T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PİEZOELEKTRİK KATMANLI ÖNGERİLMELİ SİSTEMLERDE YÜZEY VE LAMB DALGALARININ DİSPERSİYONU

İLKAY KURT

DOKTORA TEZİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
MAKİNE TEORİSİ VE KONTROL PROGRAMI

DANIŞMAN
DOÇ. DR. SEMİH SEZER

EŞ DANIŞMAN
PROF. DR. SURKAY D. AKBAROV

İSTANBUL, 2016

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PİEZOELEKTRİK KATMANLI ÖNGERİLMELİ SİSTEMLERDE YÜZEY VE LAMB DALGALARININ DİSPERSİYONU

İlkay KURT tarafından hazırlanan tez çalışması 13.07.2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Semih SEZER
Yıldız Teknik Üniversitesi

Eş Danışman

Prof. Dr. Surkay D. AKBAROV
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Semih SEZER
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Rahmi GÜÇLÜ
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Doç. Dr. Şenol ATAOĞLU
İstanbul Teknik Üniversitesi _____

Yrd. Doç. Dr. Tamer KEPÇELER
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Ünal ALDEMİR
İstanbul Teknik Üniversitesi _____

ÖNSÖZ

Tüm lisansüstü eğitimim süresince ve bu tezimin hazırlanmasında büyük sabır ve anlayışla kıymetli yardımlarını esirgemeyen tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Semih SEZER'e teşekkürlerimi sunarım.

Tez konusunun belirlenmesinden çalışmanın neticeye ulaşmasına kadar bilgi ve tecrübesinden yararlandığım ikinci tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Surkay D. AKBAROV'a teşekkürü borç bilirim.

Temmuz, 2016

İlkay KURT

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ vi

KISALTMA LİSTESİ vii

ŞEKİL LİSTESİ viii

ÇİZELGE LİSTESİ xiv

ÖZET xv

ABSTRACT xvi

BÖLÜM 1

GİRİŞ 1

1.1 Literatür Özeti 3

1.2 Tezin Amacı 12

1.3 Orijinal Katkı 13

BÖLÜM 2

PİEZOELEKTRİK KATMAN VE METAL YARIDÜZLEMDEN OLUŞAN ÖNGERİLMELİ SİSTEMDE YÜZEY DALGALARININ DİSPERSİYONU 14

2.1 Problemin Matematiksel Formülasyonu 14

2.2 Problemin Çözüm Yöntemi 19

2.2.1 Katmanda Gerilme ve Elektrik Yer Değiştirme İfadelerinin Bulunması 19

2.2.1.1 Kalınlık Doğrultusunda Polarizasyon Durumu 19

2.2.1.2 Uzunluk Doğrultusunda Polarizasyon Durumu 27

2.2.2 Yarıdüzlemde Gerilme İfadelerinin Bulunması 31

2.2.3 Kalınlık Doğrultusunda Polarizasyon Durumunda Dispersiyon Denklemlerinin Bulunması 33

2.2.4 Uzunluk Doğrultusunda Polarizasyon Durumunda Dispersiyon Denklemlerinin Bulunması 37

2.3 Dispersiyon Eğrilerinin Elde Edilmesi ve Yorumlanması 41

2.3.1 Piezoelektriklik Özelliğinin Dispersiyon Eğrilerine Etkisi 43
2.3.2 Açık ve Kısa Devre Elektrot Durumlarının Dispersiyon Eğrilerine Etkisi 49
2.3.3 Polarizasyon Doğrultusunun Dispersiyon Eğrilerine Etkisi 51
2.3.4 Düşey Tek Eksenli Öngerilmelerin Dispersiyon Eğrilerine Etkisi 58

BÖLÜM 3

ÖNGERİLMELİ PZT/METAL/PZT SANDVİÇ PLAKTA LAMB DALGALARININ DİSPERSİYONU 62

3.1 Problemin Matematiksel Formülasyonu 62

3.2 Problemin Çözüm Yöntemi 67

3.2.1 Dış Katmanlarda Gerilme ve Elektrik Yer Değiştirme İfadelerinin Bulunması 67
3.2.2 İç Katmanda Gerilme İfadelerinin Bulunması 72
3.2.3 Simetrik Mod Lamb Dalgaları İçin Dispersiyon Denkleminin Bulunması 78
3.2.4 Asimetrik Mod Lamb Dalgaları İçin Dispersiyon Denkleminin Bulunması 81

3.3 Dispersiyon Eğrilerinin Elde Edilmesi ve Yorumlanması 83

3.3.1 Öngerilmesiz Sandviç Plakta Piezoelektriklik Özelliğinin Dispersiyon Eğrilerine Etkisi 84
3.3.2 Öngerilmeli Sandviç Plakta Piezoelektriklik Özelliğinin Dispersiyon Eğrilerine Etkisi 90
3.3.3 İdeal Olmayan Temas Koşullarının Dispersiyon Eğrilerine Etkisi 98

BÖLÜM 4

SONUÇ VE ÖNERİLER 106

KAYNAKLAR 110

ÖZGEÇMİŞ 117

SİMGE LİSTESİ

a,b,c	Üçüncü derece elastik sabitler
A_1,A_2,A_3	Green şekil değiştirme tensörünün cebirsel invariyantları
c	Dalga yayılım faz hızı
c_1	Boyuna dalga yayılım hızıdır
c_2	Enine dalga yayılım hızıdır
c_{ij}	Elastik sabitler
D_i	Elektrik yer değiştirme vektörü bileşenleri
e_{ij}	Piezoelektrik sabitler
F_1	Yanal ideal olmayan temas koşulunu tanımlamada kullanılan değişken
F_2	Düşey ideal olmayan temas koşulunu tanımlamada kullanılan değişken
h	Katman kalınlığı
H	Sandviç plak kalınlığı
H_{metal}	İç katman kalınlığının yarısı
H_{PZT}	Dış katman kalınlığı
k	Dalga sayısı
kh, kH	Boyutsuz dalga sayısı
u_i	Mekanik yer değiştirme vektörü bileşenleri
$\varepsilon_{ij}^{(1)}$	Dielektrik sabitler
$\varepsilon_{ij}^{(2)}$	Green şekil değiştirme tensörünün bileşenleri
η	Öngerilmelerin dalga yayılım hızına etkisini gösteren değişken
λ	Lame sabiti
μ	Lame sabiti
ρ	Kütle yoğunluğu
$\sigma_{11}^{(1),0}$	Piezoelektrik katmandaki yatay öngerilme
$\sigma_{11}^{(2),0}$	Metal yarıdüzlem veya iç katmandaki yatay öngerilme
$\sigma_{22}^{(1),0}$	Düşey öngerilme
σ_{ij}	Gerilme tensörü bileşenleri
φ	Elektrik potansiyeli
Φ	Murnaghan potansiyeli
ψ	Boyutsuz öngerilme şiddeti
ω	Açısal frekans

KISALTMA LİSTESİ

FDM	Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme (FGM)
IDE	Interdigital Electrode
PZT	Kurşun Zirkonat Titanat ($PbZr_{0.52}Ti_{0.48}O_3$)
SAW	Surface Acoustic Waves (Yüzey Akustik Dalgaları)

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 Piezoelektrik katman ve metal yarıdüzlemden oluşan öngerilmeli sistem 15
Şekil 2.2 PZT-4/Alüminyum sistemi için piezoelektriklik özelliğinin dispersiyon eğrilerine etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 44
Şekil 2.3 PZT-4/Çelik sistemi için piezoelektriklik özelliğinin dispersiyon eğrilerine etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 45
Şekil 2.4 PZT-6B/Çelik sistemi için piezoelektriklik özelliğinin dispersiyon eğrilerine etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 45
Şekil 2.5 PZT-6B/Çelik sistemi için katmandaki yatay çekme öngerilmesinin birinci (a), ikinci (b), üçüncü (c), dördüncü (d) mod dispersiyon eğrilerine etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 46
Şekil 2.6 PZT-6B/Çelik sistemi için üçüncü derece elastik sabitler hesaba katılmadığında yarıdüzlemdeki yatay çekme öngerilmesinin birinci (a), ikinci (b), üçüncü (c), dördüncü (d) mod dispersiyon eğrilerine etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 47
Şekil 2.7 PZT-6B/Çelik sistemi için üçüncü derece elastik sabitler hesaba katılmadığında yarıdüzlemdeki yatay basma öngerilmesinin birinci (a), ikinci (b), üçüncü (c), dördüncü (d) mod dispersiyon eğrilerine etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 48
Şekil 2.8 PZT-6B/Çelik sistemi için üçüncü derece elastik sabitler hesaba katıldığında yarıdüzlemdeki yatay çekme öngerilmesinin birinci (a), ikinci (b), üçüncü (c), dördüncü (d) mod dispersiyon eğrilerine etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 49
Şekil 2.9 PZT-4/Alüminyum sistemi için açık ve kısa devre elektrot durumlarının dispersiyon eğrilerine etkisi (—— kısa devre elektrot, - - - - açık devre elektrot) 50
Şekil 2.10 PZT-4/Çelik sistemi için açık ve kısa devre elektrot durumlarının dispersiyon eğrilerine etkisi (—— kısa devre elektrot, - - - - açık devre elektrot) 50
Şekil 2.11 PZT-6B/Çelik sistemi için açık ve kısa devre elektrot durumlarının dispersiyon eğrilerine etkisi (—— kısa devre elektrot, - - - - açık devre elektrot) 51
Şekil 2.12 PZT-2/Alüminyum sistemi için polarizasyon doğrultusunun dispersiyon eğrilerine etkisi (1-piezoelektriklik özelliği var ve polarizasyon

doğrultusu Ox_2, 2- piezoelektriklik özelliği var ve polarizasyon doğrultusu Ox_1, 3-piezoelektriklik özelliği yok ve simetri ekseni Ox_2, 4-piezoelektriklik özelliği yok ve simetri ekseni Ox_1) 52
Şekil 2.13 PZT-2/Çelik sistemi için polarizasyon doğrultusunun dispersiyon eğrilerine etkisi (1-piezoelektriklik özelliği var ve polarizasyon doğrultusu Ox_2, 2- piezoelektriklik özelliği var ve polarizasyon doğrultusu Ox_1, 3-piezoelektriklik özelliği yok ve simetri ekseni Ox_2, 4-piezoelektriklik özelliği yok ve simetri ekseni Ox_1) 53
Şekil 2.14 PZT-4/Çelik sistemi için polarizasyon doğrultusunun dispersiyon eğrilerine etkisi (1-piezoelektriklik özelliği var ve polarizasyon doğrultusu Ox_2, 2- piezoelektriklik özelliği var ve polarizasyon doğrultusu Ox_1, 3-piezoelektriklik özelliği yok ve simetri ekseni Ox_2, 4-piezoelektriklik özelliği yok ve simetri ekseni Ox_1) 54
Şekil 2.15 PZT-6B/Çelik sistemi için polarizasyon doğrultusunun dispersiyon eğrilerine etkisi (1-piezoelektriklik özelliği var ve polarizasyon doğrultusu Ox_2, 2- piezoelektriklik özelliği var ve polarizasyon doğrultusu Ox_1, 3-piezoelektriklik özelliği yok ve simetri ekseni Ox_2, 4-piezoelektriklik özelliği yok ve simetri ekseni Ox_1) 54
Şekil 2.16 PZT-4/Çelik sistemi için katmandaki yatay çekme öngerilmesinin birinci (a), ikinci (b), üçüncü (c), dördüncü (d) mod dispersiyon eğrilerine etkisi (—— polarizasyon doğrultusu Ox_2, - - - - polarizasyon doğrultusu Ox_1) 55
Şekil 2.17 PZT-4/Çelik sistemi için üçüncü derece elastik sabitler hesaba katılmadığında yarıdüzlemdeki yatay çekme öngerilmesinin birinci (a), ikinci (b), üçüncü (c), dördüncü (d) mod dispersiyon eğrilerine etkisi (—— polarizasyon doğrultusu Ox_2, - - - - polarizasyon doğrultusu Ox_1) 56
Şekil 2.18 PZT-4/Çelik sistemi için üçüncü derece elastik sabitler hesaba katılmadığında yarıdüzlemdeki yatay basma öngerilmesinin birinci (a), ikinci (b), üçüncü (c), dördüncü (d) mod dispersiyon eğrilerine etkisi (—— polarizasyon doğrultusu Ox_2, - - - - polarizasyon doğrultusu Ox_1) 57
Şekil 2.19 PZT-4/Çelik sistemi için üçüncü derece elastik sabitler hesaba katıldığında yarıdüzlemdeki yatay çekme öngerilmesinin birinci (a), ikinci (b), üçüncü (c), dördüncü (d) mod dispersiyon eğrilerine etkisi (—— polarizasyon doğrultusu Ox_2, - - - - polarizasyon doğrultusu Ox_1) 58
Şekil 2.20 PZT-6B/Çelik sistemi için üçüncü derece elastik sabitler hesaba katılmadığında düşey çekme öngerilmesinin birinci (a), ikinci (b), üçüncü (c), dördüncü (d) mod dispersiyon eğrilerine etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 59
Şekil 2.21 PZT-6B/Çelik sistemi için üçüncü derece elastik sabitler hesaba katılmadığında düşey basma öngerilmesinin birinci (a), ikinci (b), üçüncü (c), dördüncü (d) mod dispersiyon eğrilerine etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 60
Şekil 2.22 PZT-6B/Çelik sistemi için üçüncü derece elastik sabitler hesaba katıldığında düşey çekme öngerilmesinin birinci (a), ikinci (b), üçüncü (c), dördüncü (d) mod dispersiyon eğrilerine etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 61

