\right\}. \tag{7.12}$$

(7.11) eşitsizliğinde, $\alpha_n \in (0,1)$ ve $f'_\mu(x^*) < -1$ koşulları göz önüne alınarak gerekli işlemler yapıldığında Multi-step iterasyonunun n parametresi aşağıdaki işlem basamaklarıyla elde edilebilir. (α_n) parametresinden sonra $\left(\beta_n^1\right)$ ve son parametre olan $\left(\beta_n^{(p-1)}\right)$ aşağıdaki sırayla belirlenecektir. (7.11)'den

$$\beta_n^1 > \left(\frac{-2+\alpha_n\left(1-f'_\mu(x^*)\right)}{\alpha_n f'_\mu(x^*)}\right)\frac{1}{f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^2\left(\cdots f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^{p-1}\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right)-1\cdots\right)\right)-1}$$

$$\beta_n^2 < \left(\frac{-2+\alpha_n\left(1-f'_\mu(x^*)\right)\left[1+\beta_n^1 f'_\mu(x^*)\right]}{\alpha_n\beta_n^1 f'^2_\mu(x^*)}\right) \times \frac{1}{f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^3\left(\cdots f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^{p-1}\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right)-1\cdots\right)\right)-1}$$

$$\beta_n^3 > \left(\frac{-2+\alpha_n\left(1-f'_\mu(x^*)\right)\left[1+\beta_n^1 f'_\mu(x^*)+\beta_n^1\beta_n^2 f'_\mu(x^*)\right]}{\alpha_n\beta_n^1\beta_n^2 f'^3_\mu(x^*)}\right) \times \left(\frac{1}{f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^4\left(\cdots f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^{p-1}\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right)-1\cdots\right)\right)-1}\right)$$

$$\vdots$$

$$\beta_n^{p-1} > \left(\frac{-2+\alpha_n\left(1-f'_\mu(x^*)\right)\left[1+\beta_n^1 f'_\mu(x^*)+\beta_n^1\beta_n^2 f'_\mu(x^*)+\ldots+\beta_n^1\beta_n^2\beta_n^3\beta_n^4\ldots\beta_n^{p-2}f'^{(p-2)}_\mu(x^*)\right]}{\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\alpha_n\beta_n^1\beta_n^2\beta_n^3\beta_n^4\ldots\beta_n^{p-2}f'^{(p-1)}_\mu(x^*)}\right)$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemler düzenlendiğinde alt ve üst sınırlar aşağıdaki bulumaktadır.

$$\beta_n^1 > \max\left\{\begin{array}{c}\left(\frac{-2+\alpha_n\left(1-f'_\mu(x^*)\right)}{\alpha_n f'_\mu(x^*)}\right)\\ \times\frac{1}{f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^2\left(\cdots f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^{p-1}\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right)-1\cdots\right)\right)-1}\end{array}\right\} = \min\left\{\beta_n^1\right\}$$

$$\beta_n^2 < \min\left\{\begin{array}{c}\left(\frac{-2+\alpha_n\left(1-f'_\mu(x^*)\right)\left[1+\beta_n^1 f'_\mu(x^*)\right]}{\alpha_n\beta_n^1 f'^2_\mu(x^*)}\right)\\ \times\frac{1}{f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^3\left(\cdots f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^{p-1}\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right)-1\cdots\right)\right)-1}\end{array}\right\} = \max\left\{\beta_n^2\right\}$$

$$\beta_n^3 > \max\left\{\begin{array}{c}\left(\frac{-2+\alpha_n\left(1-f'_\mu(x^*)\right)\left[1+\beta_n^1 f'_\mu(x^*)+\beta_n^1\beta_n^2 f'_\mu(x^*)\right]}{\alpha_n\beta_n^1\beta_n^2 f'^3_\mu(x^*)}\right)\\ \times\frac{1}{f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^4\left(\cdots f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^{p-1}\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right)-1\cdots\right)\right)-1}\end{array}\right\} = \min\left\{\beta_n^3\right\}$$

$$\vdots$$

$$\beta_n^{p-1} > \max\left\{\frac{-2+\alpha_n\left(1-f'_\mu(x^*)\right)\left[1+\beta_n^1 f'_\mu(x^*)+\beta_n^1\beta_n^2 f'_\mu(x^*)+\ldots+\beta_n^1\beta_n^2\beta_n^3\beta_n^4\ldots\beta_n^{p-2}f'^{(p-2)}_\mu(x^*)\right]}{\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\alpha_n\beta_n^1\beta_n^2\beta_n^3\beta_n^4\ldots\beta_n^{p-2}f'^{(p-1)}_\mu(x^*)}\right\} = \min\left\{\beta_n^{p-1}\right\}.$$

Böylece, $f'_\mu(x^*) < -1$ koşulu altında f_μ diskrit dinamik sistemi için kararsız olan $x^* \in [a,b]$ sabit noktasının kararlı hale getiren $M\left(\alpha, \beta^i, f_\mu\right)$ $(i = \overline{1,p-1},\ p \geq 2)$ kontrol mekanizmasının kontrol parametre dizilerinin belirlediği kararlılık aralığı aşağıdaki şekildedir.

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{(\alpha_n)} &= \left(\min\left\{\alpha_n\right\}, \max\left\{\alpha_n\right\}\right) \\
&= \left(\begin{array}{l} 0, \\ \min\left\{ \frac{-2}{f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^1\left(f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^2\left(\cdots f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^{p-1}\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right)-1\cdots\right)\right)-1\right)\right)-1} \right\} \end{array} \right) \\
\Gamma_{\left(\beta_n^1\right)} &= \left(\min\left\{\beta_n^1\right\}, \max\left\{\beta_n^1\right\}\right) \\
&= \left(\begin{array}{l} \max\left\{ \left(\frac{-2+\alpha_n\left(1-f'_\mu(x^*)\right)}{\alpha_n f'_\mu(x^*)} \right) \frac{1}{f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^2\left(\cdots f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^{p-1}\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right)-1\cdots\right)\right)-1} \right\}, \\ \min\left\{ \left(\frac{1-f'_\mu(x^*)}{f'_\mu(x^*)} \right) \frac{1}{f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^2\left(\cdots f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^{p-1}\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right)-1\cdots\right)\right)-1} \right\} \end{array} \right) \\
\Gamma_{\left(\beta_n^2\right)} &= \left(\min\left\{\beta_n^2\right\}, \max\left\{\beta_n^2\right\}\right) \\
&= \left(\begin{array}{l} \max\left\{ \left(\frac{\left[1-f'_\mu(x^*)\right].\left[1+\beta_n^1 f'_\mu(x^*)\right]}{\beta_n^1 f'^2_\mu(x^*)} \right) \frac{1}{f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^3\left(\cdots f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^{p-1}\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right)-1\cdots\right)\right)-1} \right\}, \\ \min\left\{ \left(\frac{-2+\alpha_n\left(1-f'_\mu(x^*)\right)\left[1+\beta_n^1 f'_\mu(x^*)\right]}{\alpha_n\beta_n^1 f'^2_\mu(x^*)} \right) \frac{1}{f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^3\left(\cdots f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^{p-1}\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right)-1\cdots\right)\right)-1} \right\} \end{array} \right) \\
\Gamma_{\left(\beta_n^2\right)} &= \left(\min\left\{\beta_n^3\right\}, \max\left\{\beta_n^3\right\}\right) \\
&= \left(\begin{array}{l} \max\left\{ \left(\frac{-2+\alpha_n\left(1-f'_\mu(x^*)\right)\left[1+\beta_n^1 f'_\mu(x^*)+\beta_n^1\beta_n^2 f'_\mu(x^*)\right]}{\alpha_n\beta_n^1\beta_n^2 f'^3_\mu(x^*)} \right) \frac{1}{f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^4\left(\cdots f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^{p-1}\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right)-1\cdots\right)\right)-1} \right\}, \\ \min\left\{ \left(\frac{\left[1-f'_\mu(x^*)\right].\left[1+\beta_n^1 f'_\mu(x^*)+\beta_n^1\beta_n^2 f'^2_\mu(x^*)\right]}{\beta_n^1 f'^3_\mu(x^*)} \right) \frac{1}{f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^4\left(\cdots f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^{p-1}\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right)-1\cdots\right)\right)-1} \right\} \end{array} \right) \\
&\ \ \vdots \\
\Gamma_{\left(\beta_n^{p-1}\right)} &= \left(\min\left\{\beta_n^{p-1}\right\}, \max\left\{\beta_n^{p-1}\right\}\right) \\
&= \left(\begin{array}{l} \max\left\{ \frac{-2+\alpha_n\left(1-f'_\mu(x^*)\right)\left[1+\beta_n^1 f'_\mu(x^*)+\beta_n^1\beta_n^2 f'_\mu(x^*)+\ldots+\beta_n^1\beta_n^2\beta_n^3\beta_n^4\ldots\beta_n^{p-2} f'^{p-2}_\mu(x^*)\right]}{\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\alpha_n\beta_n^1\beta_n^2\beta_n^3\beta_n^4\ldots\beta_n^{p-2} f'^{p-1}_\mu(x^*)} \right\}, \\ \min\left\{ \left(\frac{\left[1-f'_\mu(x^*)\right].\left[1+\beta_n^1 f'_\mu(x^*)+\beta_n^1\beta_n^2 f'^2_\mu(x^*)+\ldots+\beta_n^1\beta_n^2\beta_n^3\ldots\beta_n^{p-2} f'^{(p-1)}_\mu(x^*)\right]}{\beta_n^1\beta_n^2\beta_n^3\ldots\beta_n^{p-2} f'^{(p-1)}_\mu(x^*)} \right) \frac{1}{f'_\mu(x^*)-1} \right\} \end{array} \right).
\end{aligned}
$$

Genel olarak, $i = \overline{1,p-1},\ p \geq 2$ için

$$
\begin{aligned}
\alpha_n \in \Gamma_{(\alpha_n)} &= \left(\min\left\{\alpha_n\right\}, \max\left\{\alpha_n\right\}\right) \\
\beta_n^i \in \Gamma_{\left(\beta_n^i\right)} &= \left(\min\left\{\beta_n^i\right\}, \max\left\{\beta_n^i\right\}\right)
\end{aligned}
$$

yazılabilir.

Diğer durum olarak, $f'_\mu(x^*) > 1$ koşulu altında (7.8) denklemini yeniden göz önüne alalım. $M\left(\alpha, \beta^i, f_\mu\right)$ $(i = \overline{1,p-1},\ p \geq 2)$ kontrol mekanizmasının kararılık hipotezinden elde edilen durumlar incelendiğinde $M'\left(\alpha, \beta^i, f_\mu\right)(x^*) < 1$ $(i = \overline{1,p-1},\ p \geq 2)$ için $f'_\mu(x^*) > 1$ ve $\left(\beta_n^i\right) \subset [0,1]$ $\left(i = \overline{1,p-1},\ p \geq 2\right)$ olduğundan

$$
f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^1\left(f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^2\left(\cdots f'_\mu(x^*)\left(1+\beta_n^{p-1}\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\right)-1\cdots\right)\right)-1\right)\right)-1 > 0
$$

eşitsizliğinin sağlanması gerekmektedir. Ancak bu durumda $\alpha_n \in (0,1)$ kontrol parametresinin pozitif tanımlı olması ile çelişki elde edilmektedir. Daha açık görülmek istenirse Multi-step f.p.t. kontrol mekanizmasında; $p=2$ durumuna karşılık gelen Ishikawa f.p.t kontrol mekanizması için Teorem 5.2; $p=3$ durumuna karşılık gelen Noor f.p.t kontrol mekanizması için Teorem 6.2'nin ispatları incelenebilir.

Sonuç olarak; $f_\mu'(x^*)>1$ koşulu altında $M\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)$ $(i=\overline{1,p-1},\ p\geq 2)$ Multi-step f.p.t kontrol mekanizmasının f_μ diskrit sistemini kararlı hale getiren kontrol parametre değerlerine ait herhangi bir kararlılık aralığı bulunmadığı açıktır. Böylece ispat tamamlanır. ■

7.3 Kararsız Periyodik Noktaların Stabilize Edilmesi

Bölüm 5.3 ve Bölüm 6.3'de görüldüğü üzere; sabit nokta iterasyon yöntemleriyle oluşturulan kaos kontrol mekanizmaları sadece diskrit dinamik sistemlerin kararsız sabit noktaları değil, aynı zamanda kararsız periyodik noktaları için de kontrol parametreleriyle stabilite aralıkları belirlemektedir. Bu bölümde, bir-boyutlu diskrit dinamik sistem olan f_μ orijinal sisteminin periyodik yörüngelerinin n tane parametre içeren $M\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)$ $(i=\overline{1,p-1},\ p\geq 2)$ kontrol mekanizması ile stabilitesinin sağlanması için analitik sonuçlar verilmiştir. Önceki bölümlerde bahsedildiği üzere, $k>1$ için $x^{*(k)}=f_\mu^k(x^{*(k)})$ ve $x^{*(k)}=M^k\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)$ $(i=\overline{1,p-1},\ p\geq 2)$ denklemlerinin çözümlerinin farklı olmasından dolayı, f_μ orijinal sistemi ile $M\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)$ $(i=\overline{1,p-1},\ p\geq 2)$ kontrol mekanizmasının periyodik noktaları bire-bir eşlenmesine rağmen farklı yerlerde bulunmaktadır. Bu nedenle, kararsız periyodik yörüngelerin yakınsaması için büyümeye bağlı Multi-step f.p.t. kontrol mekanizmasında gerekli düzenlemeler yapılmıştır.

$x\in[a,b]$ olsun ve $f_\mu^m=\underbrace{f_\mu\circ f_\mu\circ\cdots\circ f}_{n\text{ defa}}$ bileşkesi f_μ fonksiyonunun m. tekrarını göstersin. $(\alpha_n),\left(\beta_n^i\right)$ $\left(i=\overline{1,p-1},\ p\geq 2\right)$ kontrol parametreleri olmak üzere (7.1) ile verilen Multi-step f.p.t. kontrol mekanizmasını aşağıdaki şekilde yeniden tanımlayalım:

$$x_{n+1}=M_{(m)}\left(\alpha,\beta^i,f_\mu\right)(x_n)\equiv x_n+\alpha_n \tag{7.13}$$
$$\times\left(f_\mu^m\left(x_n+\beta_n^1\left(f_\mu^m\left(x_n+\beta_n^2\left(\cdots f_\mu^m\left(x_n+\beta_n^{p-1}\left(f_\mu^m(x_n)-x_n\right)\right)-x_n\cdots\right)\right)-x_n\right)\right)-x_n\right)$$

(7.13) ile tanımlanan n tane parametreye bağlı sabit nokta kontrol mekanizmasının Teorem 7.1 ve Teorem 7.2'de ispatlanan diskrit dinamik sistemlere ait özellikler, m-periyodlu periyodik sabit noktalar için aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Teorem 7.3. *(7.13) ile verilen Multi-step f.p.t. kontrol mekanizması, f_μ^m orijinal sistemi ile aynı reel m-periyodlu periyodik sabit noktalar kümesini paylaşırlar. Yani, $x^* \in [a,b]$ için $f_\mu^m(x^*) = x^*$ ise $M_{(m)}\left(\alpha, \beta^i, f_\mu\right)(x^*) = x^*$ $(i = \overline{1, p-1},\ p \geq 2)$'dır. Tersi, $y_n^1 = x^*$ koşulu altında, her zaman doğrudur.*

İspat. f_μ orijinal sisteminin m-periyodlu periyodik bir sabit noktası $x^* \in [a,b]$ olsun, yani $f_\mu^m(x^*) = x^*$ dır. Bu takdirde, (7.13) ile verilen Multi-step f.p.t. kontrol mekanizması, x^* periyodik sabit noktası için

$$\begin{aligned}
&M_{(m)}\left(\alpha, \beta^i, f_\mu\right)(x^*) = x^* + \alpha_n \\
&\times \left(f_\mu^m\left(x^* + \beta_n^1\left(f_\mu^m\left(x^* + \beta_n^2\left(\cdots f_\mu^m\left(x^* + \beta_n^{p-1}(x^* - x^*)\right) - x^* \cdots\right)\right) - x^*\right)\right) - x^*\right) \\
&= x^* + \alpha_n\left(f_\mu^m\left(x^* + \beta_n^1\left(f_\mu^m\left(x^* + \beta_n^2(\cdots(x^* - x^*)\cdots)\right) - x^*\right)\right) - x^*\right) \\
&= x^* + \alpha_n\left(f_\mu^m\left(x^* + \beta_n^1(x^* - x^*)\right) - x^*\right) \\
&= x^* + \alpha_n\left(f_\mu^m(x^*) - x^*\right) \\
&= x^* + \alpha_n(x^* - x^*) \\
&= x^*
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla, x^* periyodik sabit noktası aynı zamanda $M\left(\alpha, \beta^i, f_\mu\right)$ $(i = \overline{1, p-1},\ p \geq 2)$ kontrol mekanizmasının m-periyodlu periyodik sabit noktasıdır. Tersine, $x^* \in [a,b]$ noktası (7.13) ile verilen kaos kontrol mekanizmasının m-periyodlu periyodik reel bir sabit noktası olsun. Teoremin hipotezinde verilen $y_n^1 = x^*$ koşulu altında $M_{(m)}\left(\alpha, \beta^i, f_\mu\right)(x^*) = x^*$ $(i = \overline{1, p-1},\ p \geq 2)$ ise

$$\begin{aligned}
\alpha_n f_\mu^m\left(y_n^1\right) + (1 - \alpha_n)\, x^* &= x^* \\
\alpha_n f_\mu^m(x^*) + (1 - \alpha_n)\, x^* &= x^* \\
\alpha_n\left(f_\mu^m(x^*) - x^*\right) &= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. $\alpha_n \in (0,1)$ olduğundan $f_\mu^m(x^*) = x^*$ dır. Dolayısıyla, x^* sabit noktası f_μ orijinal sisteminin m-periyodlu periyodik bir sabit noktasıdır. İspat tamamlanır. ■

Teorem 7.4. *$x^* \in [a,b]$, f_μ orijinal sisteminin m-periyodlu kararsız periyodik bir sabit noktası olsun. $\left|f_\mu^{m\prime}(x^*)\right| \neq 1$ olmak üzere (7.13) ile verilen Multi-step f.p.t kontrol mekanizmasının*

$$\left|M'_{(m)}\left(\alpha, \beta^i, f_\mu\right)(x^*)\right| < 1$$

kararlılık koşulu altında, her $n \in \mathbb{N}$ için $(\alpha_n), \left(\beta_n^i\right) \subset (0,1)$ $\left(i = \overline{1, p-1},\ p \geq 2\right)$ kontrol parametrelerinin etkin olduğu bir aralık bulmak her zaman mümkündür. Diğer bir ifadeyle, f_μ orijinal sisteminin x^* kararsız m-periyodlu periyodik sabit noktasını kararlı

hale getiren $\alpha_n \in \Gamma_{(\alpha_n)} = (\min\{\alpha_n\}, \max\{\alpha_n\})$, $\beta_n^i \in \Gamma_{(\beta_n^i)} = \left(\min\left\{\beta_n^i\right\}, \max\left\{\beta_n^i\right\}\right)$ $(i = \overline{1, p-1},\ p \geq 2)$ *şeklinde uygun kontrol parametre aralıkları her zaman bulunur.*

İspat. Teoremin hipotezinde verilen kararlılık koşulunun sağlanabilmesi için $M\left(\alpha, \beta^i, f_\mu\right)$ $(i = \overline{1, p-1},\ p \geq 2)$ kontrol mekanizmasının türev fonksiyonunun elde edilmesi gerekmektedir. (7.13) ile verilen Multi-step f.p.t kontrol mekanizmasının x^* kararsız periyodik sabit noktası için türev fonksiyonu

$$M'_{(m)}\left(\alpha, \beta^i, f_\mu\right)(x^*) = 1 + \alpha_n$$
$$\times\left(f_\mu^{m\prime}(x^*)\left(1+\beta_n^1\left(f_\mu^{m\prime}(x^*)\left(1+\beta_n^2\left(\cdots f_\mu^{m\prime}(x^*)\left(1+\beta_n^{p-1}\left(f_\mu^{m\prime}(x^*)-1\right)\right)-1\cdots\right)\right)-1\right)\right)-1\right)$$

$(i = \overline{1, p-1},\ p \geq 2)$ olarak elde edilir. İspatın bu kısmından sonrası Teorem 7.2 ile benzer olduğundan aynı işlem süreci uygulanır. $\left|f_\mu^{m\prime}(x^*)\right| > 1$ koşulu altında $\left|M'_{(m)}\left(\alpha, \beta^i, f_\mu\right)(x^*)\right| < 1$ $(i = \overline{1, p-1},\ p \geq 2)$ kararlılık durumu incelenerek m-periyodlu kararsız periyodik sabit noktalar için kontrol parametre aralıkları şu şekilde belirlenir:

$$\Gamma_{(\alpha_n)} = (\min\{\alpha_n\}, \max\{\alpha_n\})$$
$$= \left(\begin{array}{l} 0, \\ \min\left\{\frac{-2}{f_\mu^{m\prime}(x^*)\left(1+\beta_n^1\left(f_\mu^{m\prime}(x^*)\left(1+\beta_n^2\left(\cdots f_\mu^{m\prime}(x^*)\left(1+\beta_n^{p-1}\left(f_\mu^{m\prime}(x^*)-1\right)\right)-1\cdots\right)\right)-1\right)\right)-1}\right\} \end{array}\right)$$

$$\Gamma_{(\beta_n^1)} = \left(\min\left\{\beta_n^1\right\}, \max\left\{\beta_n^1\right\}\right)$$
$$= \left(\begin{array}{l} \max\left\{\left(\frac{-2+\alpha_n\left(1-f_\mu^{m\prime}(x^*)\right)}{\alpha_n f_\mu^{m\prime}(x^*)}\right)\frac{1}{f_\mu^{m\prime}(x^*)\left(1+\beta_n^2\left(\cdots f_\mu^{m\prime}(x^*)\left(1+\beta_n^{p-1}\left(f_\mu^{m\prime}(x^*)-1\right)\right)-1\cdots\right)\right)-1}\right\}, \\ \min\left\{\left(\frac{1-f_\mu^{m\prime}(x^*)}{f'_\mu(x^*)}\right)\frac{1}{f_\mu^{m\prime}(x^*)\left(1+\beta_n^2\left(\cdots f_\mu^{m\prime}(x^*)\left(1+\beta_n^{p-1}\left(f_\mu^{m\prime}(x^*)-1\right)\right)-1\cdots\right)\right)-1}\right\} \end{array}\right)$$

$$\Gamma_{(\beta_n^2)} = \left(\min\left\{\beta_n^2\right\}, \max\left\{\beta_n^2\right\}\right)$$
$$= \left(\begin{array}{l} \max\left\{\left(\frac{\left[1-f_\mu^{m\prime}(x^*)\right].\left[1+\beta_n^1 f_\mu^{m\prime}(x^*)\right]}{\beta_n^1 f_\mu^{m\prime 2}(x^*)}\right)\frac{1}{f_\mu^{m\prime}(x^*)\left(1+\beta_n^3\left(\cdots f_\mu^{m\prime}(x^*)\left(1+\beta_n^{p-1}\left(f_\mu^{m\prime}(x^*)-1\right)\right)-1\cdots\right)\right)-1}\right\}, \\ \min\left\{\left(\frac{-2+\alpha_n\left(1-f_\mu^{m\prime}(x^*)\right)\left[1+\beta_n^1 f_\mu^{m\prime}(x^*)\right]}{\alpha_n\beta_n^1 f_\mu^{m\prime 2}(x^*)}\right)\frac{1}{f_\mu^{m\prime}(x^*)\left(1+\beta_n^3\left(\cdots f_\mu^{m\prime}(x^*)\left(1+\beta_n^{p-1}\left(f_\mu^{m\prime}(x^*)-1\right)\right)-1\cdots\right)\right)-1}\right\} \end{array}\right)$$

$$\Gamma_{(\beta_n^3)} = \left(\min\left\{\beta_n^3\right\}, \max\left\{\beta_n^3\right\}\right)$$
$$= \left(\begin{array}{l} \max\left\{\left(\frac{-2+\alpha_n\left(1-f_\mu^{m\prime}(x^*)\right)\left[1+\beta_n^1 f_\mu^{m\prime}(x^*)+\beta_n^1\beta_n^2 f_\mu^{m\prime}(x^*)\right]}{\alpha_n\beta_n^1\beta_n^2 f_\mu^{m\prime 3}(x^*)}\right)\frac{1}{f_\mu^{m\prime}(x^*)\left(1+\beta_n^4\left(\cdots f_\mu^{m\prime}(x^*)\left(1+\beta_n^{p-1}\left(f_\mu^{m\prime}(x^*)-1\right)\right)-1\cdots\right)\right)-1}\right\}, \\ \min\left\{\left(\frac{\left[1-f_\mu^{m\prime}(x^*)\right].\left[1+\beta_n^1 f_\mu^{m\prime}(x^*)+\beta_n^1\beta_n^2 f_\mu^{m\prime 2}(x^*)\right]}{\beta_n^1 f_\mu^{m\prime 3}(x^*)}\right)\frac{1}{f_\mu^{m\prime}(x^*)\left(1+\beta_n^4\left(\cdots f_\mu^{m\prime}(x^*)\left(1+\beta_n^{p-1}\left(f_\mu^{m\prime}(x^*)-1\right)\right)-1\cdots\right)\right)-1}\right\} \end{array}\right)$$

$$\vdots$$

$$\Gamma_{(\beta_n^{p-1})} = \left(\min\left\{\beta_n^{p-1}\right\}, \max\left\{\beta_n^{p-1}\right\}\right)$$
$$= \left(\begin{array}{l} \max\left\{\frac{-2+\alpha_n\left(1-f'_\mu(x^*)\right)\left[1+\beta_n^1 f_\mu^{m\prime}(x^*)+\beta_n^1\beta_n^2 f_\mu^{m\prime}(x^*)+\ldots+\beta_n^1\beta_n^2\beta_n^3\beta_n^4\ldots\beta_n^{p-2} f_\mu^{m\prime(p-2)}(x^*)\right]}{\left(f'_\mu(x^*)-1\right)\alpha_n\beta_n^1\beta_n^2\beta_n^3\beta_n^4\ldots\beta_n^{p-2} f_\mu^{m\prime(p-1)}(x^*)}\right\}, \\ \min\left\{\left(\frac{\left[1-f_\mu^{m\prime}(x^*)\right].\left[1+\beta_n^1 f_\mu^{m\prime}(x^*)+\beta_n^1\beta_n^2 f_\mu^{m\prime 2}(x^*)+\ldots+\beta_n^1\beta_n^2\beta_n^3\ldots\beta_n^{p-2} f_\mu^{m\prime(p-1)}(x^*)\right]}{\beta_n^1\beta_n^2\beta_n^3\ldots\beta_n^{p-2} f_\mu^{m\prime(p-1)}(x^*)}\right)\frac{1}{f_\mu^{m\prime}(x^*)-1}\right\} \end{array}\right)$$

$(i = \overline{1, p-1},\ p \geq 2)$. Böylelikle, kararsız m-periyodlu bir periyodik sabit nokta, Multi-step f.p.t. kontrol mekanizmasının n tane kontrol parametresi ile belirlenen aralıkta kararlı hale dönüştürülebilir. ■

8
BANACH UZAYLARINDA FRÉCHET VE GÂTEAUX TÜREVLERİ İLE BELİRLİ İTERASYON SINIFLARININ KAOS KONTROLÜ

Kaos kontrolün önemi tahmin edilemez bir sistemi gerçek hayat anlamında somut süreçler ya da soyut düşünce bakımından anlamlı süreçlere dönüştürmektir. Bu konu üzerine iterasyon yöntemlerinin çalışılmasının temel amacı iterasyon yöntemlerinin matematiğin ve uygulamalı bilimlerin bir çok alanında kullanılıyor olmasıdır.