Şekil 3.1 Piezoelektrik katman ve metal yarıdüzlemden oluşan öngerilmeli sistem 63
Şekil 3.2 Simetrik (a), asimetrik (b) mod Lamb dalgalarının yayılımında katman yüzeyi şekil değiştirmeleri 77
Şekil 3.3 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için piezoelektriklik özelliğinin simetrik birinci mod dispersiyon eğrilerine etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 85
Şekil 3.4 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için piezoelektriklik özelliğinin simetrik ikinci mod dispersiyon eğrilerine etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 86
Şekil 3.5 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için piezoelektriklik özelliğinin asimetrik birinci mod dispersiyon eğrilerine etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 86
Şekil 3.6 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için piezoelektriklik özelliğinin asimetrik ikinci mod dispersiyon eğrilerine etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 87
Şekil 3.7 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için H_{PZT}/H_{metal}=4 durumunda piezoelektriklik özelliğinin dispersiyon eğrilerine etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) (1- Simetrik birinci mod, 2- Simetrik ikinci mod, 3- Asimetrik birinci mod, 4- Asimetrik ikinci mod) 88
Şekil 3.8 PZT-2/Alüminyum/PZT-2 sistemi için H_{PZT}/H_{metal}=4 durumunda piezoelektriklik özelliğinin dispersiyon eğrilerine etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) (1- Simetrik birinci mod, 2- Simetrik ikinci mod, 3- Asimetrik birinci mod, 4- Asimetrik ikinci mod) 88
Şekil 3.9 PZT-6B/Çelik/PZT-6B sistemi için H_{PZT}/H_{metal}=4 durumunda piezoelektriklik özelliğinin dispersiyon eğrilerine etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) (1- Simetrik birinci mod, 2- Simetrik ikinci mod, 3- Asimetrik birinci mod, 4- Asimetrik ikinci mod) 89
Şekil 3.10 PZT-6B/Alüminyum/PZT-6B sistemi için H_{PZT}/H_{metal}=4 durumunda piezoelektriklik özelliğinin dispersiyon eğrilerine etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) (1- Simetrik birinci mod, 2- Simetrik ikinci mod, 3- Asimetrik birinci mod, 4- Asimetrik ikinci mod) 89
Şekil 3.11 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için dış katmanlardaki çekme öngerilmesinin simetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 90
Şekil 3.12 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için üçüncü derece elastik sabitler hesaba katılmadığında iç katmandaki çekme öngerilmesinin simetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 90
Şekil 3.13 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için üçüncü derece elastik sabitler hesaba katılmadığında iç katmandaki basma öngerilmesinin simetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b),

H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 91
Şekil 3.14 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için üçüncü derece elastik sabitler hesaba katıldığında iç katmandaki çekme öngerilmesinin simetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 91
Şekil 3.15 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için dış katmanlardaki çekme öngerilmesinin asimetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 92
Şekil 3.16 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için üçüncü derece elastik sabitler hesaba katılmadığında iç katmandaki çekme öngerilmesinin asimetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 92
Şekil 3.17 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için üçüncü derece elastik sabitler hesaba katılmadığında iç katmandaki basma öngerilmesinin asimetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 93
Şekil 3.18 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için üçüncü derece elastik sabitler hesaba katıldığında iç katmandaki çekme öngerilmesinin asimetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 93
Şekil 3.19 PZT-2/Alüminyum/PZT-2 sistemi için dış katmanlardaki çekme öngerilmesinin simetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 94
Şekil 3.20 PZT-2/Alüminyum/PZT-2 sistemi için dış katmanlardaki çekme öngerilmesinin asimetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 94
Şekil 3.21 PZT-6B/Çelik/PZT-6B sistemi için dış katmanlardaki çekme öngerilmesinin simetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 95
Şekil 3.22 PZT-6B/Çelik/PZT-6B sistemi için dış katmanlardaki çekme öngerilmesinin asimetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 95
Şekil 3.23 PZT-6B/Alüminyum/PZT-6B sistemi için dış katmanlardaki çekme öngerilmesinin simetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına

H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 95
Şekil 3.24 PZT-6B/Alüminyum/PZT-6B sistemi için dış katmanlardaki çekme öngerilmesinin asimetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 96
Şekil 3.25 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için dış katmanlardaki çekme öngerilmesinin simetrik ikinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 96
Şekil 3.26 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için üçüncü derece elastik sabitler hesaba katılmadığında iç katmandaki çekme öngerilmesinin simetrik ikinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 96
Şekil 3.27 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için üçüncü derece elastik sabitler hesaba katıldığında iç katmandaki çekme öngerilmesinin simetrik ikinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 97
Şekil 3.28 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için dış katmanlardaki çekme öngerilmesinin asimetrik ikinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 97
Şekil 3.29 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için üçüncü derece elastik sabitler hesaba katılmadığında iç katmandaki çekme öngerilmesinin asimetrik ikinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 97
Şekil 3.30 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için üçüncü derece elastik sabitler hesaba katıldığında iç katmandaki çekme öngerilmesinin asimetrik ikinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 98
Şekil 3.31 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için $F_1 = F_2 \geq 0$ şeklindeki ideal olmayan temas koşullarının simetrik birinci mod dispersiyon eğrilerine H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 99
Şekil 3.32 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için $F_1 = F_2 \geq 0$ şeklindeki ideal olmayan temas koşullarının asimetrik birinci mod dispersiyon eğrilerine H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 100

Şekil 3.33 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için $F_1 \geq 0$, $F_2 = 0$ şeklindeki ideal olmayan temas koşullarının simetrik birinci mod dispersiyon eğrilerine H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 101
Şekil 3.34 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için $F_1 \geq 0$, $F_2 = 0$ şeklindeki ideal olmayan temas koşullarının asimetrik birinci mod dispersiyon eğrilerine H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 102
Şekil 3.35 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için $F_1 = F_2 \geq 0$ şeklindeki ideal olmayan temas koşullarının simetrik ikinci mod dispersiyon eğrilerine H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 103
Şekil 3.36 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için $F_1 = F_2 \geq 0$ şeklindeki ideal olmayan temas koşullarının asimetrik ikinci mod dispersiyon eğrilerine H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 103
Şekil 3.37 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için $F_1 \geq 0$, $F_2 = 0$ şeklindeki ideal olmayan temas koşullarının simetrik ikinci mod dispersiyon eğrilerine H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 104
Şekil 3.38 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için $F_1 \geq 0$, $F_2 = 0$ şeklindeki ideal olmayan temas koşullarının asimetrik ikinci mod dispersiyon eğrilerine H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 104
Şekil 3.39 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için $F_1 = F_2 \geq 0$ şeklindeki ideal olmayan temas koşullarının yüksek kH değerlerinde simetrik birinci mod (a), simetrik ikinci mod (b), asimetrik birinci mod (c), asimetrik ikinci mod (d) dispersiyon eğrilerine H_{PZT}/H_{metal}=4 durumunda etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 105
Şekil 3.40 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için $F_1 \geq 0$, $F_2 = 0$ şeklindeki ideal olmayan temas koşullarının yüksek kH değerlerinde simetrik birinci mod (a), simetrik ikinci mod (b), asimetrik birinci mod (c), asimetrik ikinci mod (d) dispersiyon eğrilerine H_{PZT}/H_{metal}=4 durumunda etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) 105

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 2.1 Malzemelerin elastik, piezoelektrik ve dielektrik özellikleri..... 41

ÖZET

PİEZOELEKTRİK KATMANLI ÖNGERİLMELİ SİSTEMLERDE YÜZEY VE LAMB DALGALARININ DİSPERSİYONU

İlkay KURT

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Semih SEZER

Eş Danışman: Prof. Dr. Surkay D. AKBAROV

Öngerilmeli piezoelektrik katman ve öngerilmeli yarıdüzlemden oluşan bir sistemde piezoelektriklik özelliğinin, piezoelektrik katmanın polarizasyon doğrultusunun ve sistem bileşenlerindeki öngerilmelerin yüzey dalgalarının dispersiyonuna etkileri araştırılmıştır. Ayrıca iki öngerilmeli piezoelektrik dış katman ve bir öngerilmeli metal dış katmandan oluşan sandviç plakta piezoelektriklik özelliğinin, öngerilmelerin ve katmanlar arasında ideal olmayan temas koşullarının simetrik ve asimetrik mod Lamb dalgalarının dispersiyonuna etkileri araştırılmıştır.

Çalışmalar parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde öngerilmeli ortamlarda üç boyutlu doğrusallaştırılmış elastik dalga teorisi ve doğrusal piezoelektriklik teorisi kullanılarak düzlem şekil değiştirme durumunda yapılmaktadır. Metal yarıdüzlem malzemesinin elastiklik bağıntıları üçüncü derece elastik sabitleri içeren Murnaghan potansiyeli ile verilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Simetrik ve asimetrik mod Lamb dalgaları, yüzey dalgaları, dalgaların dispersiyonu, piezoelektrik malzeme, sandviç plak, öngerilme, üçüncü derece elastik sabitler

ABSTRACT

NEAR SURFACE AND LAMB WAVE DISPERSION IN THE PIEZOELECTRIC LAYERED PRE-STRESSED SYSTEMS

İlkay KURT

Department of Mechanical Engineering

PhD. Thesis

Adviser: Assoc. Prof. Dr. Semih SEZER

Co-Adviser: Prof. Dr. Surkay D. AKBAROV

The effects of the piezoelectricity and polarization direction of the piezoelectric layer and initial stresses of the constituents of the system on the near-surface waves dispersion are investigated in a system consisting of a pre-stressed piezoelectric covering layer and a pre-stressed metal half-plane. In addition the effects of the piezoelectricity, initial stresses and imperfectness of the contact conditions between the layers on the extensional and flexural Lamb waves dispersion are investigated in a sandwich plate consisting of two pre-stressed piezoelectric face layers and a pre-stressed metal elastic core layer.

The studies are carried out within the scope of the piecewise homogeneous body model by utilizing the three-dimensional linearized theory of the elastic waves and linear theory of piezoelectricity in initially stressed bodies in the plane strain state. The elasticity relations of the metal half-plane material are described by the Murnaghan potential including third order elastic constants.

Keywords: Extensional and flexural Lamb waves, near-surface waves, wave dispersion, piezoelectric material, sandwich plate, initial stress, third order elastic constants

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Piezoelektrik malzemeler transduser tasarımında, sonar uygulamalarında, tıbbi ultrasonik cihazlarda, robot dokunsal sensörlerinde, hava yastığı sensörlerinde ve kuvvetölçerler gibi pek çok farklı alanda kullanılmaktadırlar (Rao ve Sunar [1]). Otomasyon, kontrol sistemleri, ölçüm ve muayene gibi alanlarda çokça kullanılan elektromekanik transduserler elektrik gerilimi ve mekanik hareket arasında dönüşüm yaparlar. Transduserler temel olarak kalın bir elastik destek katmanı üzerinde ince bir piezoelektrik katman bulunduran sistemlerdir (Cortes ve Mukdadi [2]). Rezonatör, filtre ve gecikme hattı gibi üzerinde yüzey dalgalarının yayıldığı piezoelektrik katmandan oluşan yüzey akustik dalga (SAW) cihazları, radar, kablosuz iletişim ve televizyon gibi elektronik endüstrisinde yoğun olarak kullanılmaktadır (Shen vd. [3]).

Piezoelektrik mekanik rezonatörler bir yüzey üzerine yapıştırılarak yüksek doğruluktaki frekanslarda mekanik dalgalar üretebilirler. Yüzey akustik dalga sensörleri ise verilen elektrik sinyalini piezoelektriklik özelliği ile mekanik dalgalara dönüştürürler. Bulundukları yüzey üzerinde yayılan bu dalgalar incelenen malzemenin fiziksel özelliklerden dolayı değişime uğrayarak ters piezoelektriklik özelliği ile sensör elektrotları arasında elektrik gerilimi oluştururlar. Sensördeki giriş ve çıkış elektrik sinyali arasındaki genlik, faz, frekans değişimi ve zaman gecikmesi istenen fiziksel özelliğin ölçülmesinde kullanılabilmektedir. Tahribatsız muayene türleri içerisinde yaygın uygulama alanı bulmaktadır ve genellikle ultrasonik Rayleigh-Lamb dalgaları kullanılarak katmandaki elastik sabitlerin ölçümünde kullanılır. Malzeme üzerindeki transduserin açısı ve frekansı ayarlanarak istenen modda yüzey dalgaları oluşturulabilir (Rogers [4]).

Ultrasonik muayene ile mekanik dalgalar kullanılarak yaygın olarak kalınlık ölçümü yapılmaktadır. Yönlendirilmiş dalgalar ile bir noktadan yüzlerce metre uzaklığa kadar boru hattı, demiryolu hattı, çubuk ve plaklar gibi yapılarda muayene yapılabilmektedir. Bu dalgalar kullanım alanlarına göre farklı modlarda oluşturulurlar. Bunlar enine, boyuna veya burulma dalgaları olabilir. Örneğin Lamb dalgaları ince plaklarda üst ve alt yüzeyler arasında uzun mesafeler boyunca yayılabilmekte ve plak benzeri yapı malzemesi hakkında bilgi taşıyabilmektedir. Ayrıca çok katmanlı yapılarda malzeme iç kusurlarını tespit etmede Lamb dalgaları kullanılmaktadır. Lamb dalgalarının farklı modları farklı katmanlardaki veya derinliklerdeki kusurları tespit etmede kullanılır (Kundu vd. [5]). Malzemelerdeki kusur, kusurlu ve kusursuz numunedeki Lamb dalgalarının yayılım hız farkından ve Lamb dalgalarının genliklerinin uğradığı kayıp farkından bulunur (Pant vd. [6]).

Bu ölçümlerde piezoelektrik katmanlar numunelerin üzerine bağlanmaktadır. Ölçümlerde doğru sonuçlar çıkarabilmek için katmanlı sistemlerde dalgaların yayılımı ile ilgili teorik sonuçlar elde edilmeli ve incelenen yapı elamanı üzerindeki piezoelektrik katmanın dalgaların yayılımına etkileri bilinmelidir. Ayrıca yapı elemanlarındaki artık gerilmeleri tespit etmek için de yüzey dalgaları kullanılabilmektedir. Öngerilmeler veya artık gerilmeler malzemelerin ısıl genleşmelerinden, malzeme performansını geliştirmek için istenerek veya malzeme üretimi ve montajı sırasında istenmeden yapı elemanlarında oluşabilmektedir. Dolayısıyla piezoelektriklik özelliğinin ve öngerilmelerin yüzey dalgalarının yayılım hızına etkileri de elde bulunması gereken teorik hesaplara ilave edilmelidir. Ayrıca farklı piezoelektrik katman malzemelerinin yüzey dalgalarının yayılım hızına etkileri de uygulama açısından önemli olabilir. Metal yapı elemanındaki gerilmeleri daha iyi ortaya çıkarabilecek piezoelektrik katman seçimi, farklı katman malzemeleri için öngerilmelerin yüzey dalgalarındaki etkileri elde edilerek yapılabilir. Buna ilave olarak piezoelektrik katman polarizasyon doğrultusunun ve elektrotlarının sınır şartlarının (açık ve kısa devre durumu) yüzey dalgalarının yayılımına etkileri elde edilmelidir. Piezoelektrik malzemenin elektrotları bir iletken ile birleştirildiğinde ya da piezoelektrik malzeme iletken bir ortamda bulunduğunda elektrotlarda elektrik potansiyeli sıfır olacaktır ve bu duruma elektriksel kısa (kapalı) devre denmektedir. Diğer taraftan piezoelektrik malzemenin elektrotları birbirlerinden izole edildiğinde elektrotlardaki elektrik yer değiştirme sıfır olacaktır ve bu duruma elektriksel açık devre denmektedir.

Rayleigh tipi yüzey dalgaları ile Lamb dalgaları arasındaki fark dalga yayılım karakterini etkileyen sınır şartlardan kaynaklanmaktadır. Rayleigh tipi yüzey dalgaları katmanlı yarıdüzlem gibi tek yüzey sınırı bulunan ortamlarda yayılabilirken, Lamb dalgaları çok katmanlı sistemler gibi birbirlerine yakın ve paralel iki serbest sınır boyunca yönlendirilerek yayılabilmektedir (Pant vd. [6]).

Bu tez çalışmasında, piezoelektrik katmanlı sistemlerde piezoelektriklik özelliğinin, elektriksel sınır şartların ve öngerilmelerin yüzey dalgalarının dispersiyonuna etkileri incelenmiştir. Problemlerin matematiksel formülasyonları öngerilmeli ortamlarda üç boyutlu doğrusal elastik dalga teorisi ve piezoelektriklik teorisi kullanılarak yapılmıştır.

1.1 Literatür Özeti

Yarıdüzlem ve katmandan oluşan sistemlerde yüzey dalgalarının dispersiyonu ile ilgili öncü teorik araştırmalar Tolstoy ve Usdin [7], Achenbach ve Epstein [8], Eringen ve Suhubi [9] tarafından yapılmıştır.

Wu ve Chang [10], piezoelektrik katman ve onu çevreleyen biri katı diğeri sıvı iki yarıdüzlemden oluşan sistemde yüzey dalgalarının dispersiyonunu elde etmiş ve dalga yayılım hızına viskozitenin, frekansın ve malzeme seçiminin etkilerini incelemişlerdir. Yalnızca yarıdüzlemden oluşan sistemde yüzey dalgalarının yayılım hızının frekans ile değişmeyip sabit olduğunu (dispersiv olmadığını) göstermiştir. Diğer taraftan Cao vd. [11], enine yüzey dalgalarının sadece katmanlı sistemlerde değil fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden (FDM) yarıdüzlemde de, enine dalga yayılım hızı yüzeyde daha düşük olduğunda, dispersiv olduğunu göstermişlerdir. Salah ve Njeh [12] de fonksiyonel derecelendirilmiş piezoelektrik yarıdüzlemde Rayleigh tipi yüzey dalgalarının dispersiyon eğrilerini elektriksel açık ve kısa devre durumlarında elde etmişlerdir. Qian vd. [13], fonksiyonel derecelendirilmiş piezoelektrik yarıdüzlemde üstel derecelendirmenin enine yüzey dalgalarının dispersiv özelliklerine etkisini incelemişlerdir. Derecelendirme katsayısı sıfırken (homojen yarıdüzlem) dispersiv özellik bulunmuyorken sıfırdan farklı değerlerinde dalgaların yayılımı dispersiv özellik göstermektedir. Elektriksel kısa devre durumunda derecelendirme katsayısının dalgaların yayılım hızına etkisinin açık devre durumuna göre daha belirgin olduğu belirtilmiştir. Ayrıca Jin vd. [14], fonksiyonel derecelendirilmiş piezoelektrik yarıdüzlem üzerinde dielektrik katman bulunduğunda enine yüzey dalgalarının

derecelendirme katsayısı sıfırken de dispersiv özelliğe sahip olduğunu ve derecelendirme katsayısının işaretinin oldukça önemli olduğunu göstermişlerdir. Qian vd. [15], fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden katman ve piezoelektrik yarıdüzlemden oluşan sistemde derecelendirme katsayısının enine yüzey dalgalarının yayılım hızına etkilerini incelemişlerdir. Kayma modülü derecelendirme katsayısı arttığında katmanın homojen olduğu duruma kıyasla dalga yayılım hızı düşerken, kütle yoğunluğu derecelendirme katsayısı arttığında katmanın homojen olduğu duruma kıyasla dalga yayılım hızı artmaktadır. Diğer taraftan derecelendirme katsayılarının boyutsuz dalga sayısı sıfıra yaklaşırken dalga yayılım hızının ulaşacağı değeri değiştirmediği görülmektedir.

Wu ve Chen [16], silisyum yarıdüzdem ve üzerinde iki piezoelektrik katmandan oluşan sistemde ve silisyum yarıdüzlem olmadan iki piezoelektrik katmandan oluşan sistemde ilk iki mod yüzey dalgalarının dispersiyon eğrilerini elde etmişlerdir. Dispersiyon eğrileri faz hızı ve *f.h* (frekans ile üst piezoelektrik katman kalınlığı çarpımı) arasındaki ilişki ile verilmiştir. *f.h* çarpımının belirli bir değerinden sonra incelenen iki sistem için de dispersiyon eğrilerinin her iki modda birbirlerine çok yaklaştığını göstermişlerdir. Dolayısıyla alttaki piezoelektrik katmanın *f.h* çarpımının yeterince yüksek değerlerinde yarıdüzlem olarak kabul edilebileceğini belirtmişlerdir. Ayrıca katman kalınlığı dalga boyundan yeterince büyükse de katman yarıdüzlem olarak kabul edilir (Cao vd. [11]).

Akbarov ve İlhan [17], üzerinde noktasal harmonik kuvvet bulunan piezoelektrik katman ve yarıdüzlemden oluşan sistemde Lamb dalgalarını incelemişlerdir. Sistem bileşenlerine ait piezoelektriklik özelliğinin temas yüzeyindeki gerilmelere etkisi ve katman kalınlığı boyunca elektrik potansiyelinin dağılımı elde edilmiştir.

Li vd. [18], elastik bir cisim üzerine yapıştırılmış piezoelektrik transduserin üreteceği akustik enine dalgalara arayüzeydeki yapıştırıcının etkilerini araştırmışlardır. Sistem modeli elastik yarıdüzlem üzerine yapıştırılmış piezoelektrik katman olarak kurulmuştur. Sistem bileşenleri arasında ideal olmayan temas koşullarının enine dalgalara etkisi incelenmiştir. Aynı sistem için Liu vd. [19], enine yatay dalgalarının yayılım hızının temas yüzeyindeki idealsizlik derecesi arttıkça düştüğünü ve piezoelektrik malzeme özelliklerinin dispersiyon eğrilerine önemli etkisini göstermişlerdir.

Cortes ve Mukdadi [2] elastik izotrop yarıdüzlem ve piezoelektrik katmandan oluşan sistem ile biri katı diğeri sıvı iki yarıdüzlem ve piezoelektrik katmandan oluşan sistemde simetrik ve asimetrik mod Lamb dalgalarının üç boyutlu dispersiyon eğrilerini sistem vakumda, havada ve suda olduğu durumlarda elde etmiştir. Dispersiyon eğrilerini üsteki sıvı yarıdüzlemin fazla etkilemediğini, alttaki elastik katı yarıdüzlemin (transduser destek katmanı) ise oldukça fazla etkilediğini belirtmişlerdir. Benzer çalışmalar biri piezoelektrik diğeri dielektrik iki yarıdüzlem arasında vakum bulunan sistem için de yapılmış, yüzey dalgalarının dispersiyon eğrileri elde edilmiştir (Danoyan vd. [20]). Ayrıca Chen vd. [21], iki piezoelektrik yarıdüzlem arasında piezoelektrik katman bulunan sistemde ideal olmayan temas koşulları durumunda enine yatay dalgaların dispersiyon eğrilerini elde etmişlerdir. Benzer olarak Liu vd. [22], piezomanyetik tabaka ve onu çevreleyen piezoelektrik iki yarıdüzlemden oluşan sistemde enine yatay dalgalarının dispersiv özelliğini araştırmışlardır.

Sharma vd. [23], piezoelektrik yarıdüzlem ve yarıiletken katmandan oluşan sistemde yüzey dalgalarının yayılım hızını elektriksel açık ve kısa devre durumlarında incelemişlerdir. Kısa devre sınır şartı durumunda yüzey dalgalarının yayılım hızının açık devre olduğu duruma göre daha yüksek olduğu belirtilmiştir. Fan vd. [24] ise piezoelektrik yarıdüzlem ve metal katmandan oluşan sistemde arayüzeydeki temas koşullarının ideal olmadığı durumda, idealsizlik derecesinin yüzey dalgalarının yayılım hızına etkilerini incelemiş ve dalga hızını düşürdüğünü belirtmişlerdir.

Mikroakışkanlar çok küçük hacimli hareketi kontrol edilebilir akışkanlardır. Katı yüzeyler üzerinde büyük doğrulukla akışkan damlacıkları elastik titreşim dalgaları ile hareket ettirilebilir. Sıvı yüzeyine çarpacak akustik dalgalar ile akışkan damlacıkları oluşturulabilir ve bunlar püskürtülebilir. Ayrıca asimetrik mod Lamb dalgalarının mikroakışkan pompalamasında etkili olduğu belirtilmiştir (Moroney vd. [25]). Bu amaçla Darinskii ve Weihnacht [26], iki piezoelektrik yarıdüzlem arasında sıvı katman bulunan bir sistemde akustik yüzey dalgalarının üretilmesi ve dalgaların yayılımının pompalama etkinliği üzerindeki etkinliğini incelemişlerdir.

Pang vd. [27], piezoelektrik katman ve piezomanyetik yarıdüzlemden oluşan sistemde Rayleigh tipi yüzey dalgalarının dispersiyon eğrilerini elektriksel açık ve kısa devre durumlarında elde etmişlerdir. Mekanik yer değiştirmelerin ve elektrik potansiyelinin katman kalınlığı boyunca dağılımlarını elde etmişlerdir. Piezoelektrik malzeme

özelliklerinin dalga yayılımı üzerindeki önemli etkisini belirtmişlerdir. Ayrıca elektriksel açık devre durumunda dalga yayılım hızının küçük farkla daha fazla olduğunu göstermişlerdir. Ezzin vd. [28] de aynı sistemde Love dalgalarının dispersiyonunu araştırmışlardır. Wei vd. [29], incelenen bu sistemi vakumda iken enine yatay dalgalarının dispersiyon eğrilerini elde etmişlerdir. İnceledikleri sistemde dalga yayılım hızının piezomanyetik yarıdüzlemin enine dalga yayılım hızından küçük ve piezoelektrik katmanınkinden ise büyük olduğundan sistemde yayılan dalgaların Love tipi enine dalgalar olduğunu belirtmişlerdir. Liu vd. [30], katman malzemesi piezomanyetik ve yarıdüzlem malzemesi piezoelektrik olarak değiştiğinde küçük boyutsuz dalga sayısı değerlerinde piezoelektrik malzeme özelliklerinin Love dalgalarının yayılım hızına önemli etkisi olduğunu göstermişlerdir.

Gaur ve Rana [31], yapışık iki piezoelektrik katmanda enine dalgaların dispersiyon eğrilerini yayılım doğrultusu arayüzey boyunca ve buna dik doğrultuda incelemişlerdir. Boyutsuz dalga sayısı ve boyutsuz frekans arasındaki ilişkiyi araştırmış ve katman kalınlığının ve elastik sabitlerin dalga yayılım hızına önemli etkisini vurgulamışlardır.