Kaos kontrolün sabit nokta iterasyon yöntemleri ile çalışılması genel olarak reel uzaylarda yapılmıştır. Bir reel uzayda kaotik bir fonksiyonun bir başlangıç noktasına bağlı olarak iterasyonun incelenmesi ve onun kaos yapısından kurtarılması iterasyon yöntemlerinin uygun parametre seçimleriyle gerçekleşmektedir. Burada parametrelerin uygun seçimine imkan veren metot, ilgili iterasyonun türevidir. Herhangi bir $\widetilde{f}_{\alpha,\beta}$ iterasyonu için $\left|\widetilde{f}'_{\alpha,\beta}\right| < 1$ koşulunu sağlayan parametreler $x_{n+1} = f_\mu(x_n)$ kaotik sistemini kontrol eder ve $\left|\widetilde{f}'_{\alpha,\beta}\right| > 1$ için sistemde $\alpha, \beta \in (0,1)$ için kontrole uygun olmayan parametrelerin sistem üzerine etkilerinin araştırılmasından meydana gelmektedir.

Sabit nokta iterasyon yöntemlerinin reel uzay haricinde metrik ve normlu uzaylarda da çalışıldığı iyi bilinmektedir. Çalışmamızın temel problemi bakımından sabit nokta iterasyon yöntemlerinin metrik ve normlu uzaylardaki kaos kontrol yapısının nasıl oluştuğu doğal bir problem olarak ortaya çıkmaktadır. Özellikle bu bölümde, normlu uzaylar arasında tanımlanmış kaotik yapılı bir operatörün belirli sabit nokta iterasyon yöntemleriyle ve bu iterasyonların uygun parametre seçimleriyle kaotik yapılı bir operatörün dinamik yapısının nasıl elde edileceği araştırılacaktır. Normlu uzayların dolayısıyla da Banach uzaylarının kullanışlı yapısı göz önüne alınırsa çalışma daha değerli hale gelmektedir.

Normlu uzaylar arasındaki bir dönüşümün kaos yapısına bağlı olarak kontrol mekanizması Gâteaux türevi ya da buna bağlı olarak Fréchet türeviyle kontrol

edilmektedir. Kaos yapılı bir operatörün belirli sabit nokta nokta iterasyon yöntemi altındaki parametre davranışları Gâteaux ya da Fréchet türeviyle belirlenebilmektedir. Banach ya da metrik uzaylardaki çalışmalarda reel dünyadan farklı olarak normlu uzayların kalıtsal özelliklerinden kaynaklı kontrol parametrelerinin aralıkları farklılaşmaktadır. Kontrol parametrelerinin farklılaşan aralıklarını belirleyen matematiksel argüman operatörün türevleri olmaktadır.

Bu bölüm altında kullanacağımız türev çeşitleri yöne bağlı Banach uzaylarında kontrol imkanı veren Gâteaux ve Fréchet türevleridir. Şimdi bu iki türev çeşidinin tanım ve özellikleri verilecektir.

Tanım 8.1 (**Gâteaux Türevi**). X bir vektör uzayı, Y bir normlu uzay ve $T : X \to Y$ bir operatör olsun. $D(T) = U \subseteq X$ bir açık küme olarak tanımlansın. $x \in U$, $h \in X$ vektörleri için $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x + th \in U$ koşulu sağlansın.

$$D_h(T) = \lim_{t \to 0} \frac{T(x+th) - T(x)}{t} = \frac{d}{dt}\left(T(x+th)\right)|_{t=0} = T'(x)h$$

limiti var ise $D_h(T) \in Y$ vektörüne T'nin $x \in U$'da h yönündeki Gâteaux türevi veya diferansiyeli denir [113].

Dikkat edilirse, Gâteaux türevinin tanımında X vektör uzayı normlu vektör uzayı olarak alınmamaktadır. Bu nedenle Gâteaux türevi var olan bir operatörün o noktada her zaman sürekli olması gerekmez. Normlu iki vektör uzayı arasında tanımlı bir operatörün süreklilik (sınırlılık) şartı altında türevi Fréchet türevi ile bulunur.

Tanım 8.2 (**Fréchet Türevi**). X ve Y iki normlu uzay ve $T : X \to Y$ bir operatör olsun. $D(T) = U \subseteq X$ bir açık küme olarak tanımlansın. Her $h \in X$ için bir $x \in U$ vektöründe

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|T(x+h) - T(x) - T'(x)h\|}{\|h\|} = 0$$

bağıntısını sağlayacak şekilde bir $T'(x) \in B(X,Y)$ sürekli lineer operatörü var ise $T'(x)$ operatörüne T operatörünün x vektöründeki Fréchet türevi denir. $T' : X \to B(X,Y)$ operatörüne ise T'nin Fréchet türevi denmektedir [113].

Teorem 8.1. *$T : X \to Y$ operatörünün $x_0 \in X$ vektöründe Fréchet türevi varsa T operatörü bu noktada süreklidir [113].*

Teorem 8.2. *$T : X \to Y$ operatörünün $x_0 \in X$ vektöründe Fréchet türevi varsa bu noktada Gâteaux türevi de vardır ve bu iki türev birbirine eşittir [113].*

Teorem 8.3 (**Zincir Kuralı**). *X bir vektör uzayı, Y ve Z ise normlu vektör uzayları olsun. $T : X \to Y$ operatörü X'de Gâteaux türevlenebilir, $H : Y \to Z$ operatörü de Y'de Fréchet*

türevlenebilir ise $R = H \circ T : X \to Z$ operatörü X'de Gâteaux türevlenebilir ve $x \in X$'deki Gâteaux türevi

$$DR(x) = H'(T(x)) \circ DT(x)$$

ile gösterilir. X bir normlu uzay ve T operatörü X'de Fréchet türevlenebilir ise R de Fréchet türevlenebilirdir ve

$$R'(x) = H'(T(x)) \circ T'(x)$$

şeklindedir [113].

Teorem 8.4. *X, Y ve Z bir Banach uzayı olsun. $T : X \to Y$ ve $H : Y \to Z$ birer dönüşüm olsun. $U \subset X$ ve $V \subset Y$ olmak üzere $h \in X$ yönünde T'nin $x \in U$ noktasında Gâteaux türevi varsa h yönünde $T(x) \in V$ noktasında H'nin Gâteaux türevi vardır denir ve sembolik olarak aşağıdaki gibi gösterilir:*

$$\begin{aligned} D_h(D_h(T)) &= \lim_{t\to 0} \frac{H(T(x+th)) - H(T(x))}{t} \\ &= \frac{d}{dt}\left(H(T(x+th))\right)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} H(T(x+th))|_{t=0} \, \frac{d}{dt} T(x+th)|_{t=0} \\ &= H'(T(x))\, T'(x) h. \end{aligned}$$

Görüldüğü üzere, Gâteaux türevi Banach uzaylarında yöne bağlı değişimlerin hesaplanması için bir yöntem sunmaktadır. Sabit nokta iterasyonlarının reel uzayda sahip olduğu fonksiyonun sabit noktalarının kararsızlık (iticilik) ya da kararlılık (çekicilik) gibi özelliklerinin fonksiyonun türeviyle elde ediliyor olması benzer düşüncenin Banach uzayında bir operatörün sabit noktaları için Gâteaux türevi yoluyla test edilmesi imkanını vermektedir.

Bir iterasyon algoritmasının kaotik davranışı, kaos yapısına sahip reel uzaylarda fonksiyonlar ile normlu uzaylarda ise operatörlerle belirlenmektedir. Kaos özelliğine sahip operatörlerin normlu uzaylarda kaotik davranışları operatörün kararlı ve kararsız noktalarıyla belirlenmektedir. Normlu uzaylarda bir sabit noktanın çeşidi operatörün türeviyle şu şekilde belirlenmektedir:

Tanım 8.3. $(X, \|.\|)$ bir Banach uzayı ve $U \subset X$ olsun. $T : U \to U$ dönüşümü $Tx^* = x^*$ eşitliğini sağlayan bir $x^* \in U$ sabit noktasına sahip olsun. Bu takdirde

1. $\|T'(x^*)\| < 1$ ise x^* noktası çekici (kararlı) sabit noktadır; yani x^* civarındaki herhangi bir x noktası için $\lim_{n\to\infty} T^n(x) = x^*$ dir.
2. $\|T'(x^*)\| > 1$ ise x^* noktası itici (kararsız) sabit noktadır; yani x^* civarındaki herhangi bir x noktası için $\lim_{n\to\infty} T^n(x) = \pm\infty$ dur.

3. $\|T'(x^*)\| = 1$ ise x^* noktası nötr sabit noktadır [160].

Çalışmanın bu aşamasında literatürde geniş ilgi gören sabit nokta iterasyon sınıfları için T dönüşümü kaotik kabul edilecektir ve ilgili iterasyon sınıfları ile oluşturulan kaos kontrol mekanizmaları $\widetilde{T}$ ile gösterilecektir.

Kabul edelim ki; $(X, \|.\|)$ bir Banach uzayı ve $T : X \to X$ lineer olmayan bir dönüşüm olsun. $x_0 \in X$ başlangıç yörüngesine sahip bir-boyutlu diskrit dinamik sistem her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_{n+1} = T(x_n) \tag{8.1}$$

şeklinde tanımlansın. $x^* \in X$, T operatörünün sabit noktası olarak alınırsa bu dönüşümün sabit noktalar kümesi

$$F_T = \{x^* : x^* \in X,\ T(x^*) = x^*\}$$

şeklinde gösterilmektedir. Eğer T operatörü sürekli ise (8.1) denkleminin çözümü $G(x^*) = T(x^*) - x^* = 0$ denkleminin çözümüne karşılık gelir. Bu takdirde, F_T kümesi boş olmayan bir kümedir ve $G(x^*) = 0$'dır; yani T operatörü bir sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, eğer T operatörü (4.1) ile verilen büzülme (contraction) şartını sağlıyor ise Banach Sabit Nokta Teoremi [139] gereğince; sabit noktanın varlığı ve tekliği garanti edilir.

Sabit nokta iterasyonlarının ilginç özelliklerinden biri de yakınsama ve hız bakımından birbirinden farklı olmalarına karşın bu iterasyon metotlarının kaotik davranış altındaki kontrol aralıkları belirli iterasyon sınıfları için parametrelerin durumu değişken olmakla birlikte aynı kontrol aralıklarına sahip olmalarıdır. Aşağıda iterasyon sınıfları üzerinde kaos durumunda kontrol aralıklarının denkliği verilecektir. Özellikle belirtmek gerekir ki; iterasyonların karakteristiği olan hız karşılaştırması ve genellemesi kaos kontrol aralıklarının belirlenmesinden bağımsız olarak ortaya çıkmaktadır. Diğer bir ifadeyle, iterasyonların kalıtsal özellikleri olan hız ve yakınsama parametrelerle elde edilen kontrol aralıklarında da kalıtsal olarak devam etmektedir.

Çalışmanın bu bölümünde; literatürde öne çıkmış önemli sabit nokta iterasyon yöntemleri kaotik dönüşüm sınıflarının kaos kontrolünün sağlanması amacıyla kullanılacaktır ve seçilen iterasyon yöntemlerinin parametreleri ile kaotik dönüşümün kararlı olduğu kontrol aralıkları elde edilecektir. Ayrıca, belirlenen kontrol aralıklarından birbirine denk olan iterasyon yöntemleri belirlenerek, kaos özellikli standart lojistik dönüşüm sınıfları üzerinde uygulanacaktır.

Kontrol mekanizmasının elde edilmesi için ilk incelenecek sabit nokta iterasyon metotları Gürsoy ve Karakaya [161] tarafından 2014 yılında tanımlanmış Picard-S iterasyon yöntemi ile 2016 yılında Thakur ve ark. [162] tarafından tanımlanan üç adımlı sabit nokta iterasyon yöntemleridir.

8.1 Picard-S ve Thakur İterasyon Yöntemleri ile Kaos Kontrol

(8.1) ile verilen bir-boyutlu diskrit dinamik sistemini göz önüne alalım. X bir Banach uzayı olmak üzere, $T : X \to X$ sürekli ve ve Fréchet anlamında türevlenebilir bir dönüşüm olsun. Eğer T dönüşümü (4.1) büzülme koşulunu sağlıyor ise Banach Sabit Nokta Teoremi [139] gereğince; X kümesi üzerinde tek bir sabit noktaya sahiptir, yani $T(x^*) = x^*$ olacak şekilde $x^* \in X$ noktası vardır. Ayrıca, $T'(x^*)$ türevinin varlığını kabul edelim.

Literatürde Picard-S iterasyon yöntemi [161] olarak bilinen ve büzülme dönüşüm sınıfları için Picard [142], Mann [86], Ishikawa [83], Noor [84], SP [163], CR [164], S [165, 166] ve bazı iterasyon yöntemlerinden daha hızlı yakınsayan iterasyon yöntemi aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

Tanım 8.4. $(\alpha_n), (\beta_n) \subset [0,1]$ belirli koşulları sağlayan reel diziler olmak üzere

$$\begin{cases} x_0 \in X \\ x_{n+1} = Ty_n \\ y_n = (1-\alpha_n)\,T(x_n) + \alpha_n T(z_n) \\ z_n = (1-\beta_n)\,x_n + \beta_n T(x_n) \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{8.2}$$

olarak tanımlanan (x_n) dizisi **Picard-S iterasyon yöntemi** olarak adlandırılır [161].

2016 yılında, Thakur ve ark. [162] genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm sınıflarının sabit noktaya yakınsaklığını garanti eden yeni bir üç adımlı iterasyon yöntemini aşağıdaki şekilde tanımlamışlardır.

Tanım 8.5. $(\alpha_n), (\beta_n) \subset (0,1)$ belirli koşulları sağlayan reel diziler olmak üzere

$$\begin{cases} x_0 \in X \\ x_{n+1} = Ty_n \\ y_n = T\left[(1-\alpha_n)\,x_n + \alpha_n z_n\right] \\ z_n = (1-\beta_n)\,x_n + \beta_n T(x_n) \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{8.3}$$

olarak tanımlanan (x_n) dizisi **Thakur iterasyon yöntemi** olarak adlandırılır [162].

(8.2) ve (8.3) ile verilen iterasyon yöntemlerini oluşturan $T : X \to X$ dönüşümü kaotik bir dönüşüm olsun. T iterasyon dönüşümü ile elde edilen $x_{n+1} = \widetilde{T}(x_n)$ kaos kontrol mekanizmalarının kontrol parametrelerine ait kararlılık aralıklarının bulunması için gerekli koşullar belirlenerek analitik ispatı aşağıda verilecektir.

Teorem 8.5. *$(X, \|.\|)$ bir Banach uzayı, $T : X \to X$ sürekli bir dönüşüm ve $x^* = Tx^*$ olsun. (8.2) ve (8.3) iterasyon yöntemleri ile kurulan kaos kontrol mekanizmaları $x_{n+1} = \widetilde{T}(x_n)$ ile gösterilsin. T ile $\widetilde{T}$ dönüşümleri aynı sabit noktalar kümesine sahiptir. Bununla birlikte, T dönüşümü Gâteaux türevi $\|T'(x^*)\| > 1$ şartını sağlayan $x^* \in X$ kararsız (itici) sabit noktalara sahip kaotik bir dönüşüm olsun. Bu takdirde, $\left\|\widetilde{T}'(x^*)\right\| < 1$ kararlılık koşulu altında, kararsız yörüngeleri kararlı (çekici) hale dönüştüren Picard-S [161] ve Thakur [162] kontrol mekanizmalarının kararlılık aralıkları denktir ve*

$$\alpha_n\beta_n \subset \left(\frac{\left\|T'^2(x^*)\right\| - 1}{\|T'^2(x^*)\| \, \|T'(x^*) - 1\|}, \frac{\left\|T'^2(x^*)\right\| + 1}{\|T'^2(x^*)\| \, \|T'(x^*) - 1\|} \right) \tag{8.4}$$

olacak şekilde $(\alpha_n), (\beta_n) \subset (0,1)$ kontrol parametrelerinin belirlediği uygun bir kontrol aralığı her zaman bulunmaktadır.

İspat. $(\alpha_n), (\beta_n) \subset (0,1)$ kontrol parametre dizileri olmak üzere, (8.2) ile verilen Picard-S iterasyon yöntemi [161] ile kurulan sabit nokta kaos kontrol mekanizması

$$x_{n+1} = \widetilde{T}(x_n) \equiv T\left[(1-\alpha_n)T(x_n) + \alpha_n T\left[(1-\beta_n)x_n + \beta_n T(x_n)\right]\right] \tag{8.5}$$

şeklinde tanımlansın. Kabul edelim ki; $x^* \in X$, T dönüşümünün reel bir sabit noktası olsun. Bu takdirde, $x^* = Tx^*$ için (8.5) kontrol mekanizması yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}(x^*) &= T\left[(1-\alpha_n)T(x^*) + \alpha_n T\left[(1-\beta_n)x^* + \beta_n T(x^*)\right]\right] \\
&= T\left[(1-\alpha_n)T(x^*) + \alpha_n T\left[(1-\beta_n)x^* + \beta_n x^*\right]\right] \\
&= T\left[(1-\alpha_n)T(x^*) + \alpha_n T(x^*)\right] \\
&= T\left[(1-\alpha_n)x^* + \alpha_n x^*\right] \\
&= T(x^*) \\
&= x^*
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani, $x^* = Tx^*$ iken $\widetilde{T}(x^*) = x^*$ olmaktadır. Dolayısıyla, T orijinal dönüşümü ile (8.2) ile verilen $\widetilde{T}$ kontrol mekanizması aynı sabit noktalar kümesini paylaşmaktadır.

Şimdi, T dönüşümünün $\|T'(x^*)\| > 1$ koşulunu sağlayan kararsız bir sabit noktası olarak $x^* \in X$ alalım. Öncelikle, $\left\|\widetilde{T}'(x^*)\right\| < 1$ kararlılık koşulunun sağlanabilmesi için

$\widetilde{T}$ dönüşümünün Gâteaux türevinin elde edilmesi gerekmektedir. $\widetilde{T}(x_n)$ dönüşümü bir bileşke ve toplam içerdiğinden, türev fonksiyonunu elde etmeden önce $\widetilde{T}$ dönüşümünü meydana getiren yapıları belirleyelim. (8.5)'de

$$H(x) := (1-\alpha_n)\,T(x_n) + \alpha_n T\left[(1-\beta_n)\,x_n + \beta_n T(x_n)\right]$$
$$G(x) := (1-\beta_n)\,x_n + \beta_n T(x_n)$$

olarak alınsın. $\widetilde{T}(x_n)$ dönüşümünün h yönünde ve $x^* \in X$ sabit noktasında Gâteaux türevi $t \in \mathbb{R}$ için

$$D_h\left(\widetilde{T}(x^*)\right) = \lim_{t\to 0} \frac{\widetilde{T}(x^*+th) - \widetilde{T}(x^*)}{t} = \frac{d}{dt}\left(\widetilde{T}(x^*+th)\right)|_{t=0} \tag{8.6}$$

şeklindedir. Bileşke operatörler (8.6)'da yerine yazıldığında

$$\frac{d}{dt}\left(\widetilde{T}(x^*+th)\right)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(T(H(x^*+th))\right)|_{t=0}\,\frac{d}{dt}\left(H(x^*+th)\right)|_{t=0} \tag{8.7}$$

elde edilir. H operatörünün türevi

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(H(x^*+th)\right)|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\left((1-\alpha_n)\,T(x^*+th) + \alpha_n T(G(x^*+th))\right)|_{t=0} \\
&= (1-\alpha_n)\,\frac{d}{dt}\left(T(x^*+th)\right)|_{t=0} + \alpha_n \frac{d}{dt}\left(T(G(x^*+th))\right)|_{t=0}\,\frac{d}{dt}\left(G(x^*+th)\right)|_{t=0} \\
&= (1-\alpha_n)\,T'(x^*+th)h\,|_{t=0} + \alpha_n T'(G(x^*+th))\,|_{t=0}\,G'(x^*+th)\,|_{t=0} \\
&= (1-\alpha_n)\,T'(x^*)h + \alpha_n T'(x^*)\left[(1-\beta_n)h + \beta_n T'(x^*)h\right] \\
&= hT'(x^*)\left[1 + \alpha_n\beta_n\left(T'(x^*)-1\right)\right]
\end{aligned}$$

olarak bulunur ve (8.7)'de yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\widetilde{T}(x^*+th)\right)|_{t=0} &= T'(H(x^*+th))\,|_{t=0}\left[hT'(x^*)\left[1+\alpha_n\beta_n\left(T'(x^*)-1\right)\right]\right] \\
&= hT'^2(x^*)\left[1+\alpha_n\beta_n\left(T'(x^*)-1\right)\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $\widetilde{T}$ operatörünün Gâteaux türevi

$$D_h\left(\widetilde{T}(x^*)\right) = \frac{d}{dt}\left(\widetilde{T}(x^*+th)\right)|_{t=0} = hT'^2(x^*)\left[1+\alpha_n\beta_n\left(T'(x^*)-1\right)\right]$$

şeklinde bulunur. $\widetilde{T}$ operatörünün Fréchet türeviyle normu

$$\begin{aligned}\left\|\widetilde{T}'(x^*)\right\| &= \sup \frac{\left\|\widetilde{T}'(x^*)h\right\|}{\|h\|} \\ &= \sup \frac{\left\|hT'^2(x^*)[1+\alpha_n\beta_n(T'(x^*)-1)]\right\|}{\|h\|} \\ &= \left\|T'^2(x^*)\right\|.\left\|1+\alpha_n\beta_n\left(T'(x^*)-1\right)\right\|\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Teoremin hipotezinde verilen $\left\|\widetilde{T}'(x^*)\right\| < 1$ kararlılık koşulu uygulandığında, T kaotik dönüşümünü kararlı hale getirecek kontrol parametre aralıkları belirlenir. Bu takdirde, $\left\|\widetilde{T}'(x^*)\right\| < 1$ ise

$$0 \leq \left\|T'^2(x^*)\right\| \left\|1+\alpha_n\beta_n\left(T'(x^*)-1\right)\right\| < 1 \tag{8.8}$$

şartını sağlayan $(\alpha_n),(\beta_n) \subset (0,1)$ kontrol parametreleri dinamik bir aralık belirler. (8.8) denklemi çözüldüğünde

$$0 \leq \left\|1+\alpha_n\beta_n\left(T'(x^*)-1\right)\right\| < \frac{1}{\|T'^2(x^*)\|} \tag{8.9}$$

elde edilir. Normlu uzaylara ait

$$0 \leq |\|x\|-\|y\|| \leq \|x-y\| \tag{8.10}$$

eşitsizliği, (8.9) denklemine uygulandığında

$$0 \leq \left|1-\left\|\alpha_n\beta_n\left(T'(x^*)-1\right)\right\|\right| \leq \left\|1+\alpha_n\beta_n\left(T'(x^*)-1\right)\right\| < \frac{1}{\|T'^2(x^*)\|}$$

ise

$$0 \leq \left|1-\left\|\alpha_n\beta_n\left(T'(x^*)-1\right)\right\|\right| < \frac{1}{\|T'^2(x^*)\|} \tag{8.11}$$

bulunur. $\frac{1}{\|T'^2(x^*)\|} > 0$ olduğundan (8.11)'den

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\|T'^2(x^*)\|} < 1-\alpha_n\beta_n\left\|\left(T'(x^*)-1\right)\right\| &< \frac{1}{\|T'^2(x^*)\|} \\ \frac{-1-\left\|T'^2(x^*)\right\|}{\|T'^2(x^*)\|} < -\alpha_n\beta_n\left\|\left(T'(x^*)-1\right)\right\| &< \frac{1-\left\|T'^2(x^*)\right\|}{\|T'^2(x^*)\|} \\ \frac{\left\|T'^2(x^*)\right\|-1}{\|T'^2(x^*)\|} < \alpha_n\beta_n\left\|\left(T'(x^*)-1\right)\right\| &< \frac{\left\|T'^2(x^*)\right\|+1}{\|T'^2(x^*)\|}\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte, T kaotik dönüşümünün $x^* \in X$ kararsız sabit noktasını kararlı hale getiren (8.2) ile verilen $\widetilde{T}$ kontrol mekanizması kontrol parametrelerinin

belirlediği kararlılık aralığı

$$\frac{\left\|T'^{2}(x^*)\right\|-1}{\|T'^{2}(x^*)\|\,\|(T'(x^*)-1)\|}<\alpha_n\beta_n<\frac{\left\|T'^{2}(x^*)\right\|+1}{\|T'^{2}(x^*)\|\,\|(T'(x^*)-1)\|} \tag{8.12}$$

şeklinde belirlenir.

İspatın buradan sonraki kısmında, (8.3) ile tanımlanan Thakur [162] iterasyon yönteminin kaotik fonksiyonların kaos kontrolü için gerekli genel dinamiksel özellikleri belirlenecektir.

$(\alpha_n),(\beta_n)\subset(0,1)$ kontrol parametreleri olmak üzere, (8.3) ile verilen Thakur iterasyon yönteminin oluşturduğu kaos kontrol mekanizması

$$x_{n+1}=\widetilde{T}(x_n)\equiv T\left[T\left[(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n\left[(1-\beta_n)x_n+\beta_nT(x_n)\right]\right]\right] \tag{8.13}$$

şeklinde tanımlansın. T dönüşümünün $x^*\in X$ reel sabit noktası için bir önceki süreçlere benzer işlem süreçleri uygulandığında $x^*=Tx^*$ ise $\widetilde{T}(x^*)=x^*$ olarak bulunur. Böylece, T ile (8.3) ile verilen $\widetilde{T}$ dönüşümünün sabit noktalar kümesi aynıdır.

Şimdi, $\|T'(x^*)\|>1$ koşulunu sağlayan $x^*\in X$ kararsız sabit noktası için $\left\|\widetilde{T}'(x^*)\right\|<1$ kararlılık koşulu sağlatılsın. Bunun için, öncelikle (8.13) ile verilen kontrol mekanizmasının Gâteaux türevini hesaplayalım. Kontrol mekanizmasının bileşke operatörlerden oluştuğu göz önüne alınırsa, (8.13) ile verilen $\widetilde{T}$ kontrol mekanizması için

$$\begin{aligned}H(x)&:=T\left[(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n\left[(1-\beta_n)x_n+\beta_nT(x_n)\right]\right],\\G(x)&:=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n\left[(1-\beta_n)x_n+\beta_nT(x_n)\right],\\R(x)&:=(1-\beta_n)x_n+\beta_nT(x_n)\end{aligned}$$

operatörleri tanımlandığında, (8.6) ile verilen türev denkleminden $\widetilde{T}$ dönüşümünün $x^*\in X$ noktasındaki Gâteaux türevi, $t\in\mathbb{R}$ için

$$D_h\left(\widetilde{T}(x^*)\right)=\frac{d}{dt}\left(\widetilde{T}(x^*+th)\right)|_{t=0}=\frac{d}{dt}\left(T\left(H(x^*+th)\right)\right)|_{t=0}\,\frac{d}{dt}\left(H(x^*+th)\right)|_{t=0} \tag{8.14}$$

şeklindedir. Buradan, H operatörünün türevi

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(H\left(x^*+th\right)\right)|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\left(T\left(G\left(x^*+th\right)\right)\right)|_{t=0}\,\frac{d}{dt}\left(G\left(x^*+th\right)\right)|_{t=0}\\ &= T'\left(G\left(x^*+th\right)\right)|_{t=0}\,\frac{d}{dt}\left(\left(1-\alpha_n\right)\left(x^*+th\right)+\alpha_n\left[R\left(x^*+th\right)\right]\right)|_{t=0}\\ &= T'\left(x^*\right)\left[\left(1-\alpha_n\right)h+\alpha_n\frac{d}{dt}\left(R\left(x^*+th\right)\right)|_{t=0}\right]\\ &= T'\left(x^*\right)\left[\left(1-\alpha_n\right)h+\alpha_n\frac{d}{dt}\left(\left(1-\beta_n\right)\left(x^*+th\right)+\beta_n T\left(x^*+th\right)\right)|_{t=0}\right]\\ &= T'\left(x^*\right)\left[\left(1-\alpha_n\right)h+\alpha_n\left[\left(1-\beta_n\right)h+\beta_n T'\left(x^*\right)h\right]\right]\\ &= T'\left(x^*\right)h\left[1+\alpha_n\beta_n\left(T'\left(x^*\right)-1\right)\right]\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. (8.14)'de yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}D_h\left(\widetilde{T}\left(x^*\right)\right) &= \frac{d}{dt}\left(\widetilde{T}\left(x^*+th\right)\right)|_{t=0} = T'\left(H\left(x^*+th\right)\right)|_{t=0}\left[T'\left(x^*\right)h\left[1+\alpha_n\beta_n\left(T'\left(x^*\right)-1\right)\right]\right]\\ &= T'\left(x^*\right)T'\left(x^*\right)h\left[1+\alpha_n\beta_n\left(T'\left(x^*\right)-1\right)\right]\\ &= T'^2\left(x^*\right)h\left[1+\alpha_n\beta_n\left(T'\left(x^*\right)-1\right)\right]\end{aligned}$$

bulunur. $\widetilde{T}'$ operatörünün x^* sabit noktasındaki normu

$$\begin{aligned}\left\|\widetilde{T}'\left(x^*\right)\right\| &= \sup\frac{\left\|\widetilde{T}'\left(x^*\right)h\right\|}{\|h\|} = \sup\frac{\left\|T'^2\left(x^*\right)h\left[1+\alpha_n\beta_n\left(T'\left(x^*\right)-1\right)\right]\right\|}{\|h\|}\\ &= \left\|T'^2\left(x^*\right)\right\|\left\|1+\alpha_n\beta_n\left(T'\left(x^*\right)-1\right)\right\|\end{aligned}$$

olarak elde edilir. $\left\|\widetilde{T}'\left(x^*\right)\right\|<1$ kararlık koşulu altında

$$\begin{aligned}&0\le\left|1-\left\|\alpha_n\beta_n\left(T'\left(x^*\right)-1\right)\right\|\right|\le\left\|1+\alpha_n\beta_n\left(T'\left(x^*\right)-1\right)\right\|<\frac{1}{\|T'^2\left(x^*\right)\|}\\ &\Rightarrow 0\le\left\|1+\alpha_n\beta_n\left(T'\left(x^*\right)-1\right)\right\|<\frac{1}{\|T'^2\left(x^*\right)\|}\end{aligned}$$

elde edilir. Normlu uzaylara ait (8.10) eşitsizliği kullanılarak, ispatın ilk bölümüne benzer işlem süreci uygulandığında

$$\frac{\left\|T'^2\left(x^*\right)\right\|-1}{\|T'^2\left(x^*\right)\|\,\|\left(T'\left(x^*\right)-1\right)\|}<\alpha_n\beta_n<\frac{\left\|T'^2\left(x^*\right)\right\|+1}{\|T'^2\left(x^*\right)\|\,\|\left(T'\left(x^*\right)-1\right)\|}$$

olacak şekilde (8.12) ile aynı kararlılık aralığı elde edilir. Dolayısıyla, (8.2) ve (8.3) iterasyon yöntemlerinin kaotik bir T dönüşümünü kararlı hale getirecek parametre aralıkları birbirine denktir. Böylelikle ispat tamamlanır. ■

Yukarıdaki teoremde kararsız sabit noktaya sahip ve kaotik olan bir dönüşümün kararlı hale getirilme süreci ile benzer düşünceyle periyodik özellikli kaotik bir fonksiyonun kararlı hale getirilme süreçleri de asağıdaki teorem ile verilecektir.

Teorem 8.6. *$(X,\|.\|)$ bir Banach uzayı ve $T:X\to X$ sürekli bir dönüşüm olsun. (8.2) ve (8.3) iterasyon yöntemlerinin m- periyodlu periyodik yörüngeler için kontrol mekanizmaları $x_{n+1}=\widetilde{T}_{(m)}(x_n)$ ile gösterilsin. T^m ile $\widetilde{T}_{(m)}$ dönüşümleri aynı sabit noktalar kümesini paylaşırlar. Bununla birlikte, Gâteaux türevi $\|T^{m\prime}(x^*)\|>1$ şartını sağlayan kaotik T dönüşümünün kararsız m- periyodlu periyodik sabit noktası $x^*\in X$ olsun. $\left\|\widetilde{T}'_{(m)}(x^*)\right\|<1$ kararlılık koşulunu sağlayan Picard-S [161] ve Thakur [162] kontrol mekanizmalarının periyodik yörüngeler için kararlılık aralıkları denktir ve*

$$\alpha_n\beta_n\subset\left(\frac{\left\|(T^{m\prime})^2(x^*)\right\|-1}{\left\|(T^{m\prime})^2(x^*)\right\|\|(T^{m\prime}(x^*)-1)\|},\frac{\left\|(T^{m\prime})^2(x^*)\right\|+1}{\left\|(T^{m\prime})^2(x^*)\right\|\|(T^{m\prime}(x^*)-1)\|}\right)$$

olacak şekilde $\widetilde{T}_{(m)}$ kontrol mekanizmasının $(\alpha_n),(\beta_n)\subset(0,1)$ parametrelerinin belirlediği uygun bir kararlılık aralığı bulunmaktadır.

İspat. Kabul edelim ki; $T^m=\underbrace{T\circ T\circ\cdots\circ T}_{m\text{-defa}}$ bileşkesi T operatörünün m. tekrarını göstersin. $(\alpha_n),(\beta_n)\subset(0,1)$ kontrol parametreleri olmak üzere, (8.2) ile verilen Picard-S iterasyon yöntemi m- periyodlu periyodik yörüngeler için aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$x_{n+1}=\widetilde{T}_{(m)}(x_n)\equiv T^m[(1-\alpha_n)T^m(x_n)+\alpha_nT^m[(1-\beta_n)x_n+\beta_nT^m(x_n)]]. \quad (8.15)$$

$x^*\in X$, T dönüşümünün m- periyodlu periyodik bir sabit noktası olsun. $x^*=T^m(x^*)$ ise

$$\begin{aligned}\widetilde{T}_{(m)}(x^*) &= T^m[(1-\alpha_n)T^m(x^*)+\alpha_nT^m[(1-\beta_n)x^*+\beta_nT^m(x^*)]]\\ &= T^m[(1-\alpha_n)T^m(x^*)+\alpha_nT^m[(1-\beta_n)x^*+\beta_nx^*]]\\ &= T^m[(1-\alpha_n)T^m(x^*)+\alpha_nT^m(x^*)]\\ &= T^m(x^*)\\ &= x^*\end{aligned}$$

elde edilir. Yani, $x^*=T^m(x^*)$ ise $\widetilde{T}_{(m)}(x^*)=x^*$ olur. Dolayısıyla, T^m ile $\widetilde{T}_{(m)}$ dönüşümleri aynı sabit noktalar kümesini paylaşmaktadır.

Diğer taraftan; $x^*\in X$, T dönüşümünün kararsız m- periyodlu periyodik bir sabit noktası ve $\|T^{m\prime}(x^*)\|>1$ olsun. (8.15) kontrol mekanizmasının $\left\|\widetilde{T}'_{(m)}(x^*)\right\|<1$ kararlılık şartı altında incelenebilmesi için türev fonksiyonuna ihtiyaç vardır.

(8.15) denkleminin bileşke formu

$$H(x) = (1-\alpha_n)\,T^m(x_n) + \alpha_n T^m\left[(1-\beta_n)\,x_n + \beta_n T^m(x_n)\right]$$
$$G(x) = (1-\beta_n)\,x_n + \beta_n T^m(x_n)$$

olarak alınsın. $\widetilde{T}_{(m)}(x_n)$ dönüşümünün h yönünde ve $x^* \in X$ sabit noktasında Gâteaux türevi $t \in \mathbb{R}$ için

$$D_h\left(\widetilde{T}_{(m)}(x^*)\right) = \lim_{t\to 0} \frac{\widetilde{T}_{(m)}(x^*+th) - \widetilde{T}_{(m)}(x^*)}{t} = \frac{d}{dt}\left(\widetilde{T}_{(m)}(x^*+th)\right)|_{t=0}$$

denklemi ile hesaplanmaktadır. Buradan

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\widetilde{T}_{(m)}(x^*+th)\right)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(T^m(H(x^*+th))\right)|_{t=0}\,\frac{d}{dt}\left(H(x^*+th)\right)|_{t=0}\\
&= T^{m\prime}(H(x^*+th))\,|_{t=0}\,\frac{d}{dt}\left((1-\alpha_n)\,T^m(x^*+th) + \alpha_n T^m(G(x^*+th))\right)|_{t=0}\\
&= T^{m\prime}(x^*)\left[\frac{d}{dt}\left((1-\alpha_n)\,T^m(x^*+th)\right)|_{t=0} + \frac{d}{dt}\left(\alpha_n T^m(G(x^*+th))\right)|_{t=0}\,\frac{d}{dt}\left(G(x^*+th)\right)|_{t=0}\right]\\
&= T^{m\prime}(x^*)\left[(1-\alpha_n)\,T^{m\prime}(x^*)h + \alpha_n T^{m\prime}(x^*)\left[(1-\beta_n)h + \beta_n T^{m\prime}(x^*)h\right]\right]\\
&= hT^{m\prime}(x^*)\left[T^{m\prime}(x^*) + \alpha_n\beta_n T^{m\prime}(x^*)\left(T^{m\prime}(x^*)-1\right)\right]
\end{aligned}$$

elde edilir ve gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$D_h\left(\widetilde{T}_{(m)}(x^*)\right) = h\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\left[1+\alpha_n\beta_n\left(T^{m\prime}(x^*)-1\right)\right]$$

olarak bulunur. $\widetilde{T}_{(m)}$ operatörünün Fréchet türeviyle normu

$$\begin{aligned}
\left\|\widetilde{T}'_{(m)}(x^*)\right\| &= \sup\frac{\left\|\widetilde{T}'_{(m)}(x^*)h\right\|}{\|h\|} = \sup\frac{\left\|h\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\left[1+\alpha_n\beta_n\left(T^{m\prime}(x^*)-1\right)\right]\right\|}{\|h\|}\\
&= \left\|\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\right\|\left\|1+\alpha_n\beta_n\left(T^{m\prime}(x^*)-1\right)\right\|
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. $\left\|\widetilde{T}'_{(m)}(x^*)\right\| < 1$ kararlılık koşulu uygulandığında

$$\begin{aligned}
0 &\le \left\|\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\right\|\left\|1+\alpha_n\beta_n\left(T^{m\prime}(x^*)-1\right)\right\| < 1\\
&\Rightarrow\ 0 \le \left\|1+\alpha_n\beta_n\left(T^{m\prime}(x^*)-1\right)\right\| < \frac{1}{\left\|\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\right\|}
\end{aligned}$$

elde edilir. Normlu uzaylara ait (8.10) eşitsizliği uygulandığında

$$0 \leq \left|1-\left\|\alpha_n\beta_n\left(T^{m\prime}(x^*)-1\right)\right\|\right| \leq \left\|1+\alpha_n\beta_n\left(T^{m\prime}(x^*)-1\right)\right\| < \frac{1}{\left\|\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\right\|}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \left|1-\left\|\alpha_n\beta_n\left(T^{m\prime}(x^*)-1\right)\right\|\right| < \frac{1}{\left\|\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\right\|} \tag{8.16}$$

denklemi elde edilir. $\frac{1}{\left\|\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\right\|} > 0$ olduğundan, mutlak değer fonksiyonunun özelliğinden (8.16) eşitsizliği

$$-\frac{1}{\left\|\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\right\|} < 1-\alpha_n\beta_n\left\|\left(T^{m\prime}(x^*)-1\right)\right\| < \frac{1}{\left\|\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\right\|}$$

$$-\frac{1}{\left\|\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\right\|}-1 < -\alpha_n\beta_n\left\|\left(T^{m\prime}(x^*)-1\right)\right\| < \frac{1}{\left\|\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\right\|}-1$$

$$\frac{\left\|\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\right\|-1}{\left\|\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\right\|} < \alpha_n\beta_n\left\|\left(T^{m\prime}(x^*)-1\right)\right\| < \frac{\left\|\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\right\|+1}{\left\|\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\right\|}$$

olarak elde edilir.

(8.15) ile tanımlı Picard-S kontrol mekanizmasının m- periyodlu periyodik sabit noktalar için $(\alpha_n),(\beta_n)\subset(0,1)$ kontrol parametrelerine ait kararlılık aralığı aşağıdaki şekilde belirlenmiştir:

$$\frac{\left\|\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\right\|-1}{\left\|\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\right\|\left\|\left(T^{m\prime}(x^*)-1\right)\right\|} < \alpha_n\beta_n < \frac{\left\|\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\right\|+1}{\left\|\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\right\|\left\|\left(T^{m\prime}(x^*)-1\right)\right\|}. \tag{8.17}$$

Benzer düşünceyle, $(\alpha_n),(\beta_n)\subset(0,1)$ kontrol parametreleri olmak üzere, (8.3) ile verilen Thakur [162] iterasyon yönteminin m- periyodlu periyodik yörüngeler için kaos kontrol mekanizması

$$x_{n+1}=\widetilde{T}_{(m)}(x_n)\equiv T^m\left[T^m\left[(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n\left[(1-\beta_n)x_n+\beta_nT^m(x_n)\right]\right]\right] \tag{8.18}$$

olacak şekilde yeniden tanımlansın. $x^*\in X$ için $x^*=T^m(x^*)$ ise $\widetilde{T}_{(m)}(x^*)=x^*$ olduğundan T^m ve $\widetilde{T}_{(m)}$ operatörlerinin sabit nokta kümeleri aynıdır.

Şimdi, $\|T^{m\prime}(x^*)\|>1$ koşulunu sağlayan kararsız m- periyodlu x^* periyodik sabit noktası için $\left\|\widetilde{T}'_{(m)}(x^*)\right\| < 1$ kararlılık koşulunu uygulayalım. (8.18) kontrol

mekanizmasında

$$
\begin{aligned}
H(x) &:= T^m[(1-\alpha_n)x_n + \alpha_n[(1-\beta_n)x_n + \beta_n T^m(x_n)]],\\
G(x) &:= (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n[(1-\beta_n)x_n + \beta_n T^m(x_n)],\\
R(x) &:= (1-\beta_n)x_n + \beta_n T^m(x_n)
\end{aligned}
$$

olarak tanımlandığında $\widetilde{T}_{(m)}$ dönüşümünün m- periyodlu x^* periyodik sabit noktasında h yönündeki Gâteaux türevi, $t \in \mathbb{R}$ için

$$
\begin{aligned}
D_h\left(\widetilde{T}_{(m)}(x^*)\right) &= \frac{d}{dt}\left(\widetilde{T}_{(m)}(x^*+th)\right)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(T^m(H(x^*+th))\right)|_{t=0}\,\frac{d}{dt}\left(H(x^*+th)\right)|_{t=0}\\
&= T^{m\prime}(H(x^*+th))|_{t=0}\,\frac{d}{dt}\left(T(G(x^*+th))\right)|_{t=0}\,\frac{d}{dt}\left(G(x^*+th)\right)|_{t=0}\\
&= T^{m\prime}(x^*)\,T^{m\prime}(G(x^*+th))|_{t=0}\,\frac{d}{dt}\left((1-\alpha_n)(x^*+th)+\alpha_n[R(x^*+th)]\right)|_{t=0}\\
&= T^{m\prime}(x^*)\,T^{m\prime}(x^*)\left[(1-\alpha_n)h + \alpha_n\frac{d}{dt}\left((1-\beta_n)(x^*+th)+\beta_n T(x^*+th)\right)|_{t=0}\right]\\
&= \left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\left[(1-\alpha_n)h + \alpha_n\left((1-\beta_n)h+\beta_n T^{m\prime}(x^*)h\right)\right]\\
&= \left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)h\left[1+\alpha_n\beta_n\left(T^{m\prime}(x^*)-1\right)\right]
\end{aligned}
$$

şeklinde hesaplanır. $\widetilde{T}_{(m)}$ operatörünün x^* sabit noktasındaki normu

$$
\begin{aligned}
\left\|\widetilde{T}'_{(m)}(x^*)\right\| &= \sup\frac{\left\|\widetilde{T}'_{(m)}(x^*)h\right\|}{\|h\|} = \sup\frac{\left\|(T^{m\prime})^2(x^*)h\left[1+\alpha_n\beta_n(T^{m\prime}(x^*)-1)\right]\right\|}{\|h\|}\\
&= \left\|\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\right\|\left\|1+\alpha_n\beta_n\left(T^{m\prime}(x^*)-1\right)\right\|
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. $\left\|\widetilde{T}'_{(m)}(x^*)\right\| < 1$ kararlık koşulu altında $\left\|(T^{m\prime})^2(x^*)\right\| > 1$ için

$$
\begin{aligned}
0 \quad &\leq \quad \left\|\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\right\|\left\|1+\alpha_n\beta_n\left(T'(x^*)-1\right)\right\| < 1\\
&\Rightarrow \quad 0 \leq \left\|1+\alpha_n\beta_n\left(T'(x^*)-1\right)\right\| < \frac{1}{\left\|(T^{m\prime})^2(x^*)\right\|}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Normlu uzaylara ait (8.10) eşitsizliği kullanılarak, ispatın ilk bölümüne benzer işlem süreci uygulandığında

$$
\frac{\left\|(T^{m\prime})^2(x^*)\right\|-1}{\left\|(T^{m\prime})^2(x^*)\right\|\,\|(T^{m\prime}(x^*)-1)\|} < \alpha_n\beta_n < \frac{\left\|(T^{m\prime})^2(x^*)\right\|+1}{\left\|(T^{m\prime})^2(x^*)\right\|\,\|(T^{m\prime}(x^*)-1)\|}
$$

parametre aralığı elde edilir ve (8.17) ile verilen parametre aralığı ile aynıdır. Dolayısıyla, (8.2) ve (8.3) iterasyon yöntemlerinin kaotik bir T dönüşümünün kararsız m- periyodlu periyodik sabit noktalarını kararlı hale getirecek parametre aralıkları birbirine denktir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır. ■

8.1.1 Picard-S ve Thakur Kontrol Mekanizmalarının Lojistik Sistem Uygulaması

$(X,\|.\|)$ bir Banach uzayı ve T sürekli bir dönüşüm olsun. $T:[0,1]\to[0,1]$ olmak üzere, kaotik bir-boyutlu diskrit dinamik sistem olarak

$$x_{n+1}=T(x_n)\equiv 4x_n(1-x_n) \tag{8.19}$$

lojistik dönüşümünü ele alalım. $Tx^*=x^*$ denklemi çözüldüğünde T dönüşümünün $x_1^*=0$ ve $x_2^*=\frac{3}{4}$ olacak şekilde iki tane sabit noktası bulunur. $x^*\in[0,1]$ için T lojistik dönüşümün Gâteaux türevi alınırsa

$$\begin{aligned}D_h(T(x^*)) &= \lim_{t\to 0}\frac{T(x^*+th)-T(x^*)}{t}\\ &= \frac{d}{dt}(T(x^*+th))\,|_{t=0}\\ &= 4\frac{d}{dt}((x^*+th)(1-(x^*+th)))\,|_{t=0}\\ &= h(4-8x^*)\end{aligned}$$

elde edilir. T operatörünün Fréchet türeviyle normu

$$\left\|T'(x^*)\right\|=\sup\frac{\|T'(x^*)h\|}{\|h\|}=\sup\frac{\|h(4-8x^*)\|}{\|h\|}=\|4-8x^*\| \tag{8.20}$$

şeklindedir. $x^*=x_2^*=\frac{3}{4}$ sabit noktası için

$$\left\|T'\left(x_2^*\right)\right\|=\left\|4-8.\frac{3}{4}\right\|=\|-2\|>1$$

olarak elde edilir. Tanım 8.3'den $x_2^*=\frac{3}{4}$ sabit noktasının T lojistik dönüşümü için kararsız (itici) sabit nokta olduğu görülmektedir ve T dönüşümü bu noktada kaotiktir.