Zhang vd. [32], nano boyutlu piezoelektrik katman ve alüminyum yarıdüzlemden oluşan sistemde elektriksel kısa devre durumunda yüzey etkilerinin Love dalgalarının dispersiyon eğrilerine etkilerini incelemişlerdir. Film kalınlığı nano boyutlara küçüldüğünde dispersiyon eğrilerinde katman kalınlığına ve yüzey sabitlerine bağlı olarak büyük değişimler tespit edilmiştir. Manna vd. [33], benzer sistemde homojen olmayan elastik yarıdüzlem için Love dalgalarını elektriksel açık ve kısa devre durumlarında incelemişlerdir. Katman malzemesinin dielektrik sabitlerindeki artışın Love dalgalarının yayılım hızını arttırdığını, piezoelektrik sabitlerdeki artışın ise Love dalgalarının yayılım hızını azalttığını belirtmişlerdir.

Kong vd. [34], elastik yarıdüzlem üzerindeki piezoelektrik katman malzemesinin keyfi kesme yönü için Love dalgalarının dispersiyon denklemini koordinat dönüşümü ile elde etmişlerdir. Singh vd. [35], piezoelektrik yarıdüzlem ve düzgün olmayan piezoelektrik katman için arayüzeydeki düzgünsüzlüğü tanımlayarak Love dalgalarını incelemişlerdir. Düzgünsüzlük arttığında Love dalgalarının yayılım hızının azaldığını belirtmişlerdir.

Li vd. [36], piezoelektrik katman ve elastik yarıdüzdem arasında bulunan yumuşak (enine dalga yayılım hızı piezoelektrik katmandan daha düşük) bir elastik katmanın Love dalgalarının yayılım hızına etkilerini incelemişlerdir. Yumuşak katman kalınlığı

arttıkça Love dalgalarının yayılım hızının düştüğünü ancak boyutsuz dalga sayısı sıfıra ve sonsuza giderken dalga hızının yaklaşacağı değerlerin yumuşak katmanın varlığından etkilenmediğini göstermişlerdir. Piliposian ve Danoyan [37] ise piezoelektrik yarıdüzlem üzerinde izotrop katman bulunan sistemin üzerine bir katman daha ilave edildiğinde bunun Love dalgalarının yayılım davranışına etkilerini incelemişlerdir. İlave katman tüm modlarda Love dalgalarının dispersiv özelliğini etkilerken ilk moda etkisinin önemli derecede fazla olduğunu vurgulamışlardır. Fakat katman ince ve sert olduğunda etkisinin çok az olduğu belirtilmiştir.

Qian vd. [38], piezoelektrik katman ve metal yarıdüzlemden oluşan sistemde piezoelektriklik özelliğine ve piezoelektrik katmanın elektriksel açık veya kısa devre olması durumuna bağlı olarak enine yüzey dalgalarının yayılımında farklı modların oluşabileceğini göstermişlerdir.

Jin vd. [39], piezoelektrik katman ve metal yarıdüzlemden oluşan sistemde yüzey dalgalarının dispersiyon eğrilerini elde etmişlerdir. Piezoelektrik katmanın kalınlığı boyunca farklı boyutsuz dalga sayısı değerleri için elektrik potansiyeli dağılımı bulunmuştur. Dispersiyon denklemlerini sistem bileşenlerinin enine ve boyuna dalga yayılım hızları aralıklarında ayrı denklemler ile bularak daha basit bir çözüm yolu bulmuşlardır. Bu tezde de piezoelektrik katman için bu çözüm yöntemi uyarlanarak kullanılmıştır. Bu çalışma ve yukarıda verilen tüm çalışmalarda piezoelektrik katman ve yarıdüzlemden oluşan sistemlerde yüzey dalgalarının dispersiyon eğrileri elde edilmiş fakat öngerilmeler hesaba katılmamıştır.

Akbarov ve Özışık [40], öngerilmeler altında metal katman ve metal yarıdüzlemden oluşan sistemde Rayleigh tipi yüzey dalgalarının dispersiyon eğrilerini elde etmişlerdir. Sistem bileşenlerinin bünye denklemleri Murnaghan potansiyeli ile elde edilmiş ve üçüncü derece elastik sabitler hesaba katılarak öngerilmelerin yüzey dalgalarının yayılım hızına etkileri incelenmiştir. Bu tezde de metal yarıdüzlem ve sandviç plak iç katmanı için çözüm yöntemi bu çalışmadan uyarlanarak geliştirilmiştir.

Simionescu ve Ana [41], iki izotrop katmandan oluşan sistem ile bir katman ve bir yarıdüzlemden oluşan sistemde öngerilmelerin Love dalgalarının yayılımına etkisini incelemişlerdir. Bu iki sistem için farklı modlarda Lamb dalgalarının dispersiyon eğrilerindeki değişim incelenmiştir. Her iki sistemde de incelenen tüm modlarda yatay çekme ve düşey basma öngerilmeleri birlikte bulunduğunda dalga yayılım hızı

öngerilmesiz duruma göre düşerken, yatay basma düşey çekme öngerilmeleri birlikte bulunduğunda dalga yayılım hızı öngerilmesiz duruma göre yükselmektedir.

Qian vd. [42], elastik yarıdüzlem ve tam temas halindeki fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden bir katmandan oluşan sistemde öngerilmelerin Love dalgalarının yayılım hızına, katman kalınlığı boyunca mekanik yer değiştirmelerin ve kayma gerilmelerinin dağılımına etkilerini incelemişlerdir. Daha sonra Qian vd. [43], aynı problemi yarıdüzlem malzemesini piezoelektrik alarak ve elektriksel açık ve kısa devre durumlarını dikkate alarak geliştirmişlerdir. Çekme öngerilmelerinin dalga yayılım hızını öngerilmesiz duruma göre arttırdığını, basma öngerilmelerinin ise azalttığını göstermişlerdir. Boyutsuz dalga sayısı sıfıra yaklaşırken dalga hızının aldığı son değer ise öngerilmelerden bağımsızdır. Dalga sayısı katman kalınlığına ve dalga sayısına büyük oranda bağlıdır. Öngerilmelerin dalga hızına bu etkisinden dolayı fonksiyonel derecelendirilmiş malzemenin üretimi sırasında öngerilme yüklenerek dalga yayılım hızının istenen değere ayarlanabileceği belirtilmiştir.

Akbarov vd. [44], öngerilme altında piezoelektrik katman ve piezoelektrik yarıdüzlemden oluşan sistemde öngerilmelerin sistem bileşenleri arayüzeyindeki normal ve kayma gerilmelerine etkilerini incelemişlerdir.

Wang vd. [45], piezoelektrik katmanlı periyodik sistemlerde öngerilmelerin Rayleigh tipi yüzey dalgalarındaki lokalizasyon özelliğine etkilerini incelemişlerdir. Öngerilmelerin ve piezoelektriklik özelliğinin dalgaların lokalizasyonunu güçlendirdiğini ve lokalizasyon karakterinin frekans düzleminde öngerilme ile ayarlanabilmesinin uygulama açısından önemini belirtmişlerdir.

Singh [46], piezoelektrik yarıdüzlemde enine ve boyuna yüzey dalgalarında geliş açısına göre yansıyan dalgaların hızlarını ve öngerilmelerin, transversal izotrop ve piezoelektriklik özelliğinin bu hızlara etkilerini incelemiştir. Sonuçta her iki dalga hızını da öngerilmelerin arttırdığını belirtmiştir.

Gupta vd. [47], heterojen katman ve yarıdüzlemden oluşan öngerilmeli sistemde burulma dalgalarının dispersiyonunu elde etmişlerdir. Yarıdüzlemdeki basma öngerilmesi arttıkça dalga yayılım hızının arttığını, çekme öngerilmesi arttıkça dalga yayılım hızının azaldığını göstermişlerdir. Ayrıca heterojen yoğunluk parametresi yarıdüzlemde arttıkça dalga yayılım hızının düştüğünü, katmanda arttıkça yayılım hızının da arttığını göstermişlerdir. Kundu vd. [48] de sismik araştırmalara katkı

sağlaması amacıyla heterojen katman ve yarıdüzlemden oluşan sistemde nokta kaynağının ve heterojenliğin Love dalgalarına etkilerini incelemişlerdir.

Singh vd. [49], izotrop ve heterojen iki katman ile izotrop yarıdüzlemden oluşan öngerilmeli sistemde Love dalgalarının yayılımını incelemişlerdir. İki katman arasındaki yüzeyde dikdörtgen ve parabol şeklinde iki farklı düzgünsüzlük durumu ele alınmıştır. Yüzey düzgünsüzlüğünün boyutu ve şeklinin, çekme ve basma öngerilmelerinin, heterojenlik parametresinin ve katmanların kalınlıkları oranının dalga yayılım hızına etkileri ele alınmıştır. Chatterjee vd. [50], dünyanın mantosunu ve yerkabuğunu öngerilmeli heterojen katman ve öngerilmeli heterojen yarıdüzlem olarak modelleyerek Love dalgalarının yayılımını incelemiş, öngerilmelerin ve sistem bileşenlerinin heterojenliğinin dalga yayılım hızına etkilerini araştırmışlardır. Bu çalışmayla deprem mühendisliği, sismoloji ve jeoloji gibi alanlarda büyük uygulama alanı bulan, önemli bir çalışma yapmışlardır. Benzer olarak Gupta vd. [51], heterojen katman ve basma öngerilmeli heterojen yarıdüzlemden oluşan sistemde basma öngerilmesindeki artışın Love dalgalarının yayılım hızını düşürdüğünü belirtmişlerdir.

Shekhar ve Parvez [52], homojen yarıdüzlem ve homojen olmayan katmandan oluşan öngerilmeli sistemde katman heterojenliğinin ve öngerilmelerin burulma dalgalarının yayılımına etkisini incelemişlerdir. Heterojen katmanda doğrusal, karesel ve üstel olmak üzere üç türde rijitlik, yoğunluk ve öngerilmeler derinlikle değişmektedir. Burulma dalgalarının yayılım hızı heterojenliğinin üstel değişiminde en yavaşken doğrusal değişiminde en hızlıdır. Her iki sistem bileşeninde basma öngerilmesi bulunduğu varsayılmış ve öngerilmelerin dalga yayılım hızını düşürdüğünü belirtmişlerdir.

Kundu vd. [53], fiber takviyeli anizotrop katman ve basma öngerilmeli ortotrop yarıdüzlemden oluşan sistemde Lamb dalgalarının yayılımını araştırmışlardır. Öngerilme arttığında dalga yayılım hızının düştüğü ve katman malzeme özelliklerinin dispersiyon eğrilerini önemli oranda etkilediği vurgulanmıştır. Benzer olarak Kakar vd. [54], öngerilmeli ortotrop yarıdüzlem üzerinde piezomanyetik katman bulunduğu durumda öngerilmelerin ve katman malzemesinin özelliklerinin enine yatay dalgalarının yayılım hızına etkilerini araştırmışlardır.

Singh vd. [55], ise fiber kompozit katman ve öngerilmeli viskoelastik yarıdüzlemden oluşan sistemde burulma dalgalarının yayılım hızına malzeme özelliklerinin ve öngerilmelerin etkisini incelemişlerdir. Yarıdüzlemdeki basma öngerilmesindeki artış

dalga yayılım hızını arttırırken, çekme öngerilmesindeki artış dalga yayılım hızını azaltmaktadır.

Chattaraj vd. [56], yerçekimi etkisindeki akışkan geçirgenliği bulunan gözenekli yarıdüzlem ve transversal izotrop homojen fiber takviyeli katmandan oluşan öngerilmeli sistemde burulma dalgalarının yayılımını araştırmışlardır. Yarıdüzlemdeki yerçekimi ve katmandaki basma öngerilmesi arttığında dalga yayılım hızı düşmektedir. Pal ve Ghorai [57], basma öngerilmeli kuru kum katman ve yerçekimi altındaki anizotrop gözenekli yarıdüzlemden oluşan sistemde Love dalgalarının yayılımını incelemişlerdir. Yarıdüzlemin yerçekimi parametresi ve gözenekliliği arttıkça Love dalgalarının yayılım hızı düşmektedir. Chattaraj vd. [58] ise basma öngerilmeli kuru kum katman ve basma öngerilmeli heterojen yarıdüzlemden oluşan sistemde heterojenlik, öngerilmeler ve katman kalınlığının burulma dalgalarının yayılım hızına etkilerini araştırmışlardır. Katman kalınlığındaki azalma, katman basma öngerilmesindeki artış dalga yayılım hızını düşürmektedir. Yüksek kalınlıkta kum katman ile yapıların izole edilmesiyle sismik enerjinin azaltılabileceği belirtilmiştir.

Negin vd. [59], elastik katman ve elastik yarıdüzlemden oluşan öngerilmeli sistemde arayüzeydeki ideal olmayan temas koşullarının ve öngerilmelerin genelleştirilmiş Rayleigh dalgalarının yayılım hızına etkilerini, üçüncü derece elastik sabitleri hesaba katarak incelemişlerdir. Bu çalışmada ve öngerilmeli durumda dalga yayılımını araştıran yukarıdaki çalışmalarda piezoelektriklik özelliği hesaba katılmamış ya da yüzey dalgaların dispersiyonu incelenmemiştir. Dolayısıyla önceki çalışmalardan farklı olarak bu tezde ele alınan birinci sistem olan piezoelektrik katman ve metal yarıdüzlemden oluşan öngerilmeli sistemde yüzey dalgaları ele alınmıştır.