(8.5) Picard-S kontrol mekanizmasına (8.19) lojistik dönüşümü uygulandığında

$$\begin{aligned}x_{n+1}=\widetilde{T}(x_n)&\equiv T[(1-\alpha_n)T(x_n)+\alpha_nT[(1-\beta_n)x_n+\beta_nT(x_n)]]\\ &= 16x_n(-1+x_n+\alpha_n\beta_n(-3+4x_n)(1-(2+3\beta_n)x_n+4\beta_nx_n^2))\\ &\times(1-4(-1+\alpha_n)(-1+x_n)x_n+4\alpha_nx_n\\ &\times(1-(1+3\beta_n)x_n+4\beta_nx_n^2)(-1+\beta_n(-3+4x_n)))\end{aligned} \tag{8.21}$$

elde edilir.

(8.13) ile verilen Thakur kontrol mekanizmasına (8.19) lojistik dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \widetilde{T}(x_n) \equiv T\left[T\left[(1-\alpha_n)x_n + \alpha_n\left[(1-\beta_n)x_n + \beta_n T(x_n)\right]\right]\right] \\ &= -16x_n(1-(1+3\alpha_n\beta_n)x_n + 4\alpha_n\beta_n x_n^2) \\ &\times (1-2(1+3\alpha_n\beta_n)x_n + 8\alpha_n\beta_n x_n^2)^2(-1+\alpha_n\beta_n(-3+4x_n)) \end{aligned} \tag{8.22}$$

elde edilir.

Teorem 8.5 hipotezleri altında; T lojistik dönüşümü için kararsız (itici) olan $x_2^* = \frac{3}{4}$ sabit noktası $\left\|\widetilde{T}'\left(\frac{3}{4}\right)\right\| < 1$ kararlılık koşulunu sağlayan Picard-S ve Thakur kontrol mekanizmalarının birbirine denk olarak $(\alpha_n), (\beta_n) \subset (0,1)$ kontrol parametreleri ile belirlediği (8.4) aralığında kararlı (çekici) sabit noktaya dönüşmektedir. Bu takdirde, (8.4) kullanılarak (8.21) ve (8.22) sistemlerine ait kararlılık aralıkları

$$\begin{aligned} \frac{\left\|T'^2\left(\frac{3}{4}\right)\right\| - 1}{\left\|T'^2\left(\frac{3}{4}\right)\right\| \left\|\left(T'\left(\frac{3}{4}\right)-1\right)\right\|} < \alpha_n\beta_n < \frac{\left\|T'^2\left(\frac{3}{4}\right)\right\| + 1}{\left\|T'^2\left(\frac{3}{4}\right)\right\| \left\|\left(T'\left(\frac{3}{4}\right)-1\right)\right\|} \\ \frac{\left\|(-2)^2\right\| - 1}{\left\|(-2)^2\right\| \|((-2)-1)\|} < \alpha_n\beta_n < \frac{\left\|(-2)^2\right\| + 1}{\left\|(-2)^2\right\| \|((-2)-1)\|} \\ \frac{1}{4} < \alpha_n\beta_n < \frac{5}{12} \end{aligned} \tag{8.23}$$

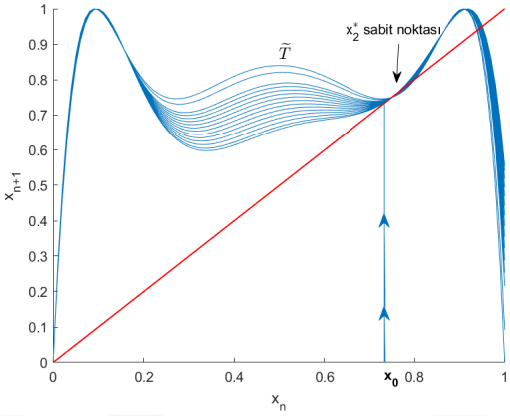
şeklinde elde edilmektedir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned} \Gamma_\alpha &= \frac{1}{4} < \alpha_n \leq \frac{5}{12} = \left(\frac{1}{4}, \frac{5}{12}\right] \\ \Gamma_\beta &= \frac{1}{4\alpha_n} < \beta_n < 1 = \left(\frac{1}{4\alpha_n}, 1\right) \end{aligned} \tag{8.24}$$

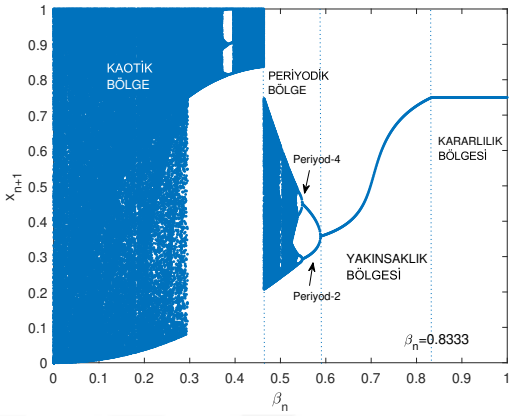
aralıklarına indirgenir.

Son olarak, Matlab programı kullanılarak yukarıda elde edilen analitik sonuçlar bilgisayar simülasyonlarıyla gösterilecektir. $x_0 = 0.7333$ başlangıç değerini alalım. (8.24) ile verilen $\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta$ kararlılık aralığından $\alpha_n = 0.3$, $\beta_n \in (0.8333, 1)$ kontrol parametre aralıklarını seçelim ve (8.21) ve (8.22) kontrol mekanizmalarına ayrı ayrı uygulayalım. Şekil 8.1'de T lojistik dönüşümü için itici (kararsız) bir yörüngeye sahip olan $x_2^* = \frac{3}{4}$ sabit noktasının $\widetilde{T}$ ile gösterilen Picard-S kontrol mekanizması yardımıyla çekici (kararlı) bir yörüngeye dönüştüğü açık olarak görülmektedir. Şekil 8.2'de verilen çatallanma diyagramı üzerinde ise sistemin sadece kararlı olan bölgesi değil, $\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta$ kararlılık aralığının dışında kontrol mekanizmasının yakınsak, periyodik, kaotik olmak üzere oluşan tüm yörüngelerin davranışı gösterilmiştir. Ayrıca, aynı başlangıç noktası ve seçilen parametre aralıklarında Thakur kontrol mekanizmasının T'nin $x_2^* = \frac{3}{4}$ sabit noktasının kararsız yörüngelerini kararlı veya yakınsak yörüngelere

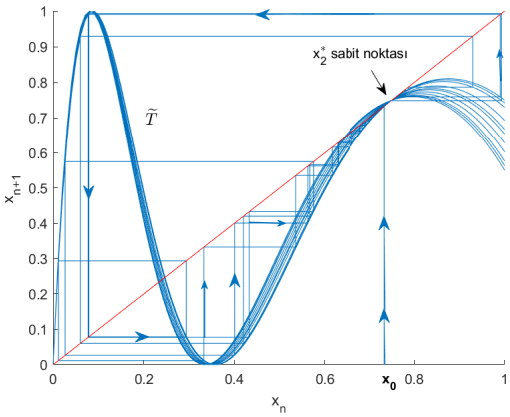
dönüştürdüğü Şekil 8.3'de verilen yörünge diyagramı gösterilmiştir. Şekil 8.4 çatallanma diyagramı üzerinde ise Thakur kontrol mekanizmasının kararlılık aralığın dışındaki yörüngelerinin oluşturduğu dinamik bölgelerin tümü verilmiştir.



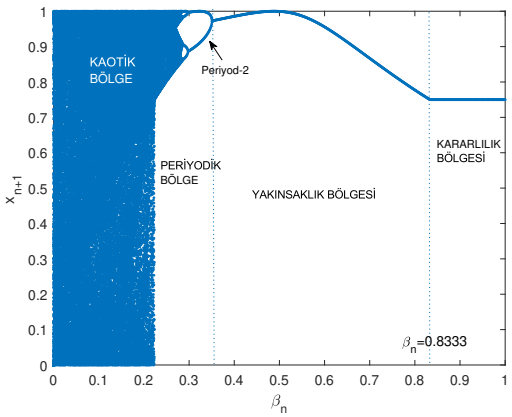
Şekil 8.1 Picard-S kontrol mekanizmasının $x_0 = 0.7333$, $\alpha_n = 0.3$, $\beta_n \in (0.8333, 1)$ için kararlı (çekici) yörüngeleri



Şekil 8.2 Picard-S kontrol mekanizmasının $x_0 = 0.7333$, $\alpha_n = 0.3$, $\beta_n \in (0, 1)$ için çatallanma diyagramı



Şekil 8.3 Thakur kontrol mekanizmasının $x_0 = 0.7333$, $\alpha_n = 0.3$, $\beta_n \in (0.8333, 1)$ için kararlı (çekici) yörüngeleri



Şekil 8.4 Thakur kontrol mekanizmasının $x_0 = 0.7333$, $\alpha_n = 0.3$, $\beta_n \in (0, 1)$ için çatallanma diyagramı

8.2 S ve Normal-S İterasyon Yöntemleri ile Kaos Kontrol

Bu bölümde, literatürde S iterasyon yöntemi olarak bilinen iki parametreye bağlı sabit nokta iterasyonu ile tek parametreye bağlı Normal-S iterasyon yöntemlerinin kaos kontrol mekanizmalarının dinamik özellikleri incelenecektir. İlginç olarak, bu iterasyon sınıflarının parametre sayısına bağlı olmaksızın kaotik bir dönüşümün stabilitesi için gerekli kararlılık aralıkları birbirine denk bulunmuştur. Bölümün son kısmında lojistik sistem üzerinde uygulaması yapılarak bilgisayar analizleri ile kararlılık aralıkları gösterilmiştir.

Şimdi ilk olarak tanımlayacağımız iterasyon metodu 2007 yılında Agarwal ve ark. [165] tarafından Banach uzaylarında tanımlanan S-iterasyon yöntemidir.

Tanım 8.6. $(\alpha_n), (\beta_n) \subset (0,1)$ belirli koşulları sağlayan reel diziler olmak üzere

$$\begin{cases} x_0 \in X \\ x_{n+1} = (1-\alpha_n) T(x_n) + \alpha_n T(y_n) \qquad n = 0,1,2,... \\ y_n = (1-\beta_n) x_n + \beta_n T(x_n) \end{cases} \tag{8.25}$$

olarak tanımlanan (x_n) dizisi **S-iterasyon yöntemi** olarak adlandırılır [165].

2011 yılında D.R. Sahu tarafından Normal S-iterasyon yöntemi [166] aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

Tanım 8.7. $(\beta_n) \subset (0,1)$ belirli koşulları sağlayan reel dizi olmak üzere

$$\begin{cases} x_0 \in X \\ x_{n+1} = T y_n \qquad\qquad\qquad n = 0,1,2,... \\ y_n = (1-\beta_n) x_n + \beta_n T(x_n) \end{cases} \tag{8.26}$$

olarak tanımlanan (x_n) dizisi **Normal S-iterasyon yöntemi** olarak adlandırılır [166].

(8.25) ve (8.26) ile verilen iterasyon yöntemlerinde T dönüşümünün kaotik olması durumunda kontrol aralığının aynı olduğunu gösteren teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 8.7. *$(X, \|.\|)$ bir Banach uzayı olmak üzere, $T : X \to X$ sürekli bir dönüşüm ve $x^* = Tx^*$ olsun. (8.25) ve (8.26) iterasyon yöntemleri ile kurulan kaos kontrol mekanizmaları $x_{n+1} = \widetilde{T}(x_n)$ ile gösterilsin. T ile $\widetilde{T}$ dönüşümleri aynı sabit noktalar kümesini paylaşmakla birlikte, T dönüşümü $x^* \in X$ kararsız sabit noktası için Gâteaux türevi $\|T'(x^*)\| > 1$ olan kaos özellikli bir dönüşüm olsun. Bu takdirde, $\widetilde{T}$ kontrol mekanizmasının x^* sabit noktasındaki Gâteaux türevi $\left\|\widetilde{T}'(x^*)\right\| < 1$ ise kaotik dönüşüm altında S [165] ve Normal-S [166] kontrol mekanizmalarının $(\alpha_n), (\beta_n) \subset (0,1)$ kontrol*

parametrelerine ait kararlılık aralıkları denktir ve

$$\left(\frac{\|T'(x^*)\|-1}{\|T'(x^*)-1\|\,\|T'(x^*)\|},\frac{\|T'(x^*)\|+1}{\|T'(x^*)-1\|\,\|T'(x^*)\|}\right) \tag{8.27}$$

formundadır.

İspat. Hipotezde verilen iki iterasyon yöntemi için T dönüşümünün $x^* \in X$ sabit noktasındaki Gâteaux türevinin $\|T'(x^*)\| > 1$ olduğunu kabul edelim. İterasyon dönüşümleri için belirlenen $x_{n+1} = \widetilde{T}(x_n)$ dönüşümününün (8.25) ve (8.26) ile verilen iterasyon yöntemleri için sırasıyla kararlı oldukları kontrol aralıklarını belirlemeye çalışalım.

İlk olarak, (8.25) ile verilen iterasyon dönüşümü için $x_{n+1} = \widetilde{T}(x_n)$ kaos kontrol mekanizması, $(\alpha_n),(\beta_n) \subset (0,1)$ kontrol parametreleri için

$$x_{n+1} = \widetilde{T}(x_n) \equiv (1-\alpha_n)\,T(x_n) + \alpha_n T\left[(1-\beta_n)\,x_n + \beta_n T(x_n)\right] \tag{8.28}$$

şeklinde tanımlansın. x^*, T dönüşümünün reel bir sabit noktası yani $x^* = Tx^*$ ise (8.28) eşitliğinde x^* alınarak standart işlemler yapıldığında $\widetilde{T}(x^*) = x^*$ olduğu elde edilir. Dolayısıyla, T orijinal dönüşümü ile (8.28) ile verilen $\widetilde{T}$ dönüşümü aynı sabit noktalar kümesini paylaşmaktadır.

İspatın devamında, $\widetilde{T}$ kontrol mekanizmasına ait parametrelerin kaotik dönüşümler için belirlediği kararlılık aralıkları elde edilecektir. Öncelikle, $\widetilde{T}(x_n)$ dönüşümü bileşke operatör formunda olduğundan Gâteaux türevini hesaplamadan önce bileşke operatörleri

$$H(x_n) = (1-\beta_n)\,x_n + \beta_n T(x_n)$$

olarak alınırsa (8.28) kontrol mekanizması

$$\widetilde{T}(x_n) = (1-\alpha_n)\,T(x_n) + \alpha_n T(H(x_n)) \tag{8.29}$$

olarak ifade edilebilir. T orijinal dönüşümünün $x^* \in X$ kararsız sabit noktası için $\widetilde{T}$ operatörünün h yönünde Gâteaux türevi $t \in \mathbb{R}$ için

$$D_h\left(\widetilde{T}(x^*)\right) = \lim_{t\to 0}\frac{\widetilde{T}(x^*+th)-\widetilde{T}(x^*)}{t} = \frac{d}{dt}\left(\widetilde{T}(x^*+th)\right)|_{t=0}$$

şeklindedir. (8.29) eşitliği kullanılarak türev fonksiyonu

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\widetilde{T}\left(x^*+th\right)\right)|_{t=0}=\frac{d}{dt}\left(\left(1-\alpha_n\right)T\left(x^*+th\right)+\alpha_n T\left(H\left(x^*+th\right)\right)\right)|_{t=0}\\
&=\left(1-\alpha_n\right)\frac{d}{dt}\left(T\left(x^*+th\right)\right)|_{t=0}+\alpha_n\frac{d}{dt}\left(T\left(H\left(x^*+th\right)\right)\right)|_{t=0}\frac{d}{dt}\left(H\left(x^*+th\right)\right)|_{t=0}\\
&=\left(1-\alpha_n\right)T'\left(x^*\right)h+\alpha_n T'\left(x^*\right)\left[\left(1-\beta_n\right)h+\beta_n T'\left(x^*\right)h\right]\\
&=h\left[\left(1-\alpha_n\right)T'\left(x^*\right)+\alpha_n T'\left(x^*\right)\left[1+\beta_n\left(T'\left(x^*\right)-1\right)\right]\right]\\
&=h\left[\left(1-\alpha_n\right)T'\left(x^*\right)+\alpha_n T'\left(x^*\right)+\alpha_n\beta_n T'\left(x^*\right)\left(T'\left(x^*\right)-1\right)\right]\\
&=h\left[T'\left(x^*\right)+\alpha_n\beta_n T'\left(x^*\right)\left(T'\left(x^*\right)-1\right)\right]
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla,

$$D_h\left(\widetilde{T}\left(x^*\right)\right)=hT'\left(x^*\right)\left[1+\alpha_n\beta_n\left(T'\left(x^*\right)-1\right)\right]$$

elde edilir.

Bu aşamada, $\widetilde{T}'$ operatörünün normunu hesaplayalım. Her Gâteaux türevlenebilen operatör Fréchet türevlenebilir olduğundan operatör normunun tanımından

$$\left\|\widetilde{T}'\left(x^*\right)\right\|=\sup\frac{\left\|\widetilde{T}'\left(x^*\right)h\right\|}{\|h\|}=\left\|T'\left(x^*\right)\right\|\left\|1+\alpha_n\beta_n\left(T'\left(x^*\right)-1\right)\right\|$$

elde edilir. $\widetilde{T}$ operatörünün T'nin $x^*\in X$ kararsız sabit noktasını kararlı hale dönüştürmesi için $\left\|\widetilde{T}'\left(x^*\right)\right\|<1$ şartını sağlaması gerekmektedir. Bu takdirde,

$$\left\|T'\left(x^*\right)\right\|\left\|1+\alpha_n\beta_n\left(T'\left(x^*\right)-1\right)\right\|<1$$

ise

$$\left\|1+\alpha_n\beta_n\left(T'\left(x^*\right)-1\right)\right\|<\frac{1}{\|T'\left(x^*\right)\|} \tag{8.30}$$

olur. (8.30)'da (8.10) norm eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|1-\alpha_n\beta_n\left\|T'\left(x^*\right)-1\right\|\right|<\frac{1}{\|T'\left(x^*\right)\|}$$

formuna dönüşür. $\frac{1}{\|T'\left(x^*\right)\|}>0$ olduğundan mutlak değer fonksiyonunun özelliğinden

$$-\frac{1}{\|T'\left(x^*\right)\|}<1-\alpha_n\beta_n\left\|T'\left(x^*\right)-1\right\|<\frac{1}{\|T'\left(x^*\right)\|}$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapıldığında

$$\frac{\|T'\left(x^*\right)\|-1}{\|T'\left(x^*\right)\|\,\|T'\left(x^*\right)-1\|}<\alpha_n\beta_n<\frac{\|T'\left(x^*\right)\|+1}{\|T'\left(x^*\right)\|\,\|T'\left(x^*\right)-1\|} \tag{8.31}$$

elde edilir ve (8.25) iterasyon yöntemi için kontrol parametrelerinin uygun seçimleriyle T operatörünün kararsız $x^* \in X$ sabit noktası $\widetilde{T}$ operatörünün Gâteaux türeviyle kararlı hale dönüştürülmüş ve bunu sağlayan $(\alpha_n), (\beta_n) \subset (0,1)$ parametre aralıkları belirlenmiş olur.

Benzer prosedürlerle; (8.26) ile verilen iterasyon dönüşümünü göz önüne alalım ve kararlılık aralıklarının aynı olduğunu gösterelim. $x_{n+1} = \widetilde{T}(x_n)$ eşitliği, (8.26) için yeniden düzenlenirse, $(\beta_n) \subset (0,1)$ kontrol parametresi için

$$x_{n+1} = \widetilde{T}(x_n) \equiv T[(1-\beta_n)x_n + \beta_n T(x_n)] \tag{8.32}$$

olacak şekilde tek parametreye bağlı yeni bir sabit nokta kontrol mekanizması oluşturulmuş olur. T dönüşümünün $x^* = Tx^*$ şartını sağlayan $x^* \in X$ sabit noktası için

$$\widetilde{T}(x^*) = T[(1-\beta_n)x^* + \beta_n T(x^*)] = T[(1-\beta_n)x^* + \beta_n x^*] = T(x^*) = x^*$$

elde edilir. Dolayısıyla, T dönüşümü ile (8.32) ile tanımlanan $\widetilde{T}$ kontrol mekanizmasının aynı sabit noktalar kümesine sahip olduğu kolaylıkla görülmektedir.

Diğer taraftan; (8.32) kontrol mekanizması

$$H(x_n) := (1-\beta_n)x_n + \beta_n T(x_n)$$

bileşke operatörü için

$$\widetilde{T}(x_n) = T[H(x_n)] \tag{8.33}$$

şeklinde yazılabilir. $x^* \in X$ kararsız sabit noktasında, (8.33) ile verilen $\widetilde{T}$ operatörünün h yönündeki Gâteaux türevi, $t \in \mathbb{R}$ için

$$D_h\left(\widetilde{T}(x^*)\right) = \frac{d}{dt}\left(\widetilde{T}(x^* + th)\right)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(T(H(x^* + th))\right)|_{t=0} \frac{d}{dt}\left(H(x^* + th)\right)|_{t=0}$$

olarak elde edilir. Türev fonksiyonları hesaplandığında

$$D_h\left(\widetilde{T}(x^*)\right) = hT'(x^*)\left[1 + \beta_n\left(T'(x^*) - 1\right)\right] \tag{8.34}$$

olarak bulunur. (8.34) denklemi ile verilen $\widetilde{T}'$ operatörünün x^* sabit noktasındaki normu

$$\left\|\widetilde{T}'(x^*)\right\| = \sup \frac{\left\|\widetilde{T}'(x^*)h\right\|}{\|h\|} = \left\|T'(x^*)\right\| \left\|1 + \beta_n\left(T'(x^*) - 1\right)\right\|$$

şeklindedir. $\left\|\widetilde{T}'(x^*)\right\| < 1$ kararlılık şartı altında, (8.10) norm özelliği uygulanırsa

$$\begin{gathered}
\left\|T'(x^*)\right\| \left\|1+\beta_n\left(T'(x^*)-1\right)\right\| < 1 \\
\left\|1+\beta_n\left(T'(x^*)-1\right)\right\| < \frac{1}{\|T'(x^*)\|} \\
\left|1-\beta_n\left\|T'(x^*)-1\right\|\right| < \frac{1}{\|T'(x^*)\|} \\
-\frac{1}{\|T'(x^*)\|} < 1-\beta_n\left\|T'(x^*)-1\right\| < \frac{1}{\|T'(x^*)\|} \\
-\frac{1}{\|T'(x^*)\|} < 1-\beta_n\left\|T'(x^*)-1\right\| < \frac{1}{\|T'(x^*)\|}
\end{gathered}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\frac{\|T'(x^*)\|-1}{\|T'(x^*)\|\,\|T'(x^*)-1\|} < \beta_n < \frac{\|T'(x^*)\|+1}{\|T'(x^*)\|\,\|T'(x^*)-1\|} \tag{8.35}$$

kontrol aralığı elde edilir. (8.25) iterasyon yönteminin kontrol aralığı ile (8.26) iterasyonuna ait kontrol aralığı, (8.25)'in aksine tek parametre ile kaos kontrol mekanizması oluşturmaktadır. Sonuç olarak, (8.25) için (8.31)'den

$$\alpha_n\beta_n \subset \left(\frac{\|T'(x^*)\|-1}{\|T'(x^*)-1\|\,\|T'(x^*)\|}, \frac{\|T'(x^*)\|+1}{\|T'(x^*)-1\|\,\|T'(x^*)\|}\right)$$

ve (8.26) için (8.35)'den

$$\beta_n \subset \left(\frac{\|T'(x^*)\|-1}{\|T'(x^*)-1\|\,\|T'(x^*)\|}, \frac{\|T'(x^*)\|+1}{\|T'(x^*)-1\|\,\|T'(x^*)\|}\right)$$

olacak şekilde birbirine eşit olan kontrol parametrelerine ait aralıklar elde edilir. Dolayısıyla, (8.25) ve (8.26) ile verilen iterasyon yöntemlerinin kaotik bir T dönüşümünü kararlı hale getirecek parametre aralıkları birbirine denktir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Dönüşümlerin kaos kontrol için önemli bir argümanı olan periyodik yörüngeler için her iki iterasyon mekanizmasının kontrol aralıklarını belirleyen teorem aşağıda verilecektir.

Teorem 8.8. *$(X,\|.\|)$ bir Banach uzayı ve $T: X \to X$ sürekli bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki; $x^* \in X$, T dönüşümünün m-periyodlu periyodik bir sabit noktası olsun, yani $x^* = T^m(x^*)$'dır. (8.25) ve (8.26) ile verilen iterasyon yöntemlerinin m-periyodlu periyodik yörüngeler için oluşturduğu kontrol mekanizmaları $x_{n+1} = \widetilde{T}_{(m)}(x_n)$ ile gösterilsin. T^m ile $\widetilde{T}_{(m)}$ dönüşümleri aynı sabit noktalar kümesini paylaşırlar. Bununla birlikte, T dönüşümü, $x^* \in X$ kararsız m- periyodlu periyodik sabit noktası için Gâteaux*

türevi $\|T^{m\prime}(x^*)\| > 1$ *olan kaos özellikli bir dönüşüm olsun. Bu takdirde,* $\widetilde{T}$ *iterasyon dönüşümünün* x^* *sabit noktasındaki Gâteaux türevi* $\left\|\widetilde{T}'_{(m)}(x^*)\right\| < 1$ *ise kaotik dönüşüm altında S [165] ve Normal-S [166] kontrol mekanizmalarının periyodik yörüngeler için* $(\alpha_n),(\beta_n) \subset (0,1)$ *kontrol parametrelerine ait kararlılık aralıkları denktir ve*

$$\left(\frac{\|T^{m\prime}(x^*)\|-1}{\|T^{m\prime}(x^*)-1\|\,\|T^{m\prime}(x^*)\|}, \frac{\|T^{m\prime}(x^*)\|+1}{\|T^{m\prime}(x^*)-1\|\,\|T^{m\prime}(x^*)\|}\right)$$

şeklinde ifade edilir.