Orellana ve Collet [60], üst ve alt yüzeyi ince metal katman ile kaplı (elektrot) piezoelektrik çok katmanlı sandviç plakta enine yatay dalgaların yayılımını incelemiş, katman malzemesinin özelliklerinin ve elektromekanik sınır şartların dispersiyon eğrileri üzerinde büyük etkisi olduğunu belirtmişlerdir. Yang ve Zhou [61] ise kalın piezoelektrik katman ve her iki yüzeyinde ince yarıiletken katman bulunan sandviç plakta enine yatay dalgaların yayılımını inceleyerek, yarıiletkenliğin dispersiyon eğrileri üzerindeki etkilerini araştırmışlardır. Zinchuk ve Levchenko [62], dış yüzeyleri ince metal katman ile kaplı piezoelektrik / dielektrik / piezoelektrik sandviç plakta enine dalgaların dispersiyonunu incelemiş, piezoelektriklik özelliğinin ve katman kalınlıkları

oranının dispersiyon eğrilerine etkilerini göstermişlerdir. Boyutsuz frekans ve boyutsuz dalga sayısı arasındaki dispersiyon ilişkisinde, piezoelektriklik özelliğinin yapısal olarak çok fazla etkisi olmasa da dispersiyon eğrilerini yüksek frekansa doğru kaydırdığını belirtmişlerdir. Pan ve Heyliger [63], basit mesnetli dikdörtgen piezoelektrik / piezomanyetik / piezoelektrik sandviç plakta dalga sayısı ve frekans arasındaki ilişkiyi göstermişlerdir.

Hladky vd. [64], bant söndüren (band stop) filtre tasarımı yapmak üzere silikon kalın katman üzerinde dış yüzeylerinde ince elektrotlar (interdigitated electrodes - IDEs) bulunan periyodik biçimli piezoelektrik sandviç plak modeli kurmuşlardır. Silikon katman üzerinde piezoelektrik katman bulunduğu durum için enine dalgalara ve Rayleigh dalgalarına ait dispersiyon eğrileri elde edilmiştir.

Zhu vd. [65], elastik alt katman üzerinde dış yüzeylerinde elektrotlanmış piezoelektrik katman bulunan sistemde elektrotlu ve elektrotsuz durumlar için dispersiyon eğrileri elde etmiş ve sonuçların birbirlerine yakın olduğunu belirtmişlerdir. Katman kütle oranlarının dispersiyon eğrilerine mod şekilleri açısından çok etkisi yok iken, sabit yüksek atalet titreşim frekansını düşürdüğünden boyutsuz dalga sayısı değerine karşılık boyutsuz frekans değerlerinde düşüşe neden olduğu belirtilmiştir.

Saroj vd. [66], elastik bir alt katman üzerinde fonksiyonel derecelendirilmiş bir piezoelektrik katman ve en üstte öngerilmeli piezoelektrik katman bulunan bir sistemde Love dalgalarının dispersiyonunu incelemişlerdir. Piezoelektrik katmanın elektrotları açık ve kısa devre olduğu iki durumda da üst katmanın öngerilmesindeki artışın dalga yayılım hızını arttırdığı belirtilmiştir. Ayrıca elektriksel sınır şartların ve katman kalınlıklarının dispersiyon eğrilerinde önemli etkileri olduğu belirtilmiştir.

Kakar [67], iki ortotrop yarıdüzlem arasında izotrop katman bulunan öngerilmeli sistemde Love dalgalarının dispersiyonunu incelemiştir. Alt yarıdüzlemdeki basma öngerilmeleri azaldığında dalga yayılım hızı da azalmaktadır. Ayrıca yarıdüzlemlerin heterojenlik derecesinin de dispersiyon eğrilerine etkisi incelenmiştir. Chattaraj vd. [68], bir anizotrop katmanın iki izotrop yarıdüzlem ile kaplanarak oluştuğu sandviç öngerilmeli sistemde Love dalgalarını incelemişlerdir. Arayüzeyinde dikdörtgen tipi düzgünsüzlük bulunan bu sistemde öngerilmelerin dalga yayılım hızına etkileri incelenmiştir. Düzgünsüzlük boyutu ve katmandaki basma gerilmesi arttığında dalga yayılım hızı düşmektedir. Sultana ve Gupta [69] ise üzerinde ortotrop katman, altında

ise heterojen yarıdüzlem bulunan gözenekli katmandan oluşan öngerilmeli sandviç yapıda enine yatay dalgalarının yayılımını incelemişlerdir. Gözeneklilik arttıkça dalga yayılım hızının artacağını, üst katmandaki basma öngerilmesinin, gözenekli katmandaki öngerilmenin ve heterojenlik derecesindeki artışın dalga yayılım hızını düşüreceğini belirtmişlerdir.

Castaings ve Hosten [70], uzay endüstrisinde kullanılan anizotrop dış katmanlar ve izotrop iç katmandan oluşan sandviç plakta ultrasonik tahribatsız muayene amaçlı yönlendirilmiş Lamb dalgalarının dispersiyon eğrilerini elde etmiş katman kalınlıkları boyunca yer değiştirme ve gerilme dağılımlarını incelemişlerdir. Sandviç plaklarda bulunan ayna simetri özelliğinin yönlendirilmiş Lamb dalgalarının dispersiyon eğrilerini oldukça etkilediğini belirtmişlerdir.

Zamanov ve Agasiyev [71], dış katmanları eşit kalınlıkta elastik üç katmanlı öngerilmeli plakta simetrik ve asimetrik mod Lamb dalgalarının yayılımını incelemişlerdir. Basma öngerilmesi ilk modda dalga yayılım hızını arttırmaktadır. Akbarov vd. [72] de benzer olarak elastik üç katmanlı yatay öngerilmeli ve [73] çalışmasında ise düşey öngerilmeli sandviç plakta Lamb dalgalarının yayılımını incelemişlerdir. Elastik katmana ait mekanik ilişkiler harmonik tip potansiyel ile verilmiştir. Yatay çekme öngerilmesi altında asimetrik mod Lamb dalgalarının yayılımın hızı artmaktadır. Elastik üç katmanlı sandviç plak için yapılan bu çalışmalar, bu tezde incelenen ikinci sistem olan piezoelektrik dış katmanlı ve metal elastik iç katmanlı öngerilmeli sandviç plak için yapılan çalışmalara ışık tutmuştur.

1.2 Tezin Amacı

Çokça kullanılan transduser ve sensör gibi cihazların, piezoelektrik katmanlı sistem benzeri yapılarda olmaları, üzerlerinde çeşitli çalışmalar yapılmasını gerekli kılmıştır. Katmanlarda farklı sebeplerle öngerilmeler oluşabilir ve bu öngerilmeler sistem üzerinde mekanik dalgaların yayılımını etkilemektedir. Ayrıca piezoelektriklik özelliğinin ve piezoelektrik malzeme özelliklerinin de dalga yayılım hızına önemli etkisi bulunmaktadır.

Dolayısıyla bu tezde iki farklı piezoelektrik katmanlı öngerilmeli sisteme ait yüzey ve Lamb dalgaları incelenerek bu dalgalara piezoelektriklik özelliğinin ve öngerilmelerin etkilerini araştırmak amaçlanmıştır. Ayrıca bu sistemlere ait dispersiyon eğrilerine

üçüncü derece elastik sabitlerin, piezoelektrik malzemede polarizasyon doğrultusunun, malzeme çeşidinin, ideal olmayan temas koşullarının, plak kalınlıklarının, piezoelektrik katmanın üst ve alt yüzey elektrotlarının elektriksel açık veya kısa devre olması durumlarının etkilerini göstermek amaçlanmıştır.

1.3 Orijinal Katkı

Önceki çalışmalarda, katman ve yarıdüzlemden oluşan sistemlerde farklı dalga tiplerinin dispersiyonu incelenmiştir. Bu çalışmalara ilave olarak katmanın piezoelektrik malzemeden olduğu durumda yüzey ve Lamb dalgalarının yayılımı incelenmiş fakat öngerilmelerin bu sistemlere etkileri araştırılmamıştır. Ya da öngerilmeli katman ve yarıdüzlemden oluşan sistemlerde piezoelektrik katman bulunmayıp piezoelektriklik özelliğinin yüzey ve Lamb dalgalarının yayılım hızına etkileri araştırılamamıştır. Bu tezde piezoelektrik katman ve metal yarıdüzlemden oluşan sistemde hem piezoelektriklik özelliğinin hem de öngerilmelerin yüzey ve Lamb dalgalarının dispersiyonuna etkileri incelenecektir. Ayrıca piezoelektrik dış katmanlı sandviç plaklarda simetrik ve asimetrik mod Lamb dalgalarının dispersiyonu ideal olmayan temas durumunda elde edilip dispersiyon eğrilerine piezoelektriklik özelliğinin ve öngerilmelerin etkileri ilk defa bu tezde ele alınacaktır. Dolayısıyla elde edilen sonuçların transduser ve sensör gibi cihazların tasarımında faydalı teorik altyapı sunabileceği söylenebilir.

BÖLÜM 2

PİEZOELEKTRİK KATMAN VE METAL YARIDÜZLEMDEN OLUŞAN ÖNGERİLMELİ SİSTEMDE YÜZEY DALGALARININ DİSPERSİYONU

Bu bölümde, piezoelektrik katman ve metal yarıdüzlemden oluşan yatay ve düşey öngerilmeler altındaki sistemde yüzey dalgalarının dispersiyon denklemleri elde edilecektir. Dispersiyon denklemleri matematiksel işlemlerde kolaylık sağlaması için dalga yayılım hızının katman malzemesinin enine dalga yayılım hızından küçük ve büyük olduğu durumlar için ayrı ayrı elde edilecektir. Ayrıca piezoelektrik malzemenin polarizasyon doğrultusunun katman kalınlığı ve uzunluğu boyunca olduğu durumlarda, piezoelektrik katmanın üst ve alt yüzey elektrotlarının elektriksel açık ve kısa devre olduğu durumlarda farklı dispersiyon denklemleri elde edilecektir. Dispersiyon denklemlerinin sayısal çözümü ile elde edilecek olan dispersiyon eğrilerine piezoelektriklik özelliğinin, öngerilmelerin, polarizasyon doğrultusunun ve elektriksel sınır şartlarının etkileri incelenecektir.

2.1 Problemin Matematiksel Formülasyonu

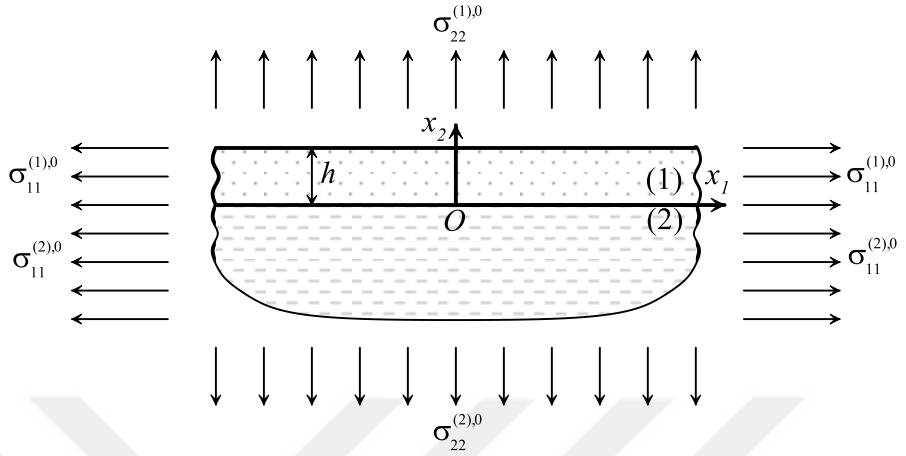
Kalınlığı h olan piezoelektrik katman ve metal yarıdüzlem bileşenlerinden oluşan öngerilmeli sistem Şekil 2.1'de gösterilmiştir. Katman ile yarıdüzlemin arayüzeyinde (temas düzleminde) $Ox_1x_2x_3$ kartezyen koordinat sistemi tanımlanmıştır. Şekil 2.1'de gösterilmeyen x_3 ekseni sayfa düzlemine dik doğrultudadır. Katman

$$\left\{-\infty < x_1 < +\infty,\ 0 \le x_2 \le h,\ -\infty < x_3 < +\infty\right\} \tag{2.1}$$

bölgesini kapsamaktadır ve katmana ait büyüklükler üst indis (1) ile gösterilmektedir. Yarıdüzlem ise

$$\left\{-\infty < x_1 < +\infty,\ -\infty \le x_2 \le 0,\ -\infty < x_3 < +\infty\right\} \tag{2.2}$$

bölgesini kapsamaktadır ve yarıdüzleme ait büyüklükler üst indis (2) ile gösterilmektedir.