İspat. Kabul edelim ki; $T^m = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{m\text{-defa}}$ bileşkesi T operatörünün m. tekrarını göstersin. $(\alpha_n),(\beta_n) \subset (0,1)$ kontrol parametreleri olmak üzere, (8.25) ile verilen S-iterasyon yöntemi m- periyodlu periyodik yörüngeler için aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$x_{n+1} = \widetilde{T}_{(m)}(x_n) \equiv (1-\alpha_n)\,T^m(x_n) + \alpha_n T^m\left[(1-\beta_n)\,x_n + \beta_n T^m(x_n)\right]. \tag{8.36}$$

T dönüşümünün m- periyodlu periyodik bir sabit noktası ise $x^* \in X$ olsun. T^m ile $\widetilde{T}_{(m)}$ dönüşümü aynı sabit noktalar kümesine sahip olduğu rutin hesaplamalarla elde edilebilir.

(8.36) ile verilen $\widetilde{T}_{(m)}$ kontrol mekanizmasında $H(x_n) := (1-\beta_n)\,x_n + \beta_n T^m(x_n)$ olarak alınırsa

$$\widetilde{T}_{(m)}(x_n) = (1-\alpha_n)\,T^m(x_n) + \alpha_n T^m(H(x_n)) \tag{8.37}$$

olacak şekilde bileşke operatörlerin cinsinden yazılmış olur. Kararlılık aralıklarının belirlenebilmesi için; $\widetilde{T}_{(m)}$ dönüşümünün m-periyodlu x^* periyodik sabit noktasında h yönündeki Gâteaux türevi, $t \in \mathbb{R}$ için

$$D_h\left(\widetilde{T}_{(m)}(x^*)\right) = \lim_{t\to 0}\frac{\widetilde{T}_{(m)}(x^*+th)-\widetilde{T}_{(m)}(x^*)}{t} = \frac{d}{dt}\left(\widetilde{T}_{(m)}(x^*+th)\right)|_{t=0} \tag{8.38}$$

şeklindedir. (8.37) kontrol mekanizmasının türevi

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\widetilde{T}_{(m)}(x^*+th)\right)|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\left((1-\alpha_n)\,T^m(x^*+th) + \alpha_n T^m(H(x^*+th))\right)|_{t=0} \\
&= (1-\alpha_n)\frac{d}{dt}\left(T^m(x^*+th)\right)|_{t=0} + \alpha_n \frac{d}{dt}\left(T^m(H(x^*+th))\right)|_{t=0} \\
&\times \frac{d}{dt}\left(H(x^*+th)\right)|_{t=0} \\
&= (1-\alpha_n)\,T^{m\prime}(x^*)h + \alpha_n T^{m\prime}(x^*)\left[(1-\beta_n)h + \beta_n T^{m\prime}(x^*)h\right] \\
&= h\left[(1-\alpha_n)\,T^{m\prime}(x^*) + \alpha_n T^{m\prime}(x^*)\left[1+\beta_n\left(T^{m\prime}(x^*)-1\right)\right]\right] \\
&= h\left[(1-\alpha_n)\,T^{m\prime}(x^*) + \alpha_n T^{m\prime}(x^*) + \alpha_n\beta_n T^{m\prime}(x^*)\left(T^{m\prime}(x^*)-1\right)\right] \\
&= h\left[T^{m\prime}(x^*) + \alpha_n\beta_n T^{m\prime}(x^*)\left(T^{m\prime}(x^*)-1\right)\right]
\end{aligned}$$

olarak elde edilir ve son denklem düzenlendiğinde

$$D_h\left(\widetilde{T}_{(m)}(x^*)\right) = hT^{m\prime}(x^*)\left[1+\alpha_n\beta_n\left(T^{m\prime}(x^*)-1\right)\right] \tag{8.39}$$

bulunur. $\widetilde{T}'_{(m)}$ operatörünün normu, (8.39)'dan

$$\left\|\widetilde{T}'_{(m)}(x^*)\right\| = \sup\frac{\left\|\widetilde{T}'_{(m)}(x^*)h\right\|}{\|h\|} = \left\|T^{m\prime}(x^*)\right\|\left\|1+\alpha_n\beta_n\left(T^{m\prime}(x^*)-1\right)\right\| \tag{8.40}$$

olarak hesaplanır. T operatörünün m- periyodlu kararsız x^* periyodik sabit noktası için; $\left\|\widetilde{T}'_{(m)}(x^*)\right\| < 1$ kararlı koşulunun sağlanabilmesi için

$$\left\|T^{m\prime}(x^*)\right\|\left\|1+\alpha_n\beta_n\left(T^{m\prime}(x^*)-1\right)\right\|$$

olması gerekmektedir.

$$\left\|1+\alpha_n\beta_n\left(T^{m\prime}(x^*)-1\right)\right\| < \frac{1}{\|T^{m\prime}(x^*)\|} \tag{8.41}$$

olduğundan (8.41) denklemine (8.10) eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|1-\alpha_n\beta_n\left\|T^{m\prime}(x^*)-1\right\|\right| < \frac{1}{\|T^{m\prime}(x^*)\|}$$

elde edilir. $\frac{1}{\|T^{m\prime}(x^*)\|} > 0$ olduğundan mutlak değer fonksiyonunun özelliğinden

$$-\frac{1}{\|T^{m\prime}(x^*)\|} < 1-\alpha_n\beta_n\left\|T^{m\prime}(x^*)-1\right\| < \frac{1}{\|T^{m\prime}(x^*)\|}$$

olur ve gerekli işlemler yapıldığında

$$\frac{\|T^{m\prime}(x^*)\|-1}{\|T^{m\prime}(x^*)\|\,\|T^{m\prime}(x^*)-1\|} < \alpha_n\beta_n < \frac{\|T^{m\prime}(x^*)\|+1}{\|T^{m\prime}(x^*)\|\,\|T^{m\prime}(x^*)-1\|} \tag{8.42}$$

elde edilir. Böylece, S-iterasyon yönteminin m- periyodlu periyodik yörüngeler için kaos kontrol aralıkları belirlenmiştir.

İspatın geri kalan kısmında, (8.26) ile verilen Normal-S iterasyon yönteminin periyodik yörüngeleri için gerekli dinamiksel özellikler araştırılacaktır.

$(\beta_n) \subset (0,1)$ kontrol parametresi olmak üzere, Normal-S iterasyon yönteminin m-periyodlu periyodik yörüngeler için kaos kontrol mekanizması

$$x_{n+1} = \widetilde{T}_{(m)}(x_n) \equiv T^m\left[(1-\beta_n)x_n + \beta_n T^m(x_n)\right] \tag{8.43}$$

şeklinde tanımlansın. $x^* = T^m(x^*)$ iken

$$\widetilde{T}_{(m)}(x^*) = T^m[(1-\beta_n)x^* + \beta_n T^m(x^*)] = T^m[(1-\beta_n)x^* + \beta_n x^*] = T^m(x^*) = x^*$$

olduğundan T^m ile (8.43) ile tanımlanan $\widetilde{T}_{(m)}$ dönüşümü aynı sabit noktalara sahiptir.

(8.43) ile tanımlanan kontrol mekanizmasında, $H(x_n) := (1-\beta_n)x_n + \beta_n T^m(x_n)$ olarak alınırsa

$$\widetilde{T}_{(m)}(x_n) = T^m[H(x_n)] \tag{8.44}$$

şeklinde yazılabilir. T'nin kaotik olduğu m- periyodlu $x^* \in X$ kararsız periyodik sabit noktasındaki, (8.44) ile verilen $\widetilde{T}_{(m)}$ operatörünün h yönündeki Gâteaux türevi, $t \in \mathbb{R}$ için

$$D_h\left(\widetilde{T}_{(m)}(x^*)\right) = \frac{d}{dt}\left(\widetilde{T}_{(m)}(x^* + th)\right)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(T^m(H(x^* + th))\right)|_{t=0} \frac{d}{dt}\left(H(x^* + th)\right)|_{t=0}$$

şwklinde hesaplanır. Gerekli işlemler yapılarak operatörlerin türevleri bulunduğunda kontrol mekanizmasının türevi

$$D_h\left(\widetilde{T}_{(m)}(x^*)\right) = hT^{m\prime}(x^*)\left[1 + \beta_n\left(T^{m\prime}(x^*) - 1\right)\right] \tag{8.45}$$

olarak elde edilir. (8.45)'in normu

$$\left\|\widetilde{T}'_{(m)}(x^*)\right\| = \sup\frac{\left\|\widetilde{T}'_{(m)}(x^*)h\right\|}{\|h\|} = \left\|T^{m\prime}(x^*)\right\|\left\|1 + \beta_n\left(T^{m\prime}(x^*) - 1\right)\right\| \tag{8.46}$$

şeklindedir. $\left\|\widetilde{T}'_{(m)}(x^*)\right\| < 1$ kararlılık şartı altında, (8.10) eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{gathered}
\left\|T^{m\prime}(x^*)\right\|\left\|1 + \beta_n\left(T^{m\prime}(x^*) - 1\right)\right\| < 1 \\
\left\|1 + \beta_n\left(T^{m\prime}(x^*) - 1\right)\right\| < \frac{1}{\|T^{m\prime}(x^*)\|} \\
\left|1 - \beta_n\left\|T^{m\prime}(x^*) - 1\right\|\right| < \frac{1}{\|T^{m\prime}(x^*)\|} \\
-\frac{1}{\|T^{m\prime}(x^*)\|} < 1 - \beta_n\left\|T'(x^*) - 1\right\| < \frac{1}{\|T^{m\prime}(x^*)\|}
\end{gathered}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında (β_n) parametresi için

$$\frac{\|T^{m\prime}(x^*)\| - 1}{\|T^{m\prime}(x^*)\|\,\|T^{m\prime}(x^*) - 1\|} < \beta_n < \frac{\|T^{m\prime}(x^*)\| + 1}{\|T^{m\prime}(x^*)\|\,\|T^{m\prime}(x^*) - 1\|} \tag{8.47}$$

kontrol aralığı elde edilir. (8.25) için (8.42)'den

$$\alpha_n\beta_n \subset \left(\frac{\|T^{m\prime}(x^*)\|-1}{\|T^{m\prime}(x^*)-1\|\,\|T^{m\prime}(x^*)\|}, \frac{\|T^{m\prime}(x^*)\|+1}{\|T^{m\prime}(x^*)-1\|\,\|T^{m\prime}(x^*)\|} \right)$$

(8.26) için (8.47)'den

$$\beta_n \subset \left(\frac{\|T^{m\prime}(x^*)\|-1}{\|T^{m\prime}(x^*)-1\|\,\|T^{m\prime}(x^*)\|}, \frac{\|T^{m\prime}(x^*)\|+1}{\|T^{m\prime}(x^*)-1\|\,\|T^{m\prime}(x^*)\|} \right)$$

olacak şekilde birbirine eşit olan kontrol aralıkları elde edilir.

Sonuç olarak, T orijinal dönüşümünün m-periyodlu kararsız periyodik sabit noktalarını kararlı hale dönüştüren (8.42) ve (8.47) kontrol parametre aralıklarının birbirine denk olduğu görülmektedir. Böylece ispat tamamlanır. ■

8.2.1 S ve Normal-S Kontrol Mekanizmalarının Lojistik Sistem Uygulaması

Bu alt bölümde, kaotik bir-boyutlu diskrit dinamik sistem olarak (8.19) ile verilen T lojistik dönüşümünü yeniden göz önüne alalım. (8.20)'deki işlem süreçleri gerçekleştirildiğinde lojistik dönüşümün $x_2^* = \frac{3}{4}$ sabit noktası için $\left\|T'\left(x_2^*\right)\right\| = \|-2\| > 1$ olduğundan x_2^*, T dönüşümünün kararsız veya itici bir sabit noktasıdır.

Şimdi, S iterasyon yöntemi [165] ve Normal-S [166] iterasyon yöntemlerine kaotik özellikli T lojistik dönüşümünü uygulayalım. İlk olarak, (8.28) ile verilen S-kontrol mekanizması $T(x) = 4x(1-x)$ dönüşümü altında düzenlenirse, $(\alpha_n), (\beta_n) \subset (0,1)$ kontrol parametreleri için

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \widetilde{T}(x_n) \equiv (1-\alpha_n)\,T(x_n) + \alpha_n T\left[(1-\beta_n)\,x_n + \beta_n T(x_n)\right] \\ &= -4x_n(-1+x_n+\alpha_n\beta_n(-3+4x_n)(1-(2+3\beta_n)x_n+4\beta_n x_n^2)) \end{aligned} \tag{8.48}$$

elde edilir. Teorem 8.7'ye göre; T lojistik dönüşümünün $x_2^* = \frac{3}{4}$ kararsız (itici) sabit noktasını kararlı hale dönüştürecek aralığı elde etmek için $\left\|\widetilde{T}'\left(\frac{3}{4}\right)\right\| < 1$ kararlılık koşulunun sağlanması gerekmektedir. Bu nedenle, (8.48) denklemine Teorem 8.7'nin ispatında verilen benzer işlem süreçleri uygulanacağından (8.31) olarak verilen kontrol aralığında $x_2^* = \frac{3}{4}$ sabit noktasının türevini yerine koymak yeterlidir. (8.31)'de

$\left\|T'\left(x_2^*\right)\right\| = \|-2\|$ alınırsa

$$\frac{\left\|T'\left(\frac{3}{4}\right)\right\|-1}{\left\|T'\left(\frac{3}{4}\right)\right\|\left\|T'\left(\frac{3}{4}\right)-1\right\|} < \alpha_n\beta_n < \frac{\left\|T'\left(\frac{3}{4}\right)\right\|+1}{\left\|T'\left(\frac{3}{4}\right)\right\|\left\|T'\left(\frac{3}{4}\right)-1\right\|}$$
$$\frac{\|(-2)\|-1}{\|(-2)\|\,\|(-2)-1\|} < \alpha_n\beta_n < \frac{\|(-2)\|+1}{\|(-2)\|\,\|(-2)-1\|}$$
$$\frac{1}{6} < \alpha_n\beta_n < \frac{1}{2}$$

olacak şekilde $(\alpha_n), (\beta_n) \subset (0,1)$ kontrol parametrelerinin belirlediği kararlılık aralığı elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\Gamma_\alpha = \frac{1}{6} < \alpha_n \leq \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right]$$
$$\Gamma_\beta = \frac{1}{6\alpha_n} < \beta_n < 1 = \left(\frac{1}{6\alpha_n}, 1\right) \tag{8.49}$$

aralıklarına indirgenir. Böylece, T kaotik dönüşümünü kararlı hale getirecek (8.48) kontrol mekanizmasının belirlediği kontrol parametre aralıkları elde edilmiş olur.

$x_0 = 0.7333$ başlangıç noktası olsun ve (8.49) ile verilen $\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta$ kararlılık aralığından $\alpha_n = 0.25$, $\beta_n \in (0.6666, 1)$ kontrol parametre değerlerini seçelim. Şekil 8.5'de (8.48) kontrol mekanizmasının seçilen parametre değerlerinde lojistik dönüşümün $x_2^* = \frac{3}{4}$ sabit noktasına yakınsadığı ve çekici yörüngeler oluşturduğu görülmektedir. Şekil 8.6'da ise (8.48) kontrol mekanizmasının hem kararlılık aralığındaki hem de aralık dışındaki dinamik davranışı çatallanma diyagramı ile verilmiştir.

Benzer düşünce, (8.32)ile verilen Normal-S kontrol mekanizmasına $T(x) = 4x(1-x)$ dönüşümü uygulandığında

$$\begin{aligned} x_{n+1} = \widetilde{T}(x_n) &\equiv T\left[(1-\beta_n)\,x_n + \beta_n T(x_n)\right] \\ &= -4x_n(1-(1+3\beta_n)x_n + 4\beta_n x_n^2)(-1+\beta_n(-3+4x_n)) \end{aligned} \tag{8.50}$$

elde edilir. Teorem 8.7'nin ispatında Normal-S kontrol mekanizması için verilen (8.35) kontrol aralığında, $x_2^* = \frac{3}{4}$ sabit noktasının türevi $\left\|T'\left(x_2^*\right)\right\| = \|-2\|$ yerine yazıldığında

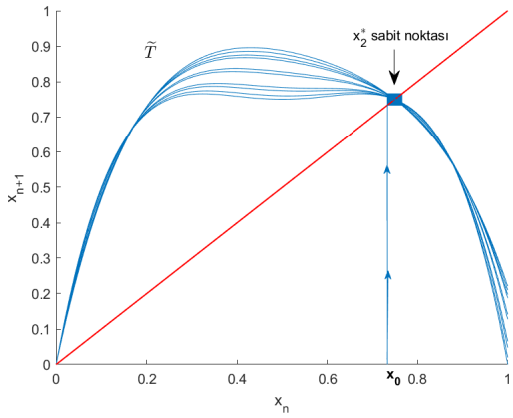
$$\frac{\left\|T'\left(\frac{3}{4}\right)\right\|-1}{\left\|T'\left(\frac{3}{4}\right)\right\|\left\|T'\left(\frac{3}{4}\right)-1\right\|} < \beta_n < \frac{\left\|T'\left(\frac{3}{4}\right)\right\|+1}{\left\|T'\left(\frac{3}{4}\right)\right\|\left\|T'\left(\frac{3}{4}\right)-1\right\|}$$
$$\frac{\|(-2)\|-1}{\|(-2)\|\,\|(-2)-1\|} < \beta_n < \frac{\|(-2)\|+1}{\|(-2)\|\,\|(-2)-1\|}$$
$$\frac{1}{6} < \beta_n < \frac{1}{2}$$

şeklinde $(\beta_n) \subset (0,1)$ kontrol parametresinin belirlediği kararlılık aralığı elde edilir. Dolayısıyla, (8.50) ile verilen Normal-S kontrol mekanizması kaotik bir T lojistik dönüşümünün kararsız $x_2^* = \frac{3}{4}$ sabit noktasını

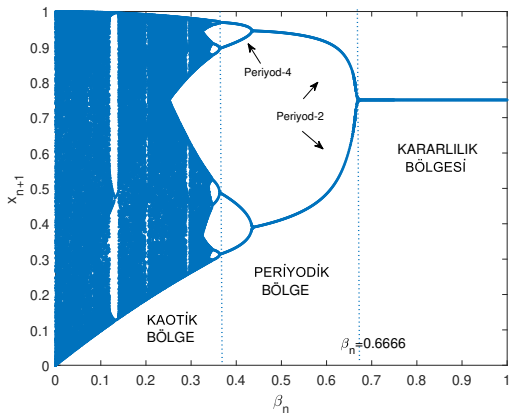
$$\Gamma_\beta = \frac{1}{6} < \beta_n < \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right) \tag{8.51}$$

kontrol aralığında kararlı hale dönüştürmektedir.

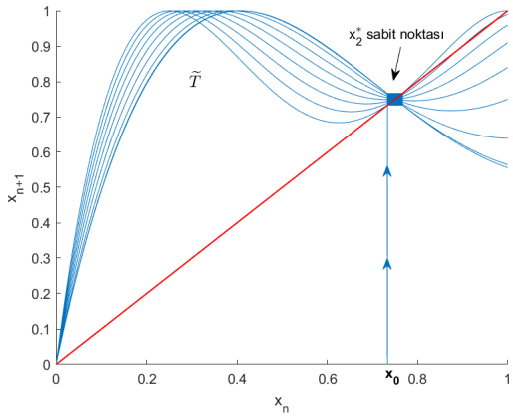
$x_0 = 0.7333$ başlangıç değeri olsun. Şekil 8.7'de (8.50) ile verilen Normal-S kontrol mekanizmasının $\beta_n \in (0.6666, 0.5)$ kararlılık aralığında T lojistik dönüşümünün kararsız sabit noktasını kararlı hale getirdiği, yani sabit noktaya yakınsamanın gerçekleştiği görülmektedir. Ayrıca Normal-S kontrol mekanizmasının kararlılık aralığının dışındaki dinamik davranışları Şekil 8.8 ile verilen çatallanma diyagramı üzerinde gösterilmiştir.



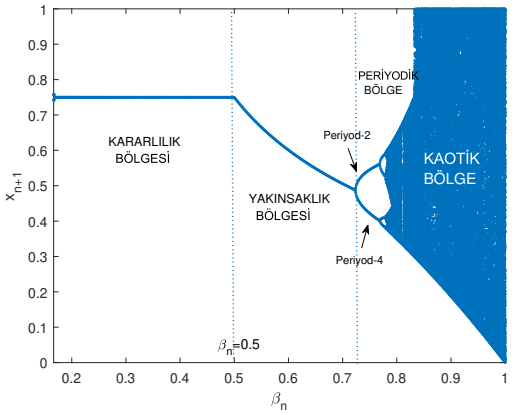
Şekil 8.5 S kontrol mekanizmasının $x_0 = 0.7333$, $\alpha_n = 0.25$, $\beta_n \in (0.6666, 1)$ için kararlı (çekici) yörüngeleri



Şekil 8.6 S kontrol mekanizmasının $x_0 = 0.7333$, $\beta_n \in (0,1)$ için çatallanma diyagramı



Şekil 8.7 Normal-S kontrol mekanizmasının $x_0 = 0.7333$, $\beta_n \in (0.6666, 0.5)$ için kararlı (çekici) yörüngeleri



Şekil 8.8 Normal-S kontrol mekanizmasının $x_0 = 0.7333$, $\beta_n \in (0, 1)$ için çatallanma diyagramı

8.3 Karakaya ve M İterasyon Yöntemleri ile Kaos Kontrol

Bu aşamada kaos kontrol aralıkları (8.25) ve (8.26) iterasyon yöntemlerinden farklı olan ancak yeni verilecek iterasyon sınıfları için aynı kaos kontrol aralığına sahip bazı iterasyon yöntemleri incelenecektir.

İlk olarak, Karakaya ve ark. [167] tarafından 2017 yılında tanımlanan ve bazı contraction sınıfları için Picard-S iterasyonundan [161] daha hızlı yakınsayan üç adımlı sabit nokta iterasyon yöntemi aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Tanım 8.8. $(\alpha_n) \subset (0, 1)$ belirli koşulları sağlayan reel dizi olmak üzere

$$\begin{cases} x_0 \in X \\ x_{n+1} = Ty_n \\ y_n = (1-\alpha_n) z_n + \alpha_n T(z_n) \\ z_n = Tx_n \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{8.52}$$

şeklinde tanımlanan (x_n) dizisi **Karakaya iterasyon yöntemi** olarak adlandırılır [167].

2018 yılında Ullah ve Arshad [168] literatürde M iterasyon yöntemi olarak bilinen ve iki adımlı S-iterasyonu [165] ve Picard-S [161] iterasyon yöntemlerinden daha hızlı yakınsayan üç adımlı iterasyonu tanıtmışlardır.

Tanım 8.9. $(\alpha_n) \subset (0,1)$ belirli koşulları sağlayan reel dizi olmak üzere

$$\begin{cases} x_0 \in X \\ x_{n+1} = Ty_n \\ y_n = Tz_n \\ z_n = (1-\alpha_n)\, x_n + \alpha_n T(x_n) \end{cases} \qquad n = 0,1,2,\ldots \tag{8.53}$$

olarak tanımlanan (x_n) dizisi **M iterasyon yöntemi** olarak adlandırılır [168].

(8.52) ve (8.53) eşitlikleri ile verilen iterasyon yöntemlerinde T dönüşümü kaotik olduğunda iterasyon yöntemleri yakınsama özelliklerini kaybedeceğinden iterasyon işlevlerini de kaybedeceklerdir. İterasyonların kaos özellikli dönüşümlerle kaybetmiş oldukları işlevleri kontrol mekanizmaları ve kontrol aralıklarıyla belirlenmektedir. (8.52) ve (8.53) iterasyon sınıflarında T dönüşümü kaotik olması durumunda iterasyonlara hangi kontrol aralıklarında dinamik bir yapıya sahip oldukları ve kontrol aralıklarının aynılığı aşağıdaki teorem ile verilecektir.

Teorem 8.9. *$(X, \|.\|)$ bir Banach uzayı olmak üzere, $T : X \to X$ sürekli bir dönüşüm ve $x^* = Tx^*$ olsun. (8.52) ve (8.53) ile verilen iterasyon yöntemleri $x_{n+1} = \widetilde{T}(x_n)$ ile gösterilsin. T ile $\widetilde{T}$ dönüşümleri aynı sabit noktalar kümesini paylaşırlar. Ayrıca, T dönüşümü Gâteaux türevi $\|T'(x^*)\| > 1$ olacak şekilde $x^* \in X$ kararsız sabit noktasına sahip kaos özellikli bir dönüşüm olsun. Bu takdirde, $\widetilde{T}$ iterasyon dönüşümünün x^* sabit noktasındaki Gâteaux türevi $\left\|\widetilde{T}'(x^*)\right\| < 1$ ise kaotik dönüşüm altında Karakaya ve M kontrol mekanizmalarının $(\alpha_n) \subset (0,1)$ kontrol parametresine ait kararlılık aralıkları denktir ve*

$$\alpha_n \subset \left(\frac{\left\|T'^2(x^*)\right\| - 1}{\|T'^2(x^*)\|\,\|T'(x^*) - 1\|}, \frac{\left\|T'^2(x^*)\right\| + 1}{\|T'^2(x^*)\|\,\|T'(x^*) - 1\|} \right) \tag{8.54}$$

formundadır.