Şekil 2.1 Piezoelektrik katman ve metal yarıdüzlemden oluşan öngerilmeli sistem

Ox_1 ve Ox_2 eksenlerinde, katman ve yarıdüzlem üzerine etki eden homojen yayılı normal öngerilmeler üst indis $(1),0$ ve $(2),0$ ile gösterilerek aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$\sigma_{11}^{(1),0} = sabit_1 \neq 0,\ \sigma_{11}^{(2),0} = sabit_2 \neq 0,$$

$$\sigma_{22}^{(1),0} = \sigma_{22}^{(2),0} = sabit_3 \neq 0,$$

$$\sigma_{12}^{(1),0} = \sigma_{12}^{(2),0} = 0. \tag{2.3}$$

[40], [74], [75], [76] ve [77] çalışmalarına göre hareket denklemleri:

$$\frac{\partial \sigma_{11}^{(m)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}^{(m)}}{\partial x_2} + \sigma_{11}^{(m),0}\frac{\partial^2 u_1^{(m)}}{\partial x_1^2} + \sigma_{22}^{(m),0}\frac{\partial^2 u_1^{(m)}}{\partial x_2^2} = \rho^{(m)}\frac{\partial^2 u_1^{(m)}}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}^{(m)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}^{(m)}}{\partial x_2} + \sigma_{11}^{(m),0}\frac{\partial^2 u_2^{(m)}}{\partial x_1^2} + \sigma_{22}^{(m),0}\frac{\partial^2 u_2^{(m)}}{\partial x_2^2} = \rho^{(m)}\frac{\partial^2 u_2^{(m)}}{\partial t^2},\ \ (m=1,2) \tag{2.4}$$

şeklinde, elektrik yük denklemi ise aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$\frac{\partial D_1^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{\partial D_2^{(1)}}{\partial x_2} = 0. \tag{2.5}$$

Görüldüğü gibi (2.4) katman ve yarıdüzlem için geçerliyken ($m=1,2$), (2.5) piezoelektriklik özelliğinden dolayı yalnızca katman için geçerlidir. (2.4) ve (2.5)'te $\sigma_{11}^{(m)}$, $\sigma_{22}^{(m)}$ ve $\sigma_{12}^{(m)}$ gerilme tensörü bileşenlerini; $u_1^{(m)}$ ve $u_2^{(m)}$ mekanik yer değiştirme vektörü bileşenlerini; $D_1^{(1)}$ ve $D_2^{(1)}$ elektrik yer değiştirme vektörü bileşenlerini; $\rho^{(m)}$ kütle yoğunluğu değerlerini göstermektedir.

Piezoelektrik malzeme polarizasyon doğrultusunun Ox_2 ekseni ile çakıştığı durumda (kalınlık doğrultusunda polarize edilmişse) katmanda bünye denklemleri aşağıdaki gibi verilmektedir (Yang [78]):

$$\sigma_{11}^{(1)} = c_{11}^{(1)} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} + c_{13}^{(1)} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} + e_{31}^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_2},$$

$$\sigma_{22}^{(1)} = c_{13}^{(1)} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} + c_{33}^{(1)} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} + e_{33}^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_2},$$

$$\sigma_{12}^{(1)} = c_{44}^{(1)} \left(\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} \right) + e_{15}^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_1},$$

$$D_1^{(1)} = e_{15}^{(1)} \left(\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} \right) - \varepsilon_{11}^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_1},$$

$$D_2^{(1)} = e_{31}^{(1)} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} + e_{33}^{(1)} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} - \varepsilon_{33}^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_2}. \tag{2.6}$$

Piezoelektrik malzeme polarizasyon doğrultusunun Ox_1 ekseni ile ekseni ile çakıştığı durumda (dalga yayılımı doğrultusunda polarize edilmişse) katmanda bünye denklemleri aşağıdaki gibi verilmektedir (Yang [78]):

$$\sigma_{11}^{(1)} = c_{33}^{(1)} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} + c_{13}^{(1)} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} + e_{33}^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_1},$$

$$\sigma_{22}^{(1)} = c_{13}^{(1)} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} + c_{11}^{(1)} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} + e_{31}^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_1},$$

$$\sigma_{12}^{(1)} = c_{44}^{(1)} \left(\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} \right) + e_{15}^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_2},$$

$$D_1^{(1)} = e_{33}^{(1)} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} + e_{31}^{(1)} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} - \varepsilon_{33}^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_1},$$

$$D_2^{(1)} = e_{15}^{(1)} \left(\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} \right) - \varepsilon_{11}^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_2}. \tag{2.7}$$

(2.6) ve (2.7)'de $c_{11}^{(1)}$, $c_{13}^{(1)}$, $c_{33}^{(1)}$ ve $c_{44}^{(1)}$ elastik sabitleri; $e_{31}^{(1)}$, $e_{33}^{(1)}$ ve $e_{15}^{(1)}$ piezoelektrik sabitleri; $\varepsilon_{11}^{(1)}$ ve $\varepsilon_{33}^{(1)}$ dielektrik sabitleri; $\varphi^{(1)}$ elektrik potansiyelini göstermektedir.

Metal yarıdüzlemde bünye denklemleri üçüncü derece elastik sabitler hesaba katılarak şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu yardımıyla elde edilmektedir. Bu amaçla Murnaghan potansiyeli aşağıdaki gibi verilmektedir [79], [80], [81], [40]:

$$\Phi^{(2)} = \frac{1}{2} \lambda^{(2)} \left(A_1^{(2)} \right)^2 + \mu^{(2)} A_2^{(2)} + \frac{a^{(2)}}{3} \left(A_1^{(2)} \right)^3 + b^{(2)} A_1^{(2)} A_2^{(2)} + \frac{c^{(2)}}{3} A_3^{(2)}. \tag{2.8}$$

Burada $\lambda^{(2)}$ ve $\mu^{(2)}$ Lame sabitlerini; $a^{(2)}$, $b^{(2)}$ ve $c^{(2)}$ üçüncü derece elastik sabitlerini; $A_1^{(2)}$, $A_2^{(2)}$ ve $A_3^{(2)}$ Green şekil değiştirme tensörünün cebirsel invariyantlarını göstermektedir. Bu invariyantlar aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$A_1^{(2)} = \varepsilon_{11}^{(2)} + \varepsilon_{22}^{(2)},$$

$$A_2^{(2)} = \left(\varepsilon_{11}^{(2)} \right)^2 + 2 \left(\varepsilon_{12}^{(2)} \right)^2 + \left(\varepsilon_{22}^{(2)} \right)^2,$$

$$A_3^{(2)} = \left(\varepsilon_{11}^{(2)} \right)^3 + 3 \left(\varepsilon_{12}^{(2)} \right)^2 \left(\varepsilon_{11}^{(2)} + \varepsilon_{22}^{(2)} \right) + \left(\varepsilon_{22}^{(2)} \right)^3. \tag{2.9}$$

Burada $\varepsilon_{11}^{(2)}$, $\varepsilon_{22}^{(2)}$ ve $\varepsilon_{12}^{(2)}$ Green şekil değiştirme tensörünün bileşenlerini göstermektedir ve bunlar aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$\varepsilon_{11}^{(2)} = \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_1} \right)^2,$$

$$\varepsilon_{22}^{(2)} = \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} \right)^2,$$

$$\varepsilon_{12}^{(2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_2} \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_2} \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_1} \right). \tag{2.10}$$

Gerilme tensörü bileşenleri (2.8) kullanılarak aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$\sigma_{11}^{(2)}=\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial \varepsilon_{11}^{(2)}},$$

$$\sigma_{22}^{(2)}=\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial \varepsilon_{22}^{(2)}},$$

$$\sigma_{12}^{(2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial \varepsilon_{12}^{(2)}}+\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial \varepsilon_{21}^{(2)}}\right). \tag{2.11}$$

(2.11)'deki doğrusal olmayan gerilme tensörü bileşenleri doğrusallaştırılarak metal yarıdüzlemde bünye denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir [40], [76]:

$$\sigma_{11}^{(2)}=A_{11}^{(2)}\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_1}+A_{12}^{(2)}\frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_2},$$

$$\sigma_{22}^{(2)}=A_{12}^{(2)}\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_1}+A_{22}^{(2)}\frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_2},$$

$$\sigma_{12}^{(2)}=\mu_{12}^{(2)}\left(\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_1}\right). \tag{2.12}$$

Buradaki $A_{11}^{(2)}$, $A_{22}^{(2)}$, $A_{12}^{(2)}$ ve $\mu_{12}^{(2)}$ sabit katsayıları aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$A_{11}^{(2)}=\lambda^{(2)}+2\mu^{(2)}+\frac{\left(2b^{(2)}+c^{(2)}\right)}{\mu^{(2)}}\sigma_{11}^{(2),0}+\frac{2K_2^{(2)}}{3K_1^{(2)}}\left(\sigma_{11}^{(2),0}+\sigma_{22}^{(2),0}\right),$$

$$A_{22}^{(2)}=\lambda^{(2)}+2\mu^{(2)}+\frac{\left(2b^{(2)}+c^{(2)}\right)}{\mu^{(2)}}\sigma_{22}^{(2),0}+\frac{2K_2^{(2)}}{3K_1^{(2)}}\left(\sigma_{11}^{(2),0}+\sigma_{22}^{(2),0}\right),$$

$$A_{12}^{(2)}=\lambda^{(2)}+\frac{b^{(2)}}{\mu^{(2)}}\left(\sigma_{11}^{(2),0}+\sigma_{22}^{(2),0}\right)+\frac{2\left(a^{(2)}\mu^{(2)}-b^{(2)}\lambda^{(2)}\right)}{3K_1^{(2)}\mu^{(2)}}\left(\sigma_{11}^{(2),0}+\sigma_{22}^{(2),0}\right),$$

$$\mu_{12}^{(2)}=\mu^{(2)}+\frac{b^{(2)}}{3K_1^{(2)}}\left(\sigma_{11}^{(2),0}+\sigma_{22}^{(2),0}\right)+\frac{c^{(2)}\left(\lambda^{(2)}+2\mu^{(2)}\right)}{12K_1^{(2)}\mu^{(2)}}\left(\sigma_{11}^{(2),0}+\sigma_{22}^{(2),0}\right),$$

$$K_1^{(2)}=\lambda^{(2)}+\frac{2}{3}\mu^{(2)},\quad K_2^{(2)}=\left(a^{(2)}+b^{(2)}\right)-\left(2b^{(2)}+c^{(2)}\right)\frac{\lambda^{(2)}}{2\mu^{(2)}}. \tag{2.13}$$

Katman ile yarıdüzlem arasında ($x_2=0$) ideal (tam) temas koşulları sağlanmaktadır. Sağlanan mekanik yer değiştirme ve gerilme koşulları aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$u_1^{(1)}\Big|_{x_2=0} = u_1^{(2)}\Big|_{x_2=0}, \quad u_2^{(1)}\Big|_{x_2=0} = u_2^{(2)}\Big|_{x_2=0},$$

$$\sigma_{12}^{(1)}\Big|_{x_2=0} = \sigma_{12}^{(2)}\Big|_{x_2=0}, \quad \sigma_{22}^{(1)}\Big|_{x_2=0} = \sigma_{22}^{(2)}\Big|_{x_2=0}. \tag{2.14}$$

Katman üst yüzeyinde ($x_2 = h$) sağlanan gerilme koşulları aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$\sigma_{12}^{(1)}\Big|_{x_2=h} = 0, \quad \sigma_{22}^{(1)}\Big|_{x_2=h} = 0. \tag{2.15}$$

Piezoelektrik katmanın üst ve alt yüzey elektrotları elektriksel kısa devre olduğu durumunda sağlanan elektrik potansiyeli koşulları aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$\varphi^{(1)}\Big|_{x_2=0} = 0, \quad \varphi^{(1)}\Big|_{x_2=h} = 0. \tag{2.16}$$

Piezoelektrik katmanın üst ve alt yüzey elektrotları elektriksel açık devre olduğu durumunda sağlanan elektrik yer değiştirme koşulları aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$D_2^{(1)}\Big|_{x_2=0} = 0, \quad D_2^{(1)}\Big|_{x_2=h} = 0. \tag{2.17}$$

Yarıdüzlemde yüzey dalgaları derine doğru söner. Bu koşulu sağlayan mekanik yer değiştirme ve gerilme koşulları aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$u_1^{(2)} \to 0, \quad u_2^{(2)} \to 0, \quad \sigma_{11}^{(2)} \to 0, \quad \sigma_{22}^{(2)} \to 0, \quad \sigma_{12}^{(2)} \to 0 \quad (x_2 \to -\infty \text{ iken}) \tag{2.18}$$

2.2 Problemin Çözüm Yöntemi

Dispersiyon denklemlerinin elde edilmesinde kullanılacak mekanik yer değiştirme, gerilme, elektrik yer değiştirme ifadeleri piezoelektrik katman ve yarıdüzlem için ayrı olarak elde edilmiştir.

2.2.1 Katmanda Gerilme ve Elektrik Yer Değiştirme İfadelerinin Bulunması

Katmanla ilgili denklemler piezoelektrik malzemenin polarizasyon doğrultusunun Ox_2 ekseni ve Ox_1 ekseninde olduğu iki durum için elde edilmiştir.

2.2.1.1 Kalınlık Doğrultusunda Polarizasyon Durumu

(2.6)'daki ifadeler (2.4) ve (2.5)'te yerlerine yazıldığında katmanda piezoelektrik malzeme polarizasyon doğrultusunun Ox_2 ekseni ile çakıştığı durum için mekanik yer

değiştirmeler ve elektrik potansiyeli cinsinden elektromekanik hareket denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\left(c_{11}^{(1)}+\sigma_{11}^{(1),0}\right)\frac{\partial^2 u_1^{(1)}}{\partial x_1^2}+\left(c_{44}^{(1)}+\sigma_{22}^{(1),0}\right)\frac{\partial^2 u_1^{(1)}}{\partial x_2^2}+\left(c_{13}^{(1)}+c_{44}^{(1)}\right)\frac{\partial^2 u_2^{(1)}}{\partial x_1 \partial x_2}$$
$$+\left(e_{15}^{(1)}+e_{31}^{(1)}\right)\frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial x_1 \partial x_2}=\rho^{(1)}\frac{\partial^2 u_1^{(1)}}{\partial t^2},$$

$$\left(c_{13}^{(1)}+c_{44}^{(1)}\right)\frac{\partial^2 u_1^{(1)}}{\partial x_1 \partial x_2}+\left(c_{44}^{(1)}+\sigma_{11}^{(1),0}\right)\frac{\partial^2 u_2^{(1)}}{\partial x_1^2}+\left(c_{33}^{(1)}+\sigma_{22}^{(1),0}\right)\frac{\partial^2 u_2^{(1)}}{\partial x_2^2}$$
$$+e_{15}^{(1)}\frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial x_1^2}+e_{33}^{(1)}\frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial x_2^2}=\rho^{(1)}\frac{\partial^2 u_2^{(1)}}{\partial t^2},$$

$$\left(e_{15}^{(1)}+e_{31}^{(1)}\right)\frac{\partial^2 u_1^{(1)}}{\partial x_1 \partial x_2}+e_{15}^{(1)}\frac{\partial^2 u_2^{(1)}}{\partial x_1^2}+e_{33}^{(1)}\frac{\partial^2 u_2^{(1)}}{\partial x_2^2}-\varepsilon_{11}^{(1)}\frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial x_1^2}-\varepsilon_{33}^{(1)}\frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial x_2^2}=0. \tag{2.19}$$

Yüzey dalgalarının yayılım doğrultusu Ox_1 ekseninde olduğunda, katman için mekanik yer değiştirmeler ve elektrik potansiyeli aşağıdaki gibi temsil edilebilir:

$$u_1^{(1)}=A^{(1)}e^{R^{(1)}kx_2}\sin(kx_1-\omega t),$$

$$u_2^{(1)}=B^{(1)}e^{R^{(1)}kx_2}\cos\left(kx_1-\omega t\right),$$

$$\varphi^{(1)}=C^{(1)}e^{R^{(1)}kx_2}\cos(kx_1-\omega t). \tag{2.20}$$

Burada $A^{(1)}$, $B^{(1)}$ ve $C^{(1)}$ bilinmeyen sabitleri; k dalga sayısını; ω açısal frekansı göstermektedir. $R^{(1)}$ ise dalga modlarını temsil eden bulunması gereken bir parametredir.

(2.20)'deki ifadeler (2.19)'da yerlerine yazılarak elde edilen denklem takımının katsayılar matrisine $\left[K^{(1)}\right]$ denirse bu denklem takımı matris formunda aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\begin{bmatrix}K_{11} & K_{12} & K_{13}\\ K_{21} & K_{22} & K_{23}\\ K_{31} & K_{32} & K_{33}\end{bmatrix}.\begin{Bmatrix}A^{(1)}\\ B^{(1)}\\ C^{(1)}\end{Bmatrix}=\left[K^{(1)}\right].A^{(1)}\begin{Bmatrix}1\\ \alpha\\ \beta\end{Bmatrix}=0. \tag{2.21}$$

Burada $\left[K^{(1)}\right]$ matrisinin elemanları aşağıdaki gibidir:

$$K_{11}=\left(c_{11}^{(1)}+\sigma_{11}^{(1),0}-\left(c_{44}^{(1)}+\sigma_{22}^{(1),0}\right)\left(R^{(1)}\right)^2-\rho^{(1)}\left(\omega^2/k^2\right)\right),$$

$$K_{12}=\left(c_{13}^{(1)}+c_{44}^{(1)}\right)R^{(1)},$$

$$K_{13}=\left(e_{15}^{(1)}+e_{31}^{(1)}\right)R^{(1)},$$

$$K_{21}=\left(c_{13}^{(1)}+c_{44}^{(1)}\right)R^{(1)},$$

$$K_{22}=-\left(c_{44}^{(1)}+\sigma_{11}^{(1),0}-\left(c_{33}^{(1)}+\sigma_{22}^{(1),0}\right)\left(R^{(1)}\right)^2-\rho^{(1)}\left(\omega^2/k^2\right)\right),$$

$$K_{23}=-\left(e_{15}^{(1)}-e_{33}^{(1)}\left(R^{(1)}\right)^2\right),$$

$$K_{31}=\left(e_{15}^{(1)}+e_{31}^{(1)}\right)R^{(1)},$$

$$K_{32}=-\left(e_{15}^{(1)}-e_{33}^{(1)}\left(R^{(1)}\right)^2\right),$$

$$K_{33}=-\left(\varepsilon_{33}^{(1)}\left(R^{(1)}\right)^2-\varepsilon_{11}^{(1)}\right). \tag{2.22}$$

(2.21)'deki α ve β aşağıdaki gibi bulunarak $B^{(1)}$ ve $C^{(1)}$'in $A^{(1)}$ cinsinden ifadeleri elde edilmiş olur.

$$\alpha=\frac{K_{13}K_{21}-K_{11}K_{23}}{K_{12}K_{23}-K_{13}K_{22}},\quad \beta=\frac{K_{12}K_{21}-K_{11}K_{22}}{K_{13}K_{22}-K_{12}K_{23}}. \tag{2.23}$$

$A^{(1)}$, $B^{(1)}$ ve $C^{(1)}$'in sıfırdan farklı çözümlerini elde etmek için aşağıdaki koşul sağlanmalıdır:

$$\det\left[K^{(1)}\right]=0 \tag{2.24}$$

(2.24)'ten her bir $c=\omega/k$ değerine karşılık $R^{(1)}$ parametresine ait altı kök elde edilir. Bu köklerin her biri yüzey dalga yayılımının farklı mod bileşenlerini temsil etmektedir. Bu kökler mekanik yer değiştirme ve elektrik potansiyeli ifadelerinin bulunması için birer özel çözüm verir. Dalga hızı $c>c_2^{(1)}$ olduğu durumda $R^{(1)}$ parametresine ait kökler aşağıdaki gibi olmaktadır (iki sanal, dört reel kök):

$$R_1^{(1)}=ip_1,\quad R_2^{(1)}=-ip_1,\quad R_3^{(1)}=p_2,\quad R_4^{(1)}=-p_2,\quad R_5^{(1)}=p_3,\quad R_6^{(1)}=-p_3. \tag{2.25}$$

Burada $c_2^{(1)}$ katman malzemesinin enine dalga yayılım hızıdır ve aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$c_2^{(1)} = \sqrt{\frac{c_{44}^{(1)} + \left(e_{15}^{(1)}\right)^2 \Big/ \varepsilon_{11}^{(1)}}{\rho^{(1)}}}, \quad i = \sqrt{-1}, \quad p_1 > 0, \quad p_2 > 0, \quad p_3 > 0 \tag{2.26}$$

Bu durumda (2.20)'deki ifadeler aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$u_1^{(1)} = \left(A_1^{(1)} e^{ip_1 kx_2} + A_2^{(1)} e^{-ip_1 kx_2} + A_3^{(1)} e^{p_2 kx_2} + A_4^{(1)} e^{-p_2 kx_2} + A_5^{(1)} e^{p_3 kx_2} + A_6^{(1)} e^{-p_3 kx_2}\right) \sin(kx_1 - \omega t),$$

$$u_2^{(1)} = \left(B_1^{(1)} e^{ip_1 kx_2} + B_2^{(1)} e^{-ip_1 kx_2} + B_3^{(1)} e^{p_2 kx_2} + B_4^{(1)} e^{-p_2 kx_2} + B_5^{(1)} e^{p_3 kx_2} + B_6^{(1)} e^{-p_3 kx_2}\right) \cos\left(kx_1 - \omega t\right),$$

$$\varphi^{(1)} = \left(C_1^{(1)} e^{ip_1 kx_2} + C_2^{(1)} e^{-ip_1 kx_2} + C_3^{(1)} e^{p_2 kx_2} + C_4^{(1)} e^{-p_2 kx_2} + C_5^{(1)} e^{p_3 kx_2} + C_6^{(1)} e^{-p_3 kx_2}\right) \cos\left(kx_1 - \omega t\right). \tag{2.27}$$

Euler formülü kullanılarak üstel karmaşık sayılar trigonometrik fonksiyonlarla gösterilirse (2.27)'deki ifadeler aşağıdaki gibi yazılabilir (Jin vd. [39]):

$$u_1^{(1)} = \left(\begin{array}{r} X_1^{(1)} \sin\left(p_1 kx_2\right) + X_2^{(1)} \cos\left(p_1 kx_2\right) + X_3^{(1)} e^{p_2 kx_2} + X_4^{(1)} e^{-p_2 kx_2} \\ + X_5^{(1)} e^{p_3 kx_2} + X_6^{(1)} e^{-p_3 kx_2} \end{array}\right) \sin(kx_1 - \omega t),$$

$$u_2^{(1)} = \left(\begin{array}{r} Y_1^{(1)} \cos\left(p_1 kx_2\right) + Y_2^{(1)} \sin\left(p_1 kx_2\right) + Y_3^{(1)} e^{p_2 kx_2} + Y_4^{(1)} e^{-p_2 kx_2} \\ + Y_5^{(1)} e^{p_3 kx_2} + Y_6^{(1)} e^{-p_3 kx_2} \end{array}\right) \cos\left(kx_1 - \omega t\right),$$

$$\varphi^{(1)} = \left(\begin{array}{r} Z_1^{(1)} \cos\left(p_1 kx_2\right) + Z_2^{(1)} \sin\left(p_1 kx_2\right) + Z_3^{(1)} e^{p_2 kx_2} + Z_4^{(1)} e^{-p_2 kx_2} \\ + Z_5^{(1)} e^{p_3 kx_2} + Z_6^{(1)} e^{-p_3 kx_2} \end{array}\right) \cos\left(kx_1 - \omega t\right). \tag{2.28}$$

(2.28)'deki ifadeler (2.19)'da yerlerine yazılarak katmandaki mekanik yer değiştirmeler ve elektrik potansiyeline ait genel çözüm aşağıdaki gibi elde edilir:

$$u_1^{(1)} = \left(\begin{array}{r} X_1^{(1)} \sin\left(p_1 kx_2\right) + X_2^{(1)} \cos\left(p_1 kx_2\right) + X_3^{(1)} e^{p_2 kx_2} \\ + X_4^{(1)} e^{-p_2 kx_2} + X_5^{(1)} e^{p_3 kx_2} + X_6^{(1)} e^{-p_3 kx_2} \end{array}\right) \sin(kx_1 - \omega t),$$

$$u_2^{(1)} = \left(\begin{array}{r} X_1^{(1)} \alpha_1 \cos\left(p_1 kx_2\right) + X_2^{(1)} \alpha_2 \sin\left(p_1 kx_2\right) + X_3^{(1)} \alpha_3 e^{p_2 kx_2} \\ + X_4^{(1)} \alpha_4 e^{-p_2 kx_2} + X_5^{(1)} \alpha_5 e^{p_3 kx_2} + X_6^{(1)} \alpha_6 e^{-p_3 kx_2} \end{array}\right) \cos\left(kx_1 - \omega t\right),$$

$$\varphi^{(1)} = \left(\begin{array}{r} X_1^{(1)} \beta_1 \cos\left(p_1 kx_2\right) + X_2^{(1)} \beta_2 \sin\left(p_1 kx_2\right) + X_3^{(1)} \beta_3 e^{p_2 kx_2} \\ + X_4^{(1)} \beta_4 e^{-p_2 kx_2} + X_5^{(1)} \beta_5 e^{p_3 kx_2} + X_6^{(1)} \beta_6 e^{-p_3 kx_2} \end{array}\right) \cos\left(kx_1 - \omega t\right). \tag{2.29}$$

X_1, Y_1 ve Z_1'in sıfırdan farklı çözümleri için aşağıdaki denklem takımı elde edilir:

$$\begin{bmatrix} K1_{11} & K1_{12} & K1_{13} \\ K1_{21} & K1_{22} & K1_{23} \\ K1_{31} & K1_{32} & K1_{33} \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{Bmatrix} = [K1] . X_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \end{Bmatrix} = 0 \tag{2.30}$$

Buradaki $[K1]$ matrisinin elemanları aşağıdaki gibidir:

$$K1_{11} = \left(-c_{11}^{(1)} - \sigma_{11}^{(1),0} - \left(c_{44}^{(1)} + \sigma_{22}^{(1),0} \right) p_1^{\,2} + \rho^{(1)} \left(\omega^2 / k^2 \right) \right),$$

$$K1_{12} = \left(c_{13}^{(1)} + c_{44}^{(1)} \right) p_1,$$

$$K1_{13} = \left(e_{15}^{(1)} + e_{31}^{(1)} \right) p_1,$$

$$K1_{21} = \left(c_{13}^{(1)} + c_{44}^{(1)} \right) p_1,$$

$$K1_{22} = -\left(c_{44}^{(1)} + \sigma_{11}^{(1),0} + \left(c_{33}^{(1)} + \sigma_{22}^{(1),0} \right) p_1^{\,2} - \rho^{(1)} \left(\omega^2 / k^2 \right) \right),$$

$$K1_{23} = -\left(e_{15}^{(1)} + e_{33}^{(1)} p_1^{\,2} \right),$$

$$K1_{31} = \left(e_{15}^{(1)} + e_{31}^{(1)} \right) p_1,$$

$$K1_{32} = -\left(e_{15}^{(1)} + e_{33}^{(1)} p_1^{\,2} \right),$$

$$K1_{33} = \left(\varepsilon_{33}^{(1)} p_1^{\,2} + \varepsilon_{11}^{(1)} \right). \tag{2.31}$$