İspat. (8.52) ve (8.53) ile verilen iterasyon mekanizmalarını oluşturan T dönüşümünün $x^* \in X$ sabit noktasında kararsız olduğunu kabul edelim; yani $\|T'(x^*)\| > 1$ olsun. Ayrıca, $x_{n+1} = \widetilde{T}(x_n)$ dönüşümüyle temsil ettiğimiz (8.52) ve (8.53) dönüşümlerinin Gâteaux türevlerini hesaplayarak kararsız olan x^* sabit noktasını kararlı hale getirecek uygun $(\alpha_n) \subset (0,1)$ parametresinin seçimiyle kaos kontrol aralıklarını bulalım.

İlk olarak; (8.52) ile verilen Karakaya iterasyon dönüşümü için $x_{n+1} = \widetilde{T}(x_n)$ kaos kontrol mekanizması $(\alpha_n) \subset (0,1)$ kontrol parametresi için aşağıdaki şekilde

tanımlansın:

$$x_{n+1} = \widetilde{T}(x_n) \equiv T\left[(1-\alpha_n)\,T(x_n) + \alpha_n T(T(x_n))\right]. \tag{8.55}$$

T orijinal dönüşümü ile $\widetilde{T}$ kontrol mekanizmasının aynı sabit noktalara sahip olduğunu ispatlamak için $x^* \in X$ noktasının T'nin bir sabit noktası olduğunu kabul edelim; yani $x^* = Tx^*$ olsun. (8.55)'den

$$\widetilde{T}(x^*) = T\left[(1-\alpha_n)\,T(x^*) + \alpha_n T(T(x^*))\right] = T\left[(1-\alpha_n)\,Tx^* + \alpha_n Tx^*\right] = T(x^*) = x^*$$

elde edilir. Böylece, $Tx^* = x^*$ iken $\widetilde{T}(x^*) = x^*$ dır.

Şimdi, (8.55) kontrol mekanizmasının T kaotik dönüşümünün kararlılığı için teoremin hipotezinde verilen koşullar gerçeklenecektir. Öncelikle, $\widetilde{T}(x_n)$ dönüşümü bileşke operatör formunda olduğundan Gâteaux türevini hesaplamadan önce bileşke operatörleri belirleyelim.

$$H(x_n) := (1-\alpha_n)\,Tx_n + \alpha_n T(T(x_n))$$

olarak alınırsa (8.55) kontrol mekanizması

$$\widetilde{T}(x_n) = T\left[H(x_n)\right]$$

olarak ifade edilebilir. T dönüşümünün $x^* \in X$ kararsız sabit noktası için $\widetilde{T}$ operatörünün h yönünde Gâteaux türevi $t \in \mathbb{R}$ için

$$D_h\left(\widetilde{T}(x^*)\right) = \lim_{t\to 0} \frac{\widetilde{T}(x^*+th) - \widetilde{T}(x^*)}{t} = \frac{d}{dt}\left(\widetilde{T}(x^*+th)\right)|_{t=0}$$

şeklindedir. (8.29) eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\widetilde{T}(x^*+th)\right)|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\left(T(H(x^*+th))\right)|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\left(T(H(x^*+th))\right)|_{t=0}\,\frac{d}{dt}\left(H(x^*+th)\right)|_{t=0} \\
&= T'(x^*)\left[(1-\alpha_n)\,T'(x^*)h + \alpha_n T'(x^*)\,T'(x^*)h\right] \\
&= T'^2(x^*)h\left[(1-\alpha_n) + \alpha_n T'(x^*)\right]
\end{aligned}$$

elde edilir ve $\widetilde{T}$ dönüşümünün türev fonksiyonu

$$D_h\left(\widetilde{T}(x^*)\right) = T'^2(x^*)h\left[1 + \alpha_n\left(T'(x^*) - 1\right)\right]$$

olarak bulunur. Şimdi, $\widetilde{T}'$ operatörünün normunu hesaplayalım ve $\left\|\widetilde{T}'(x^*)\right\| < 1$ kararlılık şartı altında (α_n) parametresinin aralığını belirleyelim.

Her Gâteaux türevlenebilen operatör Fréchet türevlenebilir olduğundan

$$\left\|\widetilde{T}'(x^*)\right\| = \sup \frac{\left\|\widetilde{T}'(x^*)h\right\|}{\|h\|} = \left\|T'^2(x^*)\right\| \left\|1+\alpha_n\left(T'(x^*)-1\right)\right\|$$

yazılabilir. $\widetilde{T}$ operatörünün T'nin x^* kararsız sabit noktasını kararlı hale dönüştürmesi için $\left\|\widetilde{T}'(x^*)\right\| < 1$ şartını sağlaması gerekmektedir. Bu düşünce altında

$$\left\|T'^2(x^*)\right\| \left\|1+\alpha_n\left(T'(x^*)-1\right)\right\| < 1$$

ve

$$\left\|1+\alpha_n\left(T'(x^*)-1\right)\right\| < \frac{1}{\|T'^2(x^*)\|} \tag{8.56}$$

alabiliriz. (8.56)'de (8.10) eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|1-\alpha_n\left\|T'(x^*)-1\right\|\right| < \frac{1}{\|T'^2(x^*)\|}$$

formuna dönüşür. $\frac{1}{\|T'^2(x^*)\|} > 0$ olduğundan mutlak değer fonksiyonunun özelliğinden

$$-\frac{1}{\|T'^2(x^*)\|} < 1-\alpha_n\left\|T'(x^*)-1\right\| < \frac{1}{\|T'^2(x^*)\|}$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapıldığında

$$\frac{\left\|T'^2(x^*)\right\|-1}{\|T'^2(x^*)\|\,\|T'(x^*)-1\|} < \alpha_n < \frac{\left\|T'^2(x^*)\right\|+1}{\|T'^2(x^*)\|\,\|T'(x^*)-1\|} \tag{8.57}$$

elde edilir ve (8.55) iterasyon yöntemi için kontrol parametrelerinin uygun seçimleriyle T operatörünün kararsız x^* sabit noktası $\widetilde{T}$ operatörünün Gâteaux türeviyle kararlı hale dönüştürülmüş ve bunu sağlayan $(\alpha_n) \subset (0,1)$ aralıkları belirlenmiştir.

Yukarıdaki ispatta verilen benzer yöntemler kullanılarak; (8.53) ile verilen M iterasyon dönüşümünü göz önüne alalım ve kararlılık aralığının (8.57) ile aynı olduğunu gösterelim. $x_{n+1} = \widetilde{T}(x_n)$ eşitliği, (8.53) iterasyon yöntemi için yeniden düzenlenirse

$$x_{n+1} = \widetilde{T}(x_n) \equiv T\left[T\left[(1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T(x_n)\right]\right] \tag{8.58}$$

olacak şekilde yeni bir sabit nokta kontrol mekanizması oluşturulmuş olur. Burada, $(\alpha_n) \subset (0,1)$ kaos kontrol parametresidir.

T orijinal dönüşümünün $x^* \in X$ sabit noktası için $x^* = Tx^*$ ise

$$\widetilde{T}(x^*) = T[T[(1-\alpha_n)x^* + \alpha_n T(x^*)]] = T[T(x^*)] = x^*$$

elde edilir. Dolayısıyla, T ile $\widetilde{T}$ aynı sabit noktalar kümesine sahip olduğu açıktır.

$\widetilde{T}$ kontrol mekanizmasının teoremin hipotezinde verilen $\left\|\widetilde{T}'(x^*)\right\| < 1$ koşulunu sağlatmak için Gâteaux türevi hesaplanırsa

$$\begin{aligned} D_h\left(\widetilde{T}(x^*)\right) &= \frac{d}{dt}\left(\widetilde{T}(x^* + th)\right)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(T[T[(1-\alpha_n)x^* + \alpha_n T(x^*)]]\right)|_{t=0} \\ &= T'(x^*)\,T'(x^*)\left((1-\alpha_n)h + \alpha_n T'(x^*)h\right) \\ &= hT'^2(x^*)\left[1 + \alpha_n\left(T'(x^*) - 1\right)\right] \end{aligned}$$

elde edilir. Bununla birlikte, $\widetilde{T}'$ operatörünün x^* sabit noktasındaki normu

$$\left\|\widetilde{T}'(x^*)\right\| = \sup\frac{\left\|\widetilde{T}'(x^*)h\right\|}{\|h\|} = \left\|T'^2(x^*)\right\|\left\|1 + \alpha_n\left(T'(x^*) - 1\right)\right\|$$

olarak hesaplanır. $\left\|\widetilde{T}'(x^*)\right\| < 1$ ise

$$\left\|T'^2(x^*)\right\|\left\|1 + \alpha_n\left(T'(x^*) - 1\right)\right\| < 1$$

olmasını gerektirir. İspatın ilk kısmına benzer olarak, (8.10) kuralı uygulandığında

$$\begin{aligned} \left\|T'^2(x^*)\right\|\left|1 - \alpha_n\left\|T'(x^*) - 1\right\|\right| &< 1 \\ \left|1 - \alpha_n\left\|T'(x^*) - 1\right\|\right| &< \frac{1}{\|T'^2(x^*)\|} \\ -\frac{1}{\|T'^2(x^*)\|} < 1 - \alpha_n\left\|T'(x^*) - 1\right\| &< \frac{1}{\|T'^2(x^*)\|} \end{aligned}$$

bulunur ve buradan

$$\frac{\left\|T'^2(x^*)\right\| - 1}{\|T'^2(x^*)\|\,\|T'(x^*) - 1\|} < \alpha_n < \frac{\left\|T'^2(x^*)\right\| + 1}{\|T'^2(x^*)\|\,\|T'(x^*) - 1\|} \tag{8.59}$$

olacak şekilde (8.52) iterasyon yönteminin belirlediği (8.57) kontrol aralığı ile aynı aralık elde edilir. Sonuç olarak, tek parametreye bağlı (8.52) ve (8.53) iterasyon yöntemlerinin kaotik dönüşümlerin kararlılığı için belirlediği kontrol aralığı

$$\alpha_n \subset \left(\frac{\left\|T'^2(x^*)\right\| - 1}{\|T'^2(x^*)\|\,\|T'(x^*) - 1\|}, \frac{\left\|T'^2(x^*)\right\| + 1}{\|T'^2(x^*)\|\,\|T'(x^*) - 1\|}\right) \tag{8.60}$$

şeklindedir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Yukarıdaki teoremin periyodik dönüşümler için geçerli olan formu da aşağıdaki teorem ile verilecektir.

Teorem 8.10. *$(X,\|.\|)$ bir Banach uzayı ve $T:X\to X$ sürekli bir dönüşüm olsun. (8.52) ve (8.53) ile verilen iterasyon yöntemlerinin m- periyodlu periyodik yörüngeler için kontrol mekanizmaları $x_{n+1}=\widetilde{T}_{(m)}(x_n)$ ile gösterilsin. T^m ile $\widetilde{T}_{(m)}$ dönüşümleri aynı sabit noktalar kümesini paylaşırlar. Bununla birlikte, Gâteaux türevi $\|T^{m\prime}(x^*)\|>1$ olan kaos özellikli T dönüşümünün kararsız m- periyodlu periyodik sabit noktası $x^*\in X$ olsun. Bu takdirde, x^* sabit noktasındaki Gâteaux türevi $\left\|\widetilde{T}'_{(m)}(x^*)\right\|<1$ kararlılık koşulunu sağlayan Karakaya [167] ve M [168] kontrol mekanizmalarının $(\alpha_n)\subset(0,1)$ kontrol parametresine ait kararlılık aralıkları denktir ve*

$$\alpha_n\subset\left(\frac{\left\|\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\right\|-1}{\left\|\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\right\|\left\|T^{m\prime}(x^*)-1\right\|},\frac{\left\|\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\right\|+1}{\left\|\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\right\|\left\|T^{m\prime}(x^*)-1\right\|}\right)$$

formundadır.

İspat. T dönüşümünün m- periyodlu periyodik bir sabit noktası $x^*\in X$ olsun. (8.52) ile verilen iterasyon dönüşümü, m- periyodlu periyodik yörüngeler için yeniden düzenlenerek aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$x_{n+1}=\widetilde{T}_{(m)}(x_n)\equiv T^m\left[(1-\alpha_n)T^m(x_n)+\alpha_nT^m(T^m(x_n))\right]. \tag{8.61}$$

T^m ile $\widetilde{T}_{(m)}$ dönüşümlerinin aynı sabit noktalar kümesine sahip olduğu bir önceki teoremlerle kullanılan metotlarla kolaylıkla elde edilebilir.

Şimdi, (8.55) kontrol mekanizmasının T kaotik dönüşümünün kararsız m- periyodlu periyodik sabit noktaların kararlılığı için teoremin hipotezinde verilen koşullar gerçeklenecektir. Öncelikle, $\widetilde{T}_{(m)}(x_n)$ dönüşümü bileşke operatör formunda olduğundan Gâteaux türevini hesaplamadan önce bileşke operatörleri belirleyelim.

$$H(x_n):=(1-\alpha_n)T^m(x_n)+\alpha_nT^m(T^m(x_n))$$

olarak alınırsa (8.55) kontrol mekanizması

$$\widetilde{T}_{(m)}(x_n)=T^m[H(x_n)]$$

olarak ifade edilebilir. T dönüşümünün m- periyodlu periyodik $x^*\in X$ kararsız sabit noktası için $\widetilde{T}_{(m)}$ operatörünün h yönünde Gâteaux türevi $t\in\mathbb{R}$ için

$$D_h\left(\widetilde{T}_{(m)}(x^*)\right)=\lim_{t\to0}\frac{\widetilde{T}_{(m)}(x^*+th)-\widetilde{T}_{(m)}(x^*)}{t}=\frac{d}{dt}\left(\widetilde{T}_{(m)}(x^*+th)\right)|_{t=0}$$

için (8.29) eşitliğinden

$$D_h\left(\widetilde{T}_{(m)}(x^*)\right) = \left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\,h\left[1+\alpha_n\left(T^{m\prime}(x^*)-1\right)\right]$$

elde edilir. Operatör normu tanımı kullanılarak, türev fonksiyonunun normu

$$\left\|\widetilde{T}'_{(m)}(x^*)\right\| = \sup\frac{\left\|\widetilde{T}'_{(m)}(x^*)h\right\|}{\|h\|} = \left\|\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\right\|\left\|1+\alpha_n\left(T^{m\prime}(x^*)-1\right)\right\|$$

bulunur. $\widetilde{T}_{(m)}$ operatörünün T'nin m- periyodlu periyodik $x^* \in X$ kararsız sabit noktasını kararlı hale dönüştürmesi için $\left\|\widetilde{T}'_{(m)}(x^*)\right\| < 1$ şartını sağlaması gerekmektedir. Bu takdirde,

$$\left\|\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\right\|\left\|1+\alpha_n\left(T^{m\prime}(x^*)-1\right)\right\| < 1$$

olur ve (8.10) eşitsizliği uygulandığında

$$\left\|1+\alpha_n\left(T^{m\prime}(x^*)-1\right)\right\| < \frac{1}{\left\|\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\right\|}$$
$$\Rightarrow \left|1-\alpha_n\left\|T^{m\prime}(x^*)-1\right\|\right| < \frac{1}{\left\|\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\right\|}$$

bulunur. Sonuç olarak,

$$\frac{\left\|\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\right\|-1}{\left\|\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\right\|\left\|T^{m\prime}(x^*)-1\right\|} < \alpha_n < \frac{\left\|\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\right\|+1}{\left\|\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\right\|\left\|T^{m\prime}(x^*)-1\right\|} \tag{8.62}$$

elde edilir. Böylece, (8.55) iterasyon yöntemi ile kaos özellikli dönüşümlerin kararlılığa ulaştığı $(\alpha_n) \subset (0,1)$ kontrol parametresine ait kontrol aralıkları belirlenmiş olur.

İspatın geri kalan kısmında, diğer iterasyon yöntemi olarak teoremin ifadesinde yer alan M-iterasyon yöntemini göz önüne alalım. (8.53) iterasyon yöntemi, m- periyodlu periyodik yörüngeler için yeniden düzenlenirse, $(\alpha_n) \subset (0,1)$ kontrol parametresi olmak üzere

$$x_{n+1} = \widetilde{T}_{(m)}(x_n) \equiv T^m\left[T^m\left[(1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T^m(x_n)\right]\right] \tag{8.63}$$

olacak şekilde sabit nokta kaos kontrol mekanizması tanımlansın. T orijinal dönüşümünün m- periyodlu periyodik bir sabit noktası $x^* \in X$ olsun, yani $x^* =$

$T^m(x^*)$'dır. (8.63)'den

$$\widetilde{T}_{(m)}(x^*) = T^m[T^m[(1-\alpha_n)x^* + \alpha_n T^m(x^*)]] = T[T^m(x^*)] = x^*$$

elde edilir. Dolayısıyla, T^m ile $\widetilde{T}_{(m)}$ aynı sabit noktalar kümesine sahip olduğu açıktır.

$x^* \in X$, T dönüşümünün m- periyodlu periyodik bir sabit noktasıolsun. (8.63) ile tanımlanan $\widetilde{T}_{(m)}$ kontrol mekanizmasının, teoremin hipotezinde verilen $\left\|\widetilde{T}'_{(m)}(x^*)\right\| < 1$ koşulunu sağlaması için Gâteaux türevi hesaplanırsa

$$\begin{aligned} D_h\left(\widetilde{T}'_{(m)}(x^*)\right) &= \frac{d}{dt}\left(\widetilde{T}'_{(m)}(x^* + th)\right)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(T^m[T^m[(1-\alpha_n)x^* + \alpha_n T^m(x^*)]]\right)|_{t=0} \\ &= T^{m\prime}(x^*)\,T^{m\prime}(x^*)\left((1-\alpha_n)h + \alpha_n T^{m\prime}(x^*)h\right) \\ &= h\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\left[1 + \alpha_n\left(T^{m\prime}(x^*) - 1\right)\right] \end{aligned}$$

elde edilir. Bununla birlikte, $\widetilde{T}'_{(m)}$ operatörünün x^* sabit noktasındaki normu

$$\left\|\widetilde{T}'_{(m)}(x^*)\right\| = \sup\frac{\left\|\widetilde{T}'_{(m)}(x^*)h\right\|}{\|h\|} = \left\|\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\right\|\left\|1 + \alpha_n\left(T^{m\prime}(x^*) - 1\right)\right\|$$

olarak hesaplanır. $\left\|\widetilde{T}'_{(m)}(x^*)\right\| < 1$ ise

$$\left\|\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\right\|\left\|1 + \alpha_n\left(T^{m\prime}(x^*) - 1\right)\right\| < 1$$

olmasını gerektirir. İspatın ilk kısmına benzer olarak, (8.10) kuralı uygulandığında

$$\begin{aligned} \left\|\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\right\|\left|1 - \alpha_n\left\|T^{m\prime}(x^*) - 1\right\|\right| &< 1 \\ \left|1 - \alpha_n\left\|T^{m\prime}(x^*) - 1\right\|\right| &< \frac{1}{\left\|\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\right\|} \\ -1 < 1 - \alpha_n\left\|T^{m\prime}(x^*) - 1\right\| &< \frac{1}{\left\|\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\right\|} \end{aligned}$$

ve buradan

$$\frac{\left\|\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\right\| - 1}{\left\|\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\right\|\left\|T^{m\prime}(x^*) - 1\right\|} < \alpha_n < \frac{\left\|\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\right\| + 1}{\left\|\left(T^{m\prime}\right)^2(x^*)\right\|\left\|T^{m\prime}(x^*) - 1\right\|} \tag{8.64}$$

elde edilir. Görüldüğü üzere, (8.52) iterasyon yönteminin periyodik sabit noktalar için belirlediği (8.62) kontrol aralığı ile (8.64) aynıdır. Sonuç olarak, tek parametreye bağlı (8.52) ve (8.53) iterasyon yöntemlerinin kaotik dönüşümlerin m- periyodlu kararsız

periyodik sabit noktaların kararlılığı için belirlediği kontrol aralığı

$$\alpha_n \subset \left(\frac{\left\|(T^{m\prime})^2(x^*)\right\| - 1}{\left\|(T^{m\prime})^2(x^*)\right\| \left\|T^{m\prime}(x^*) - 1\right\|}, \frac{\left\|(T^{m\prime})^2(x^*)\right\| + 1}{\left\|(T^{m\prime})^2(x^*)\right\| \left\|T^{m\prime}(x^*) - 1\right\|} \right)$$

şeklinde bulunur. Böylece ispat tamamlanır. ■

8.3.1 Karakaya ve M Kontrol Mekanizmalarının Lojistik Sistem Uygulaması

Kaotik bir-boyutlu diskrit dinamik sistem olarak (8.19) ile verilen T lojistik dönüşümünü yeniden göz önüne alalım. Bilindiği üzere, lojistik dönüşümün $x_2^* = \frac{3}{4}$ sabit noktası için $\left\|T'\left(x_2^*\right)\right\| = \|-2\| > 1$ olduğundan x_2^*, T dönüşümünün kararsız veya itici bir sabit noktasıdır.

İlk olarak, (8.55) Karakaya kontrol mekanizmasına $T(x) = 4x(1-x)$ lojistik dönüşümü uygulandığında

$$\begin{aligned} x_{n+1} =& \widetilde{T}(x_n) \equiv T\left[(1-\alpha_n)Tx_n + \alpha_n T(T(x_n))\right] \\ =& -16(-1+x_n)x_n(1-4(1+3\alpha_n)x_n + (4+76\alpha_n)x_n^2 \\ & -128\alpha_n x_n^3 + 64\alpha_n x_n^4)(1+\alpha_n(3-16x_n+16x_n^2)) \end{aligned} \tag{8.65}$$

elde edilir. Aynı şekilde, (8.58) M kontrol mekanizmasına lojistik dönüşüm uygulanırsa

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \widetilde{T}(x_n) \equiv T\left[T\left[(1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T(x_n)\right]\right] \\ &= 16(1+\alpha_n(3-4x_n))x_n(1-(1+3\alpha_n)x_n + 4\alpha_n x_n^2)(1-2(1+3\alpha_n)x_n + 8\alpha_n x_n^2)^2 \end{aligned} \tag{8.66}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 8.9 hipotezleri altında; T lojistik dönüşümünün $x_2^* = \frac{3}{4}$ kararsız (itici) sabit noktası $\left\|\widetilde{T}'\left(\frac{3}{4}\right)\right\| < 1$ kararlılık koşulunu sağlayan Karakaya ve M kontrol mekanizmalarının $(\alpha_n) \subset (0,1)$ parametresinin belirlediği (8.60) ile verilen kontrol aralığında kararlı (çekici) sabit noktaya dönüşmektedir. (8.60)'da $\left\|T'\left(x_2^*\right)\right\| = \|-2\|$ yerine yazıldığında (8.55) ve (8.58) sistemlerine ait $(\alpha_n) \subset (0,1)$ kontrol

parametresinin belirlediği kararlılık aralığı

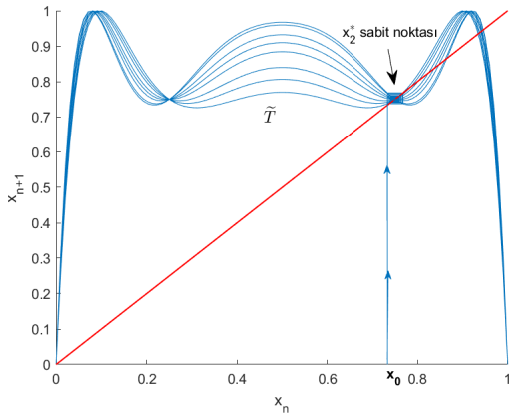
$$\frac{\left\|T'^2\left(\frac{3}{4}\right)\right\|-1}{\left\|T'^2\left(\frac{3}{4}\right)\right\|\left\|T'\left(\frac{3}{4}\right)-1\right\|}<\alpha_n<\frac{\left\|T'^2\left(\frac{3}{4}\right)\right\|+1}{\left\|T'^2\left(\frac{3}{4}\right)\right\|\left\|T'\left(\frac{3}{4}\right)-1\right\|}$$
$$\frac{\left\|(-2)^2\right\|-1}{\left\|(-2)^2\right\|\|(-2)-1\|}<\alpha_n<\frac{\left\|(-2)^2\right\|+1}{\left\|(-2)^2\right\|\|(-2)-1\|}$$
$$\frac{1}{4}<\alpha_n<\frac{5}{12} \tag{8.67}$$

olarak elde edilir. Diğer bir ifadeyle, kaotik dönüşüm olarak seçilen T lojistik dönüşümünün kararsız $x_2^*=\frac{3}{4}$ sabit noktası Karakaya ve M kontrol mekanizmalarının

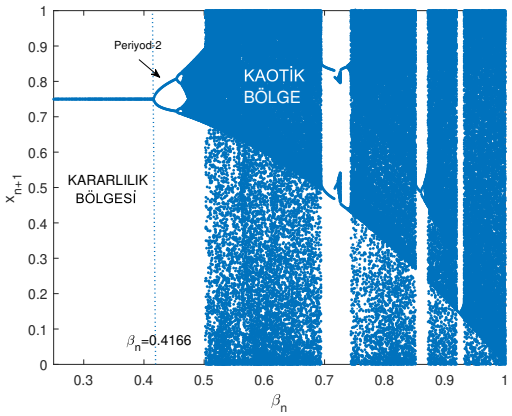
$$\Gamma_\alpha=\frac{1}{4}<\alpha_n<\frac{5}{12}=\left(\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right) \tag{8.68}$$

kontrol aralığında kararlı hale gelmektedir.

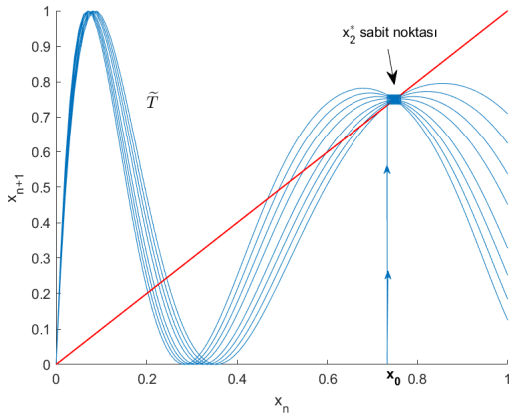
$x_0=0.7333$ başlangıç değeri olsun. (8.68) ile belirlenen $\alpha_n\in(0.25,0.4166)$ kararlılık aralığı seçilsin. (8.65) denklemi ile verilen Karakaya kontrol mekanizmasının Γ_α kararlılık aralığında, $x_2^*=\frac{3}{4}$ sabit noktasının çekici sabit nokta olarak davrandığı Şekil 8.9'daki yörünge diyagramı ile gösterilmiştir. Ayrıca, Şekil 8.10'da verilen çatallanma diyagramı ile kararlılık aralığının dışında kontrol mekanizmasının oluşturduğu periyodik ve kaotik bölgeler görülmektedir. Aynı parametre aralığında, (8.66) ile verilen M kontrol mekanizmasının Γ_α kararlılık aralığındaki dinamik yörüngeleri ve çatallanma diyagramı, sırasıyla, Şekil 8.11 ve Şekil 8.12 grafik çizimleri ile verilmiştir.



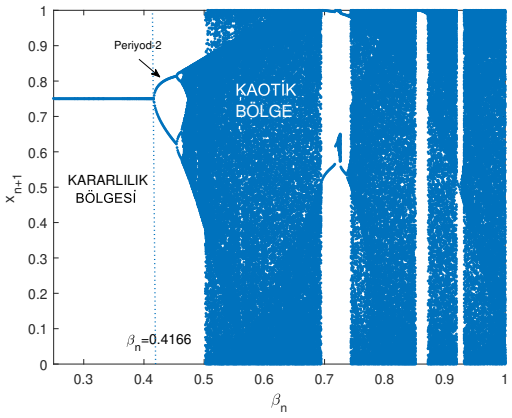
Şekil 8.9 Karakaya kontrol mekanizmasının $x_0=0.7333$, $\alpha_n\in(0.25,0.41661)$ için kararlı (çekici) yörüngeleri



Şekil 8.10 Karakaya kontrol mekanizmasının $x_0=0.7333$, $\alpha_n\in(0.25,1)$ için çatallanma diyagramı



Şekil 8.11 M kontrol mekanizmasının $x_0 = 0.7333$, $\alpha_n \in (0.25, 0.41661)$ için kararlı (çekici) yörüngeleri



Şekil 8.12 M kontrol mekanizmasının $x_0 = 0.7333$, $\alpha_n \in (0.25, 1)$ için çatallanma diyagramı

8.4 K^* ve Piri İterasyon Yöntemleri ile Kaos Kontrol

Bu bölüm altında incelenen iterasyon yöntemlerinin kaos kontrol aralıkları ispatsız olarak verilecektir. İterasyonların kontrol aralıklarının elde edilmesi kaos kontrol açısından çok önemli bulgulardır. Ancak teoremlerin ispatlarında kontrol aralıklarının elde edilme metotlarının benzerliğinden dolayı teoremlerin ispatları geçilmiştir.

Üç adımlı sabit nokta iterasyon yöntemleri olarak; literatürde iyi bilinen K^* [169] ve Piri [170] iterasyon yöntemlerinin kaotik dönüşüm sınıflarının stabilite aralıklarını belirleyen teorik sonuçlar verilecektir. İlk olarak, Ullah ve Arshad [169] tarafından 2018 yılında Banach uzaylarında tanımlanan ve "K^* iterasyon yöntemi" olarak bilinen iterasyon dönüşümü ele alınacaktır. K^* iterasyon yönteminin; S [**S**], Picard-S [161] ve Thakur [162] iterasyon yöntemlerinden belirli operatör sınıfları için yakınsaklık ve kararlılık anlamında daha hızlı olduğu kanıtlanmıştır. İkinci olarak ele alacağımız iterasyon yöntemi ise 2019 yılında Piri ve ark. [170] tarafındangenişlemeyen dönüşüm sınıfları için tanımlanan ve Picard [142], Mann [86], Ishikawa [83], Noor [84], S [**S**] ve Thakur [162] iterasyon yöntemlerinden çok daha hızlı yakınsayan iterasyon yöntemidir. Şimdi yukarıda bahsedilen iterasyon yöntemlerini tanımlayalım.

Tanım 8.10. $(\alpha_n), (\beta_n) \subset (0,1)$ belirli koşulları sağlayan reel diziler olmak üzere

$$\begin{cases} x_0 \in X \\ x_{n+1} = Ty_n \\ y_n = T\left[(1-\alpha_n)z_n + \alpha_n T(z_n)\right] \\ z_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T(x_n) \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{8.69}$$

olarak tanımlanan (x_n) dizisine K^* **iterasyon yöntemi** denir [169].

Tanım 8.11. $(\alpha_n),(\beta_n)\subset(0,1)$ belirli koşulları sağlayan reel diziler olmak üzere

$$\begin{cases} x_0\in X \\ x_{n+1}=(1-\alpha_n)Tz_n+\alpha_nT(y_n) \\ y_n=Tz_n \\ z_n=T\left[(1-\beta_n)x_n+\beta_nT(x_n)\right] \end{cases} \qquad n=0,1,2,... \tag{8.70}$$

olarak tanımlanan (x_n) dizisi **Piri iterasyon yöntemi** olarak adlandırılır [170].

Teorem 8.11. *$(X,\|.\|)$ bir Banach uzayı ve $T:X\to X$ sürekli bir dönüşüm olsun. (8.69) ve (8.70) ile verilen iterasyon yöntemleri $x_{n+1}=\widetilde{T}(x_n)$ ile gösterilsin. T ile $\widetilde{T}$ dönüşümleri aynı sabit noktalar kümesine sahiptir. Bununla birlikte, T dönüşümü Gâteaux türevi $\|T'(x^*)\|>1$ şartını sağlayan kaotik yörüngelere sahip olsun. Bu takdirde, $\left\|\widetilde{T}'(x^*)\right\|<1$ kararlı olma koşulu altında T dönüşümünün $x^*\in X$ kararsız sabit noktasını kararlı hale dönüştüren*

$$\alpha_n\subset\left(\frac{\left\|T'^2(x^*)\right\|\|1+\beta_n(T'(x^*)-1)\|-1}{\|T'^2(x^*)\|\|1+\beta_n(T'(x^*)-1)\|\|T'(x^*)-1\|},\frac{\left\|T'^2(x^*)\right\|\|1+\beta_n(T'(x^*)-1)\|+1}{\|T'^2(x^*)\|\|1+\beta_n(T'(x^*)-1)\|\|T'(x^*)-1\|}\right)$$

olacak şekilde $(\alpha_n),(\beta_n)\subset(0,1)$ kontrol parametre aralıkları her zaman vardır ve K^* [169] ile Piri [170] iterasyon yöntemlerinin kararlılık aralıkları birbirine denktir.

8.5 CR, Kadıoğlu ve Sahu İterasyon Yöntemleri ile Kaos Kontrol

Bu bölümde, kaotik operatörlerin kararlılığını sağlamak üzere belirlenen kontrol parametre aralıklarının birbirine denk olduğu üç iterasyon algoritmasının diskrit dinamik sistemlere ait sonuçları verilmiştir.

Tanım 8.12. $(\alpha_n),(\beta_n),(\gamma_n)\subset(0,1)$ belirli koşulları sağlayan reel diziler olmak üzere

$$\begin{cases} x_0\in X \\ x_{n+1}=(1-\alpha_n)y_n+\alpha_nT(y_n) \\ y_n=(1-\beta_n)Tx_n+\beta_nT(z_n) \\ z_n=(1-\gamma_n)x_n+\gamma_nT(x_n) \end{cases} \qquad n=0,1,2,... \tag{8.71}$$

olarak tanımlanan (x_n) dizisine **CR iterasyon yöntemi** denir [164].

Tanım 8.13. $(\alpha_n),(\beta_n),(\gamma_n)\subset(0,1)$ belirli koşulları sağlayan reel diziler olmak üzere

$$\begin{cases} x_0\in X \\ x_{n+1}=(1-\alpha_n)Tz_n+\alpha_nT(y_n), \\ y_n=(1-\beta_n)z_n+\beta_nT(z_n) \\ z_n=(1-\gamma_n)x_n+\gamma_nT(x_n) \end{cases} \qquad n=0,1,2,... \tag{8.72}$$

olarak tanımlanan (x_n) dizisi **Sahu iterasyon yöntemi** olarak adlandırılır [171].

Tanım 8.14. $(\alpha_n),(\beta_n)\subset(0,1)$ belirli koşulları sağlayan reel diziler olmak üzere

$$\begin{cases} x_0\in X \\ x_{n+1}=Ty_n \\ y_n=(1-\alpha_n)z_n+\alpha_nT(z_n) \\ z_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_nT(x_n) \end{cases} \qquad n=0,1,2,... \tag{8.73}$$

olarak tanımlanan (x_n) dizisi **Kadıoğlu iterasyon yöntemi** olarak adlandırılır [172].

Teorem 8.12. *$(X,\|.\|)$ bir Banach uzayı, $T:X\to X$ sürekli bir dönüşüm ve $x^*\in X$ olsun. (8.71), (8.72) ve (8.73) ile verilen üç iterasyon yöntemi ile oluşturulan kaos kontrol mekanizmaları $x_{n+1}=\widetilde{T}(x_n)$ ile gösterilsin. T ile $\widetilde{T}$ dönüşümleri aynı sabit noktalar kümesine sahiptir; yani $Tx^*=x^*$ iken $\widetilde{T}(x^*)=x^*$'dır. Bununla birlikte, T dönüşümü Gâteaux türevi $\|T'(x^*)\|>1$ şartını sağlayan $x^*\in X$ kararsız (itici) sabit noktalar için kaotik davranışa sahip bir dönüşüm olsun. Bu takdirde, $\left\|\widetilde{T}'(x^*)\right\|<1$ kararlılık koşulu altında kararsız yörüngeleri kararlı (çekici) hale dönüştüren CR [164], Sahu [171] ve Kadıoğlu [172] iterasyonları ile oluşturulan kontrol mekanizmalarının $(\alpha_n),(\beta_n),(\gamma_n)\subset(0,1)$ parametrelerine bağlı kaos kontrol aralıkları, sırasıyla,*

$$\beta_n\gamma_n\subset\left(\frac{\|T'(x^*)\|\,\|1+\alpha_n(T'(x^*)-1)\|-1}{\|T'(x^*)\|\,\|T'(x^*)-1\|\,\|1+\alpha_n(T'(x^*)-1)\|},\frac{\|T'(x^*)\|\,\|1+\alpha_n(T'(x^*)-1)\|+1}{\|T'(x^*)\|\,\|T'(x^*)-1\|\,\|1+\alpha_n(T'(x^*)-1)\|}\right),$$
$$\alpha_n\beta_n\subset\left(\frac{\|T'(x^*)\|\,\|1+\gamma_n(T'(x^*)-1)\|-1}{\|T'(x^*)\|\,\|T'(x^*)-1\|\,\|1+\gamma_n(T'(x^*)-1)\|},\frac{\|T'(x^*)\|\,\|1+\gamma_n(T'(x^*)-1)\|+1}{\|T'(x^*)\|\,\|T'(x^*)-1\|\,\|1+\gamma_n(T'(x^*)-1)\|}\right),$$
$$\beta_n\subset\left(\frac{\|T'(x^*)\|\,\|1+\alpha_n(T'(x^*)-1)\|-1}{\|T'(x^*)\|\,\|T'(x^*)-1\|\,\|1+\alpha_n(T'(x^*)-1)\|},\frac{\|T'(x^*)\|\,\|1+\alpha_n(T'(x^*)-1)\|+1}{\|T'(x^*)\|\,\|T'(x^*)-1\|\,\|1+\alpha_n(T'(x^*)-1)\|}\right)$$

şeklindedir ve birbirine denktir.

8.6 JF ve M* İterasyon Yöntemleri ile Kaos Kontrol

Tanım 8.15. $(\alpha_n),(\beta_n)\subset(0,1)$ belirli koşulları sağlayan reel diziler olmak üzere

$$\begin{cases} x_0\in X, \\ x_{n+1}=T\left[(1-\alpha_n)y_n+\alpha_nTy_n\right], \\ y_n=Tz_n, \\ z_n=T\left[(1-\beta_n)x_n+\beta_nTx_n\right] \end{cases} \qquad n=0,1,2,... \tag{8.74}$$

olarak tanımlanan (x_n) dizisine **JF iterasyon yöntemi** denir [173].

Tanım 8.16. $(\alpha_n),(\beta_n)\subset(0,1)$ belirli koşulları sağlayan reel diziler olmak üzere

$$\begin{cases} x_0\in X, \\ x_{n+1}=Ty_n, \\ y_n=T\left[(1-\alpha_n)x_n+\alpha_nTz_n\right], \\ z_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_nTx_n \end{cases} \qquad n=0,1,2,... \tag{8.75}$$

olarak tanımlanan (x_n) dizisi **M* iterasyon yöntemi** olarak adlandırılır [174].

Teorem 8.13. *$(X, \|.\|)$ bir Banach uzayı, $T : X \to X$ sürekli bir dönüşüm ve $x^* \in X$ olsun. (8.74) ve (8.75) ile verilen iki iterasyon yöntemi ile oluşturulan kaos kontrol mekanizmaları $x_{n+1} = \widetilde{T}(x_n)$ ile gösterilsin. T ile $\widetilde{T}$ dönüşümleri aynı sabit noktalar kümesine sahiptir; yani $Tx^* = x^*$ iken $\widetilde{T}(x^*) = x^*$ dır. Bununla birlikte, T dönüşümü Gâteaux türevi $\|T'(x^*)\| > 1$ şartını sağlayan $x^* \in X$ kararsız (itici) sabit noktalar için kaotik davranışa sahip bir dönüşüm olsun. Bu takdirde, $(\alpha_n), (\beta_n) \subset (0,1)$ dizileri kaos kontrol parametreleri olmak üzere $\left\|\widetilde{T}'(x^*)\right\| < 1$ kararlılık koşulu altında; kararsız yörüngeleri kararlı (çekici) hale dönüştüren kontrol parametre dizilerinin belirlediği kararlılık aralıkları; JF [173] iterasyon dönüşümü için*

$$(\alpha_n) \subset \left(\frac{\left\|T'^3(x^*)\right\| \|1+\beta_n(T'(x^*)-1)\|-1}{\|T'^3(x^*)\| \|T'(x^*)-1\| \|1+\beta_n(T'(x^*)-1)\|}, \frac{\left\|T'^3(x^*)\right\| \|1+\beta_n(T'(x^*)-1)\|+1}{\|T'^3(x^*)\| \|T'(x^*)-1\| \|1+\beta_n(T'(x^*)-1)\|} \right),$$

formunda iken M [174] iterasyon dönüşümü için*

$$(\alpha_n) \subset \left(\frac{\left\|T'^2(x^*)\right\|-1}{\|T'^2(x^*)\| \|T'(x^*)-1\| \|1+\beta_n T'(x^*)\|}, \frac{\left\|T'^2(x^*)\right\|+1}{\|T'^2(x^*)\| \|T'(x^*)-1\| \|1+\beta_n T'(x^*)\|} \right)$$

şeklindedir.

9
SONUÇ VE ÖNERİLER

Sabit nokta iterasyon yöntemlerinin kaos kontrol mekanizmaları olarak kullanımını içeren mevcut çalışmada birçok ilginç sonuç elde edilmiştir. Öncelikle bu çalışmada sabit nokta teoriyle kaos teori birleştirilmiş ve kaosun bilinmezliği sabit nokta iterasyonlarının imkanlarıyla kararlı ya da dinamik bir sistem olarak elde edilmiştir. Sabit nokta iterasyon algoritmalarının geniş kullanım alanları göz önüne alınırsa elde edilen kaos kontrol sonuçlarının geniş bir bilimsel alana etki yaptığı kolaylıklar görülebilecektir. Bahsedilen ilişki altında iterasyon sınıfları özelden genele genişleyecek şekilde planlanmış ve tek parametreli Mann iterasyonundan başlayarak iki parametreli Ishikawa, üç parametreli Noor iterasyonu kaos kontrol mekanizması olarak kullanılmış ve kontrol parametre aralıkları belirlenmiştir.

Yukarıda bahsedilen her üç iterasyon metodunun kontrol aralıkları türev yoluyla elde edilmiştir. Elde edilen kontrol parametrelerine ait aralıklar iterasyon metotlarının genel tanımlarında belirtilen parametre aralıklarının alt aralıkları olduğundan kontrol aralıklarının dışında kalan parametre değerleri için de yörüngelerin davranış analizleri yapılarak iterasyonların periyodik ve kaotik bölgeleri tespit edilmiştir. Ayrıca, analitik olarak elde edilen sonuçlar kaos özellikli lojistik ve kübik fonksiyonlara uygulanarak nümerik kontrol aralıklarına ulaşılmış ve hem kararlılık aralığındaki hem de aralık dışındaki dinamik davranış incelenmiştir. Bununla birlikte, kaotik fonksiyonun kararsız periyodik yörüngeleri kontrol mekanizmasının parametre aralıklarında Lyapunov üsteli yardımıyla kararlı veya kararsız olup olmadığı belirlenmiştir. Daha sonra Ishikawa ve Noor iterasyonlarının pekişen özellikleri genellenerek n-adımlı Multi-step iterasyonu kontrol mekanizması tanımlanmıştır. Böylece en genel sabit nokta kontrol mekanizması geliştirilmiştir ve böylelikle üç adımdan daha büyük iterasyonlar için çalışıldığı durumlarda da kaos kontrol mekanizmalarının elde edilebilmesine olanak sağlanmıştır. Son olarak, reel hayatta iterasyonlar ile temsil edilen bazı olayların kaos kontrolü çalışılmıştır. Bu çalışmanın en önemli noktası, sabit nokta kaos kontrol mekanizmalarının trafik akış modeli olarak kullanılması ve trafikte kontrol mekanizmaları yardımıyla düzenlemelere imkan sunulmuş olmasıdır.

Reel uzayda kaotik özellikli fonksiyonların kararlılık aralıklarının belirlenmesi, en genel Multi-step kontrol mekanizmalarının elde edilmesiyle tamamlandıktan sonra reel uzay yerine Banach uzayları alınarak ve dönüşüm olarak operatörler seçilerek literatürde önemli yere sahip iterasyon sınıflarının kaos kontrol mekanizmaları elde edilmiştir. İterasyon sınıflarından kontrol mekanizmaları inşa ederken belirli sınıf iterasyonların kaos kontrol aralıklarının denkliği elde edilmiş ve belirli sınıflamalar yapılmıştır. Banach uzaylarında kaos kontrol mekanizmalarının kurulmasında Gâteaux ve Fréchet türevlerinden faydalanılmıştır.

Mevcut çalışmanın genişleme ve genellemesi bakımından bazı öneriler şu şekilde sıralanabilir: Tezde kullanmış olduğumuz tek değerli iterasyon sistemleri yerine çok değerli iterasyonlar ile kaos kontrol kümelerinin çalışılması mümkün görünmektedir. Ayrıca tez çalışmasında 1-boyutlu diskrit dinamik sistemler yerine iki ve çok boyutlu dinamik sistemler alınarak hem iterasyonların genellemesi hem de kaos kontrol aralıkları kurma imkanı bulunmaktadır.

KAYNAKÇA

[1] P. Fatou, "Sur l'itération des fonctions transcendantes entières," *Acta Mathematica*, vol. 47, no. 4, pp. 337–370, 1926.

[2] G. Julia, "Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles," *J. Math. Pures Appl.*, vol. 8, pp. 47–245, 1918.

[3] S. Smale, "Diffeomorphisms with many periodic points," in *Differential and Combinatorial Topology*, Princeton University Press, 2015, pp. 63–80.

[4] E. N. Lorenz, "Deterministic nonperiodic flow," *Journal of Atmospheric Sciences*, vol. 20, no. 2, pp. 130–141, 1963.

[5] E. N. Lorenz, "Predictability: Does the flap of a butterfly's wings in brazil set off a tornado in texas?" İn *American Association for the Advancement of Science*, Washington, D.C., December 29, 1972.

[6] R. C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*. London, U.K.: Oxford Univ. Press, 2000.

[7] D. Ruelle, F. Takens, "On the nature of turbulence," *Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg-RCP25*, vol. 12, pp. 1–44, 1971.

[8] T.-Y. Li, J. A. Yorke, "Period three implies chaos," in *The Theory of Chaotic Attractors*, Springer, 2004, pp. 77–84.

[9] A. N. Sharkovsky, "Coexistence of cycles of a continuous map of a line into itself," *Ukrainian Math.*, vol. 16, no. 1, pp. 61–71, 1964.

[10] J. Gleick, *Kaos*. İstanbul: ALFA Basım Yayım, 2020 (Transl.: İ. A. Demir, *Chaos: Making A New Science*. Penguin Books, 1987).

[11] R. M. May, "Simple mathematical models with very complicated dynamics," *Nature*, vol. 261, pp. 459–467, 1976. DOI: https://doi.org/10.1038/261459a0.

[12] M. J. Feigenbaum, "Quantitative universality for a class of nonlinear transformations," *Journal of Statistical Physics*, vol. 19, no. 1, pp. 25–52, 1978.

[13] M. J. Feigenbaum, "The universal metric properties of nonlinear transformations," *Journal of Statistical Physics*, vol. 21, no. 6, pp. 669–706, 1979.

[14] M. J. Feigenbaum, "Universal behavior in nonlinear systems," *Physica*, vol. 7D, pp. 16–39, 1983.

[15] A. Libchaber, C. Laroche, S. Fauve, "Period doubling cascade in mercury, a quantitative measurement," *Journal de Physique Lettres*, vol. 43, no. 7, pp. 211–216, 1982.

[16] P. S. Linsay, "Period doubling and chaotic behavior in a driven anharmonic oscillator," *Physical Review Letters*, vol. 47, no. 19, p. 1349, 1981.

[17] F. C. Moon, *Chaotic and Fractal Dynamics: Introduction for Applied Scientists and Engineers*. John Wiley & Sons, 2008.

[18] B. B. Mandelbrot, *The fractal geometry of nature*. New York: W. H. Freeman, 1983.

[19] A. T. Winfree, *When Time Breaks Down: the Three-Dimensional Dynamics of Electrochemical Waves and Cardiac Arrhythmias*. Princeton University Press, 1987.

[20] N. P. Chau, "Controlling chaos by periodic proportional pulses," *Physics Letters A*, vol. 234, no. 3, pp. 193–197, 1997.

[21] S. Lynch, *Dynamical Systems with Applications using Maple*. Springer Science & Business Media, 2009.

[22] W. L. Ditto, S. N. Rauseo, M. L. Spano, "Experimental control of chaos," *Physical Review Letters*, vol. 65, no. 26, p. 3211, 1990.

[23] E. Ott, C. Grebogi, J. A. Yorke, "Controlling chaos," *Physical Review Letters*, vol. 64, no. 11, p. 1196, 1990.

[24] K. Pyragas, "Continuous control of chaos by self-controlling feedback," *Physics Letters A*, vol. 170, no. 6, pp. 421–428, 1992.

[25] M. de Sousa Vieira, A. J. Lichtenberg, "Controlling chaos using nonlinear feedback with delay," *Physical Review E*, vol. 54, no. 2, p. 1200, 1996.

[26] H. Salarieh, A. Alasty, "Stabilizing unstable fixed points of chaotic maps via minimum entropy control," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 37, no. 3, pp. 763–769, 2008.

[27] J. E. Socolar, D. W. Sukow, D. J. Gauthier, "Stabilizing unstable periodic orbits in fast dynamical systems," *Physical Review E*, vol. 50, no. 4, p. 3245, 1994.

[28] B. T. Polyak, "Stabilizing chaos with predictive control," *Automation and Remote Control*, vol. 66, no. 11, pp. 1791–1804, 2005.

[29] P. Carmona, D. Franco, "Control of chaotic behaviour and prevention of extinction using constant proportional feedback," *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, vol. 12, no. 6, pp. 3719–3726, 2011.

[30] H. Schuster, M. Stemmler, "Control of chaos by oscillating feedback," *Physical Review E*, vol. 56, no. 6, p. 6410, 1997.

[31] G. Chen, *Controlling Chaos and Bifurcations in Engineering Systems*. CRC press, 1999.

[32] R. H. Day, *Complex Economic Dynamics: An Introduction to Dynamical Systems and Market Mechanisms*. 1994, vol. 1.

[33] J. Dyson, R. Villella-Bressan, G. Webb, "A nonlinear age and maturity structured model of population dynamics: I. basic theory," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 242, no. 1, pp. 93–104, 2000.

[34] L. Glass, "Cardiac arrhythmias and circle maps- a classical problem," *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 1, no. 1, pp. 13–19, 1991.

[35] G. Jakimoski, L. Kocarev, "Chaos and cryptography: Block encryption ciphers based on chaotic maps," *Ieee Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 48, no. 2, pp. 163–169, 2001.

[36] J. Ottino, F. Muzzio, M. Tjahjadi, J. Franjione, S. C. Jana, H. Kusch, "Chaos, symmetry, and self-similarity: Exploiting order and disorder in mixing processes," *Science*, vol. 257, no. 5071, pp. 754–760, 1992.

[37] S. J. Schiff, K. Jerger, D. H. Duong, T. Chang, M. L. Spano, W. L. Ditto, "Controlling chaos in the brain," *Nature*, vol. 370, no. 6491, pp. 615–620, 1994.

[38] A. Azevedo, S. M. Rezende, "Controlling chaos in spin-wave instabilities," *Physical Review Letters*, vol. 66, no. 10, p. 1342, 1991.

[39] E. R. Hunt, "Stabilizing high-period orbits in a chaotic system: The diode resonator," *Physical Review Letters*, vol. 67, no. 15, p. 1953, 1991.

[40] A. Garfinkel, M. L. Spano, W. L. Ditto, J. N. Weiss, "Controlling cardiac chaos," *Science*, vol. 257, no. 5074, pp. 1230–1235, 1992.

[41] B. Peng, V. Petrov, K. Showalter, "Controlling chemical chaos," *The Journal of Physical Chemistry*, vol. 95, no. 13, pp. 4957–4959, 1991.

[42] J. Singer, H. H. Bau, "Active control of convection," *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, vol. 3, no. 12, pp. 2859–2865, 1991.

[43] S. Sinha, "Controlling chaos in biology," *Current Science*, pp. 977–983, 1997.

[44] D. Jarrett, Z. Xiaoyan, "The dynamic behaviour of road traffic flow," in *Applications of Fractals and Chaos*, Springer, 1993, pp. 237–248.

[45] X. Zhang, D. F. Jarrett, "Stability analysis of the classical car-following model," *Transportation Research Part B: Methodological*, vol. 31, no. 6, pp. 441–462, 1997.

[46] J. E. Disbro, M. Frame, "Traffic flow theory and chaotic behavior," *Transp. Res. Rec.*, vol. 1225, pp. 109–115, 1990.

[47] D. Grether, A. Neumann, K. Nagel, "Simulation of urban traffic control: A queue model approach," *Procedia Computer Science*, vol. 10, pp. 808–814, 2012.

[48] E. Braverman, E. Liz, "Global stabilization of periodic orbits using a proportional feedback control with pulses," *Nonlinear Dynamics*, vol. 67, no. 4, pp. 2467–2475, 2012.

[49] D. Franco, E. Liz, "A two-parameter method for chaos control and targeting in one-dimensional maps," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 23, no. 01, p. 1 350 003, 2013.

[50] E. Liz, "How to control chaotic behaviour and population size with proportional feedback," *Physics Letters A*, vol. 374, no. 5, pp. 725–728, 2010.

[51] E. Liz, D. Franco, "Global stabilization of fixed points using predictive control," *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 20, no. 2, p. 023 124, 2010.

[52] G. L. Baker, J. P. Gollub, *Chaotic Dynamics: An Introduction*. New York, NY, USA: Cambridge Univ. Press, 1996.

[53] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Boca Raton: CRC Press, 2018.

[54] S. Boccaletti, C. Grebogi, Y.-C. Lai, H. Mancini, D. Maza, "The control of chaos: Theory and applications," *Physics reports*, vol. 329, no. 3, pp. 103–197, 2000.

[55] S. N. Elaydi, *Discrete Chaos: With Applications in Science and Engineering*. Boca Raton: CRC Press, 2007.

[56] L. S. Block, W. A. Coppel, *Dynamics in One Dimension*. Springer, 2006.

[57] N. Singh, A. Sinha, "Chaos-based secure communication system using logistic map," *Optics and Lasers in Engineering*, vol. 48, no. 3, pp. 398–404, 2010.

[58] R. Vazquez-Medina, A. Dıaz-Méndez, J. del Rıo-Correa, J. López-Hernández, "Design of chaotic analog noise generators with logistic map and mos qt circuits," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 40, no. 4, pp. 1779–1793, 2009.

[59] K. Malek, F. Gobal, "Application of chaotic logistic map for the interpretation of anion-insertion in poly-ortho-aminophenol films," *Synthetic Metals*, vol. 113, no. 1-2, pp. 167–171, 2000.

[60] M. Baptista, "Cryptography with chaos," *Physics Letters A*, vol. 240, no. 1-2, pp. 50–54, 1998.

[61] M. Andrecut, "Logistic map as a random number generator," *International Journal of Modern Physics B*, vol. 12, no. 09, pp. 921–930, 1998.

[62] A. G. Radwan, "On some generalized discrete logistic maps," *Journal of Advanced Research*, vol. 4, no. 2, pp. 163–171, 2013.

[63] V. Berinde, *Iterative Approximation of Fixed Points*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2007.

[64] I. K. Argyros, S. Hilout, *Computational Methods in Nonlinear Analysis: Efficient Algorithms, Fixed Point Theory and Applications*. World Scientific, 2013.

[65] K. C. Border, *Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory*. Cambridge university press, 1985.

[66] M. Broy, "Fixed point theory for communication and concurrency.," *Formal Description of Programming Concepts*, vol. 11, pp. 125–146, 1982.

[67] I. Rus, "Principles and applications of the fixed point theory," *Editura Dacia, Cluj-Napoca*, 1979.

[68] M. J. Todd, *Lecture Notes in Economics and Mathmatical Systems*. Springer, 1976.

[69] W. Kirk, N. Shahzad, *Fixed Point Theory in Distance Spaces*. Springer, 2014.

[70] W. Huang, "Controlling chaos through growth rate adjustment," *Discrete Dynamics in Nature and Society*, vol. 7, no. 3, pp. 191–199, 2002.

[71] V. Berinde, "Controlling chaotic dynamical systems through fixed point iterative techniques," *Scientific Studies and Research*, vol. 19, no. 2, pp. 47–58, 2009.

[72] Ashish, J. Cao, R. Chugh, "Controlling chaos using superior feedback technique with applications in discrete traffic models," *Int. J. Fuzzy Syst.*, vol. 21, no. 5, pp. 1467–1479, 2019.

[73] W. Huang, "Theory of adaptive adjustment," *Discrete Dynamics in Nature and Society*, vol. 5, no. 4, pp. 247–263, 2001.

[74] M. A. Khan, B. Sahoo, A. K. Mondal, "Control of chaos to obtain periodic behaviour via nonlinear control," *Proceedings of the National Academy of Sciences, India Section A: Physical Sciences*, vol. 85, no. 1, pp. 143–148, 2015.

[75] W. Huang, "Stabilizing unstable discrete systems by a nonuniformly adaptive adjustment mechanism," *Physical Review E*, vol. 62, no. 3, p. 3455, 2000.

[76] W. Huang, "Stabilizing nonlinear dynamical systems by an adaptive adjustment mechanism," *Physical Review E*, vol. 61, no. 2, R1012, 2000.

[77] W. Huang, "Controlling high-order chaotic discrete systems by lagged adaptive adjustment," *Physical Review E*, vol. 65, no. 1, p. 016 215, 2001.

[78] V. Berinde, M. Pačurar, "Controlling chaotic discrete dynamical systems through fixed point iterative methods," in *PAMM: Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, Wiley Online Library, vol. 8, 2008, pp. 10 877–10 878.

[79] V. Berinde, G. Kovacs, "Stabilizing discrete dynamical systems by monotone krasnoselskij type iterative schemes," *Creat. Math. Inform*, vol. 17, no. 3, pp. 298–307, 2008.

[80] A. Petrusel, "Fixed point theory with applications to dynamical systems and fractals," in *Seminar on Fixed Point Theory Cluj-Napoca*, vol. 3, 2002, pp. 305–316.

[81] M. Nerlove, "Adaptive expectations and cobweb phenomena," *The Quarterly Journal of Economics*, vol. 72, no. 2, pp. 227–240, 1958.

[82] M. Fahad, W. Nazeer, S. Kang, C. Jung, "A fixed point type iterative method and its dynamical behavior," *Pan-American Mathematical Journal*, vol. 27, no. 4, pp. 86–99, 2017.

[83] S. Ishikawa, "Fixed points by a new iteration method," *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 44, no. 1, pp. 147–150, 1974.

[84] M. A. Noor, "New approximation schemes for general variational inequalities," *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 251, no. 1, pp. 217–229, 2000.

[85] B. E. Rhoades, S. M. Soltuz, "The equivalence between mann–ıshikawa iterations and multistep iteration," *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, vol. 58, no. 1-2, pp. 219–228, 2004.

[86] W. R. Mann, "Mean value methods in iteration," *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 4, no. 3, pp. 506–510, 1953.

[87] M. A. Krasnosel'skii, "Two remarks on the method of successive approximations," *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 10, no. 63, pp. 123–127, 1955.

[88] P. Shang, X. Li, S. Kamae, "Chaotic analysis of traffic time series," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 25, no. 1, pp. 121–128, 2005.

[89] S.-C. Lo, H.-J. Cho, "Chaos and control of discrete dynamic traffic model," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 342, no. 7, pp. 839–851, 2005.

[90] R. L. Devaney, *A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment*. Boca Raton: CRC Press, 2020.

[91] S. Wiggins, M. Golubitsky, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer, 2003.

[92] F. R. Marotto, "Snap-back repellers imply chaos in rn," *Journal of mathematical analysis and applications*, vol. 63, no. 1, pp. 199–223, 1978.

[93] V. Karakaya, D. Sekman, "Mathematics as a language of mind," in *3rd Int. Conf. Comput. Math. Eng. Sci. (CMES 2018)*, Girne, CYPRUS, May 2018, p. 12.

[94] V. Karakaya, "Cisimsel sûret ve metafizik arasında matematiksel bilginin yeri üzerine bir değerlendirme," *Beytulhikme Int. J. Phil.*, vol. 12, no. 2, pp. 357–376, 2022. DOI: 10.18491/beytulhikme.1915.

[95] Ö. Türker, *İslam Düşünce Gelenekleri*. İstanbul: Ketebe Yayınları, 2020.

[96] İ. Sînâ, *Metafizik I*, E. Demirli, Ö. Türker, Eds. İstanbul: Türkiye Yazma Eserler Kurumu Başkanlığı, 2014.

[97] V. Karakaya, "Matematik felsefesi bakımından matematik nesnelerin modellenmesi üzerine," *Beytulhikme Int. J. Phil.*, vol. 11, no. 3, pp. 1143–1155, 2021. DOI: 10.18491/beytulhikme.1799.

[98] *Matematik ve metafizik düşünce İlişkisi*. [Online]. Available: https://www.fikriyat.com/yazarlar/sefa-saygili/2019/04/29/matematik-ve-metafizik-dusunce-iliskisi (visited on 07/18/2022).

[99] M. A. Sarıgöl, S. Jafarov, *Analiz I*. Bursa: Ekin Yayınevi, 2007.

[100] V. Karakaya, D. Sekman, "Matematiksel düşüncenin tarihi gelişimi ve eğitimde konumlanması," in *Türkiye Eğitim Vizyonu Üzerine Değerlendirmeler*, F. Tanhan, Ed., Ankara: Pegem Akademi, 2019, pp. 35–44. DOI: 10.14527/9786052418260.

[101] J. R. Kirkwood, *An Introduction to Analysis*. Boston: PWS Publishing Company, 1995.

[102] V. A. Zorich, *Mathematical Analysis I*. Berlin: Springer-Verlag, 2004.

[103] B. S. Schröder, *Mathematical Analysis*. Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2008.

[104] R. Magnus, *Fundamental Mathematical Analysis*. Switzerland: Springer, 2020.

[105] W. R. Wade, *An Introduction to Mathematical Analysis*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, 2004.

[106] A. N. Boules, *Fundamentals of Mathematical Analysis*. London, U.K.: Oxford Univ. Press, 2021.

[107] J. B. Conway, *A First Course in Analysis*. New York, NY, USA: Cambridge Univ. Press, 2018.

[108] V. S. Pugachev, I. N. Sinitsyn, *Lectures on Functional Analysis and Applications*. Singapore: World Scientific, 1999.

[109] A. L. Brown, A. Page, *Elements of Functional Analysis*. London: Van Nostrand Reinhold, 1970.

[110] G. Cohen, *A Course in Modern Analysis and its Applications*. New York, NY, USA: Cambridge Univ. Press, 2003.

[111] Y. Eidelman, V. Milman, A. Tsolomitis, *Functional Analysis: An Introduction*. Providence, Rhode Island: American Math. Soc., 2004.

[112] I. J. Maddox, *Elements of Functional Analysis*. Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 1970.

[113] E. Şuhubi, *Fonksiyonel Analiz*. İstanbul: İTÜ Vakfı Yayınları, 2001.

[114] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*. Toronto: Wiley, 1978.

[115] L. Smith, *Kaos*. Ankara: Dost Kitabevi, 2014 (Transl.: H. Gür, *Chaos*. Oxford Univ. Press, 2007).

[116] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Boca Raton: CRC Press, 2022.

[117] J. Gribbin, *Derin Basitlik: Kaos, Karmaşa ve Yaşamın Ortaya Çıkışı*. İstanbul: ALFA Basım Yayım, 2013 (Transl.: A. Barişta, A. Kızıltuğ, *Deep Simplicity: Chaos, Complexity and the Emergence of Life*. Penguin Books, 2004).

[118] P. F. Verhulst, "Resherches mathematiques sur la loi d'accroissement de la population," *Nouveaux Memoires de l'academie Royale des Sciences*, vol. 18, pp. 1–41, 1845.

[119] P. Verhulst, "Deuxième mèmoire sur la loi d'accroissement de la population. nouv. mém. acad. r," *Sci. Lett. B.-Arts Belg*, vol. 20, pp. 142–173, 1847.

[120] K. T. Alligood, T. D. Sauer, J. A. Yorke, *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. New York: Springer-Verlag, 1996.

[121] S. N. Elaydi, *An Introduction to Difference Equations*. New York: Springer-Verlag, 2005.

[122] J. A. Fridy, *Introductory Analysis: The Theory of Calculus*. Orlando, FL, USA: Harcourt Brace Jovanovich, 1987.

[123] R. A. Holmgren, *A First Course in Discrete Dynamical Systems*. Springer-Verlag, 1994.

[124] T.-Y. Li, J. A. Yorke, "Period three implies chaos," *The American Mathematical Monthly*, vol. 82, no. 10, pp. 985–992, 1975.

[125] Z. Sardar, I. Abrams, *Kaos: Düzensizlikteki Düzeni Anlamak için Çizgibilim*. İstanbul: NTV Yayınları, 2010 (Transl.: D. Guliyeva, *Chaos: A Graphic Guide*. Cambridge, UK: Icon Books, 2008).

[126] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, P. Stacey, "On devaney's definition of chaos," *The American Mathematical Monthly*, vol. 99, no. 4, pp. 332–334, 1992.

[127] A. M. Liapounoff, *Probleme General de la Stabilite du Mouvement. (Ann. Math. Studies 17)*. Princeton: Princeton Univ. Press, 1948.

[128] I. Farmakis, M. Moskowitz, *Fixed Points Theorems and Their Applications*. Singapore: World Scientific, 2013.

[129] N. E. H. Bouzara, "On fixed point theorems for single and multivalued mappings and applications to differential problems," Ph.D. dissertation, Dept. of Math., Yildiz Technical Univ., İstanbul, 2016.

[130] L. Brouwer, "Über abbildung von mannigfaltigkeiten," *Math. Ann.*, vol. 71, pp. 97–115, 1911.

[131] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*. Singapore: McGraw-Hill, 1976.

[132] M. A. Khamsi, W. A. Kirk, *An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory*. Canada: Wiley, 2001.

[133] R. P. Agarwal, M. Meehan, D. O'Regan, *Fixed Points Theory and Applications*. Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 2004.

[134] J. v. Neumann, "Zur theorie der gesellschaftsspiele," *Math. Ann.*, vol. 100, pp. 295–320, 1928.

[135] S. Kakutani, "A generalization of brouwer's fixed point theorem," *Duke Mathematical Journal*, vol. 8, no. 3, pp. 457–459, 1941.

[136] J. F. Nash, "Equilibrium points in *n*-person games," *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, vol. 36, no. 1, pp. 48–49, 1950.

[137] J. Schauder, "Der fixpunktsatz in funktionalraümen," *Studia Mathematica*, vol. 2, no. 1, pp. 171–180, 1930.

[138] K. Goebel, W. A. Kirk, *Topics in Metric Fixed Point Theory*. New York, NY, USA: Cambridge Univ. Press, 1990.

[139] S. Banach, "Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales," *Fund. Math*, vol. 3, no. 1, pp. 133–181, 1922.

[140] A. Ivanov, "Fixed points of mappings of metric spaces," *Journal of Soviet Math.*, vol. 12, pp. 1–64, 1979.

[141] J. Liouville, "Sur le développement des functions ou parties en séries dont les divers termes sont assujettes à satisfaire à une mĕme équation differentielle du second ordre contenant une parametre variable," *J. Math. Pures Appl.*, vol. 2, pp. 16–35, 1837.

[142] E. Picard, "Memoire sur la theorie des equations aux derivees partielles et la methode des approximations successives," *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, vol. 6, pp. 145–210, 1890.

[143] B. Halpern, "Fixed points of nonexpanding maps," *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 73, no. 6, pp. 957–961, 1967.

[144] T. Zamfirescu, "Fixed point theorems in metric spaces," *Archiv der Mathematik*, vol. 23, no. 1, pp. 292–298, 1972.

[145] W. A. Kirk, B. Sims, "Handbook of metric fixed point theory," *Australian Mathematical Society GAZETTE*, vol. 29, no. 2, 2002.

[146] V. Karakaya, K. Doğan, F. Gürsoy, M. Ertürk, "Fixed point of a new three-step iteration algorithm under contractive-like operators over normed spaces," *Abstract and Applied Analysis*, vol. 2013, 2013.

[147] W. Kirk, "On successive approximations for nonexpansive mappings in banach spaces," *Glasgow Mathematical Journal*, vol. 12, no. 1, pp. 6–9, 1971.

[148] F. Gürsoy, V. Karakaya, B. E. Rhoades, "Data dependence results of new multi-step and s-iterative schemes for contractive-like operators," *Fixed Point Theory and Applications*, vol. 2013, no. 1, pp. 1–12, 2013.

[149] H. Schaefer, "Über die methode sukzessiver approximationen," *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, vol. 59, pp. 131–140, 1957.

[150] M. Rani, R. Agarwal, "A new experimental approach to study the stability of logistic map," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 41, no. 4, pp. 2062–2066, 2009.

[151] Ashish, J. Cao, R. Chugh, "Chaotic behavior of logistic map in superior orbit and an improved chaos-based traffic control model," *Nonlinear Dynamics*, vol. 94, no. 2, pp. 959–975, 2018.

[152] S. Kumari, R. Chugh, "A novel four-step feedback procedure for rapid control of chaotic behavior of the logistic map and unstable traffic on the road," *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 30, no. 12, p. 123 115, 2020.

[153] Ashish, J. Cao, "A novel fixed point feedback approach studying the dynamical behaviors of standard logistic map," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 29, no. 01, p. 1 950 010, 2019.

[154] B. Prasad, K. Katiyar, "A stability analysis of logistic model," *International Journal of Nonlinear Science*, vol. 17, no. 1, pp. 71–79, 2014.

[155] *MATLAB R2020a*. U.S: MathWorks, 2012.

[156] *MATHEMATICA 9.0*. UK: Wolfram Research, 2012.

[157] B. Rhoades, "Comments on two fixed point iteration methods," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 56, no. 3, pp. 741–750, 1976.

[158] M. Cho, *The study of applying catastrophe theory to traffic stream model*. Thesis of Master Degree of Institute of Traffic and Transportation, National Chiao Tung University, 1996.

[159] W. Chung, *A study of the effect of traffic control on the flow of traffic on the highway section under construction in Taiwan*. Thesis of Master Degree of Institute of Traffic and Transportation, National Chiao Tung University, 1986.

[160] M. Martelli, *Introduction to Discrete Dynamical Systems and Chaos*. John Wiley & Sons, 2011.

[161] F. Gürsoy, V. Karakaya, "A picard-s hybrid type iteration method for solving a differential equation with retarded argument," *arXiv preprint arXiv:1403.2546*, 2014.

[162] B. S. Thakur, D. Thakur, M. Postolache, "A new iterative scheme for numerical reckoning fixed points of suzuki's generalized nonexpansive mappings," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 275, pp. 147–155, 2016.

[163] W. Phuengrattana, S. Suantai, "On the rate of convergence of mann, ıshikawa, noor and sp-iterations for continuous functions on an arbitrary interval," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 235, no. 9, pp. 3006–3014, 2011.

[164] R. Chugh, V. Kumar, S. Kumar, *et al.*, "Strong convergence of a new three step iterative scheme in banach spaces," *American Journal of Computational Mathematics*, vol. 2, no. 04, p. 345, 2012.

[165] R. Agarwal, D. O Regan, D. Sahu, "Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings," *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, vol. 8, no. 1, p. 61, 2007.

[166] D. R. Sahu, "Applications of the s-iteration process to constrained minimization problems and split feasibility problems," *Fixed Point Theory*, vol. 12, no. 1, pp. 187–204, 2011.

[167] V. Karakaya, Y. Atalan, K. Doğan, N. E. H. Bouzara, "Some fixed point results for a new three steps iteration process in banach spaces," *Fixed Point Theory*, vol. 18, no. 2, pp. 625–640, 2017.

[168] K. Ullah, M. Arshad, "Numerical reckoning fixed points for suzuki's generalized nonexpansive mappings via new iteration process," *Filomat*, vol. 32, no. 1, pp. 187–196, 2018.

[169] K. Ullah, M. Arshad, "New three-step iteration process and fixed point approximation in banach spaces," *Journal of Linear and Topological Algebra*, vol. 7, no. 02, pp. 87–100, 2018.

[170] H. Piri, B. Daraby, S. Rahrovi, M. Ghasemi, "Approximating fixed points of generalized α-nonexpansive mappings in banach spaces by new faster iteration process," *Numerical Algorithms*, vol. 81, no. 3, pp. 1129–1148, 2019.

[171] V. K. Sahu, H. Pathak, R. Tiwari, "Convergence theorems for new iteration scheme and comparison results," *Aligarh Bull. Math*, vol. 35, no. 1-2, pp. 19–42, 2016.

[172] N. Kadıoğlu Karaca, İ. Yıldırım, "Approximating fixed points of nonexpansive mappings by a faster iteration process," *J. Adv. Math. Stud.*, vol. 8, no. 2, pp. 257–264, 2015.

[173] F. Ali, J. Ali, J. J. Nieto, "Some observations on generalized non-expansive mappings with an application," *Computational and Applied Mathematics*, vol. 39, no. 2, pp. 1–20, 2020.

[174] K. Ullah, M. Arshad, "New iteration process and numerical reckoning fixed points in banach spaces," *University Politehnica of Bucharest Scientific Bulletin Series A*, vol. 79, no. 4, pp. 113–122, 2017.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Makale

1. D. Sekman, V. Karakaya, “Controlling chaos for multistep iteration process and its special iterations in discrete dynamical systems,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 32, no. 02, p. 2250020, 2022. https://doi.org/10.1142/S0218127422500201

2. D. Sekman, V. Karakaya, “On chaos controlling mechanism for Ishikawa iteration and its traffic flow model in discrete dynamical systems,” Under Review.

3. D. Sekman, V. Karakaya, “On controlling mechanism of S-iteration process with chaotic behavior in dynamical systems,” Under Review.

Konferans Bildirisi

1. D. Sekman, V. Karakaya, On Controlling Chaos for Multi-Step Iteration Process and Its Special Iterations in Discrete Dynamical Systems, International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2021), Gazi University, Ankara, Türkiye, September 16-18, 2021.

2. D. Sekman, V. Karakaya, Ishikawa Iteration Process as Control Systems and Chaotic Discrete Dynamical Systems, International Conference On Analysis and Its Applications (ICAA-2018), Kırşehir, Türkiye, September 11-14, 2018.

3. V. Karakaya, D. Sekman, Fixed Point Theory and Dynamics-Chaotic Behaviors of Function Iteration Process, International Conference Operators on Morrey-Type Spaces and Applications (OMTSA-2017), Kırşehir, Türkiye, July 10-13, 2017.

Proje

1. Kontrol Sistemi Olarak Sabit Nokta İterasyonları ve Kaotik Diskrit Dinamik Sistemler (Proje Yürütücüsü: Vatan Karakaya, Proje Araştırmacısı: Derya Sekman), Yıldız Teknik Üniversitesi, Proje No: FDK-2018-3348, 20.06.2018 - 20.12.2022.