X_2, Y_2 ve Z_2'nin sıfırdan farklı çözümleri için aşağıdaki denklem takımı elde edilir:

$$\begin{bmatrix} K2_{11} & K2_{12} & K2_{13} \\ K2_{21} & K2_{22} & K2_{23} \\ K2_{31} & K2_{32} & K2_{33} \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{Bmatrix} = [K2] . X_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \end{Bmatrix} = 0 \tag{2.32}$$

Buradaki $[K2]$ matrisinin elemanları aşağıdaki gibidir:

$$K2_{11} = -\left(-c_{11}^{(1)} - \sigma_{11}^{(1),0} - \left(c_{44}^{(1)} + \sigma_{22}^{(1),0} \right) p_1^{\,2} + \rho^{(1)} \left(\omega^2 / k^2 \right) \right),$$

$$K2_{12} = \left(c_{13}^{(1)} + c_{44}^{(1)} \right) p_1,$$

$$K2_{13} = \left(e_{15}^{(1)} + e_{31}^{(1)} \right) p_1,$$

$$K2_{21} = -\left(c_{13}^{(1)} + c_{44}^{(1)}\right) p_1,$$

$$K2_{22} = -\left(c_{44}^{(1)} + \sigma_{11}^{(1),0} + \left(c_{33}^{(1)} + \sigma_{22}^{(1),0}\right) p_1{}^2 - \rho^{(1)}\left(\omega^2/k^2\right)\right),$$

$$K2_{23} = -\left(e_{15}^{(1)} + e_{33}^{(1)} p_1{}^2\right),$$

$$K2_{31} = -\left(e_{15}^{(1)} + e_{31}^{(1)}\right) p_1,$$

$$K2_{32} = -\left(e_{15}^{(1)} + e_{33}^{(1)} p_1{}^2\right),$$

$$K2_{33} = \left(\varepsilon_{33}^{(1)} p_1{}^2 + \varepsilon_{11}^{(1)}\right). \tag{2.33}$$

(2.31) kullanılarak (2.30)'dan α_1 ve β_1, (2.33) kullanılarak (2.32)'den α_2 ve β_2 aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\alpha_1 = \frac{K1_{13}K1_{21} - K1_{11}K1_{23}}{K1_{12}K1_{23} - K1_{13}K1_{22}}, \quad \beta_1 = \frac{K1_{12}K1_{21} - K1_{11}K1_{22}}{K1_{13}K1_{22} - K1_{12}K1_{23}},$$

$$\alpha_2 = \frac{K2_{13}K2_{21} - K2_{11}K2_{23}}{K2_{12}K2_{23} - K2_{13}K2_{22}}, \quad \beta_2 = \frac{K2_{12}K2_{21} - K2_{11}K2_{22}}{K2_{13}K2_{22} - K2_{12}K2_{23}}. \tag{2.34}$$

(2.22)'de $R^{(1)}$ yerine p_2 yazılarak ve bu değerler kullanılarak (2.23)'ten α_3 ve β_3, $-p_2$ yazılarak α_4 ve β_4, p_3 yazılarak α_5 ve β_5, $-p_3$ yazılarak α_6 ve β_6 elde edilir.

(2.6)'daki gerilme ve elektrik yer değiştirme ifadeleri (2.29) kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\sigma_{12}^{(1)} = \begin{pmatrix} X_1^{(1)}\left(c_{44}^{(1)} p_1 - \alpha_1 c_{44}^{(1)} - \beta_1 e_{15}^{(1)}\right)\cos\left(p_1 k x_2\right) \\ + X_2^{(1)}\left(-c_{44}^{(1)} p_1 - \alpha_2 c_{44}^{(1)} - \beta_2 e_{15}^{(1)}\right)\sin\left(p_1 k x_2\right) \\ + X_3^{(1)}\left(c_{44}^{(1)} p_2 - \alpha_3 c_{44}^{(1)} - \beta_3 e_{15}^{(1)}\right) e^{p_2 k x_2} \\ + X_4^{(1)}\left(-c_{44}^{(1)} p_2 - \alpha_4 c_{44}^{(1)} - \beta_4 e_{15}^{(1)}\right) e^{-p_2 k x_2} \\ + X_5^{(1)}\left(c_{44}^{(1)} p_3 - \alpha_5 c_{44}^{(1)} - \beta_5 e_{15}^{(1)}\right) e^{p_3 k x_2} \\ + X_6^{(1)}\left(-c_{44}^{(1)} p_3 - \alpha_6 c_{44}^{(1)} - \beta_6 e_{15}^{(1)}\right) e^{-p_3 k x_2} \end{pmatrix} k \sin(k x_1 - \omega t),$$

$$\sigma_{22}^{(1)} = \begin{pmatrix} X_1^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} - \alpha_1 c_{33}^{(1)} p_1 - \beta_1 e_{33}^{(1)} p_1\right)\sin(p_1 k x_2) \\ + X_2^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} + \alpha_2 c_{33}^{(1)} p_1 + \beta_2 e_{33}^{(1)} p_1\right)\cos(p_1 k x_2) \\ + X_3^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} + \alpha_3 c_{33}^{(1)} p_2 + \beta_3 e_{33}^{(1)} p_2\right)e^{p_2 k x_2} \\ + X_4^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} - \alpha_4 c_{33}^{(1)} p_2 - \beta_4 e_{33}^{(1)} p_2\right)e^{-p_2 k x_2} \\ + X_5^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} + \alpha_5 c_{33}^{(1)} p_3 + \beta_5 e_{33}^{(1)} p_3\right)e^{p_3 k x_2} \\ + X_6^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} - \alpha_6 c_{33}^{(1)} p_3 - \beta_6 e_{33}^{(1)} p_3\right)e^{-p_3 k x_2} \end{pmatrix} k\cos(k x_1 - \omega t),$$

$$D_2^{(1)} = \begin{pmatrix} X_1^{(1)}\left(e_{31}^{(1)} - \alpha_1 e_{33}^{(1)} p_1 + \beta_1 \varepsilon_{33}^{(1)} p_1\right)\sin(p_1 k x_2) \\ + X_2^{(1)}\left(e_{31}^{(1)} + \alpha_2 e_{33}^{(1)} p_1 - \beta_2 \varepsilon_{33}^{(1)} p_1\right)\cos(p_1 k x_2) \\ + X_3^{(1)}\left(e_{31}^{(1)} + \alpha_3 e_{33}^{(1)} p_2 - \beta_3 \varepsilon_{33}^{(1)} p_2\right)e^{p_2 k x_2} \\ + X_4^{(1)}\left(e_{31}^{(1)} - \alpha_4 e_{33}^{(1)} p_2 + \beta_4 \varepsilon_{33}^{(1)} p_2\right)e^{-p_2 k x_2} \\ + X_5^{(1)}\left(e_{31}^{(1)} + \alpha_5 e_{33}^{(1)} p_3 - \beta_5 \varepsilon_{33}^{(1)} p_3\right)e^{p_3 k x_2} \\ + X_6^{(1)}\left(e_{31}^{(1)} - \alpha_6 e_{33}^{(1)} p_3 + \beta_6 \varepsilon_{33}^{(1)} p_3\right)e^{-p_3 k x_2} \end{pmatrix} k\cos(k x_1 - \omega t). \quad (2.35)$$

(2.35) piezoelektrik malzeme polarizasyon doğrultusunun Ox_2 ekseni ile çakıştığı ve dalga hızının $c > c_2^{(1)}$ olduğu durum için katmanda elde edilen gerilme ve elektrik yer değiştirme ifadeleridir.

Dalga hızı $c < c_2^{(1)}$ olduğu durumda (2.24)'teki $R^{(1)}$ parametresine ait kökler aşağıdaki gibi olmaktadır (altı reel kök):

$$R_1^{(1)} = p_1, \quad R_2^{(1)} = -p_1, \quad R_3^{(1)} = p_2, \quad R_4^{(1)} = -p_2, \quad R_5^{(1)} = p_3, \quad R_6^{(1)} = -p_3. \quad (2.36)$$

Bu durumda katmandaki mekanik yer değiştirmeler ve elektrik potansiyeline ait genel çözüm aşağıdaki gibi elde edilir:

$$u_1^{(1)} = \begin{pmatrix} X_1^{(1)} e^{p_1 k x_2} + X_2^{(1)} e^{-p_1 k x_2} + X_3^{(1)} e^{p_2 k x_2} + X_4^{(1)} e^{-p_2 k x_2} \\ + X_5^{(1)} e^{p_3 k x_2} + X_6^{(1)} e^{-p_3 k x_2} \end{pmatrix} \sin(k x_1 - \omega t),$$

$$u_2^{(1)} = \begin{pmatrix} X_1^{(1)} \alpha_1 e^{p_1 k x_2} + X_2^{(1)} \alpha_2 e^{-p_1 k x_2} + X_3^{(1)} \alpha_3 e^{p_2 k x_2} + X_4^{(1)} \alpha_4 e^{-p_2 k x_2} \\ + X_5^{(1)} \alpha_5 e^{p_3 k x_2} + X_6^{(1)} \alpha_6 e^{-p_3 k x_2} \end{pmatrix} \cos\left(k x_1 - \omega t\right),$$

$$\varphi^{(1)} = \begin{pmatrix} X_1^{(1)} \beta_1 e^{p_1 k x_2} + X_2^{(1)} \beta_2 e^{-p_1 k x_2} + X_3^{(1)} \beta_3 e^{p_2 k x_2} + X_4^{(1)} \beta_4 e^{-p_2 k x_2} \\ + X_5^{(1)} \beta_5 e^{p_3 k x_2} + X_6^{(1)} \beta_6 e^{-p_3 k x_2} \end{pmatrix} \cos\left(k x_1 - \omega t\right). \quad (2.37)$$

(2.22)'de $R^{(1)}$ yerine p_1 yazarak ve böylece elde edilen (2.23)'ten α_1 ve β_1, $-p_1$ yazarak α_2 ve β_2, p_2 yazarak α_3 ve β_3, $-p_2$ yazarak α_4 ve β_4 elde edilir, p_3 yazarak α_5 ve β_5, $-p_3$ yazarak α_6 ve β_6 (2.37) için elde edilir.

(2.6)'daki gerilme ve elektrik yer değiştirme ifadeleri (2.37) kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\sigma_{12}^{(1)} = \begin{pmatrix} X_1^{(1)}\left(c_{44}^{(1)}p_1 - \alpha_1 c_{44}^{(1)} - \beta_1 e_{15}^{(1)}\right)e^{p_1 k x_2} \\ +X_2^{(1)}\left(-c_{44}^{(1)}p_1 - \alpha_2 c_{44}^{(1)} - \beta_2 e_{15}^{(1)}\right)e^{-p_1 k x_2} \\ +X_3^{(1)}\left(c_{44}^{(1)}p_2 - \alpha_3 c_{44}^{(1)} - \beta_3 e_{15}^{(1)}\right)e^{p_2 k x_2} \\ +X_4^{(1)}\left(-c_{44}^{(1)}p_2 - \alpha_4 c_{44}^{(1)} - \beta_4 e_{15}^{(1)}\right)e^{-p_2 k x_2} \\ +X_5^{(1)}\left(c_{44}^{(1)}p_3 - \alpha_5 c_{44}^{(1)} - \beta_5 e_{15}^{(1)}\right)e^{p_3 k x_2} \\ +X_6^{(1)}\left(-c_{44}^{(1)}p_3 - \alpha_6 c_{44}^{(1)} - \beta_6 e_{15}^{(1)}\right)e^{-p_3 k x_2} \end{pmatrix} k\sin(kx_1 - \omega t),$$

$$\sigma_{22}^{(1)} = \begin{pmatrix} X_1^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} + \alpha_1 c_{33}^{(1)}p_1 + \beta_1 e_{33}^{(1)}p_1\right)e^{p_1 k x_2} \\ +X_2^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} - \alpha_2 c_{33}^{(1)}p_1 - \beta_2 e_{33}^{(1)}p_1\right)e^{-p_1 k x_2} \\ +X_3^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} + \alpha_3 c_{33}^{(1)}p_2 + \beta_3 e_{33}^{(1)}p_2\right)e^{p_2 k x_2} \\ +X_4^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} - \alpha_4 c_{33}^{(1)}p_2 - \beta_4 e_{33}^{(1)}p_2\right)e^{-p_2 k x_2} \\ +X_5^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} + \alpha_5 c_{33}^{(1)}p_3 + \beta_5 e_{33}^{(1)}p_3\right)e^{p_3 k x_2} \\ +X_6^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} - \alpha_6 c_{33}^{(1)}p_3 - \beta_6 e_{33}^{(1)}p_3\right)e^{-p_3 k x_2} \end{pmatrix} k\cos(kx_1 - \omega t),$$

$$D_2^{(1)} = \begin{pmatrix} X_1^{(1)}\left(e_{31}^{(1)} + \alpha_1 e_{33}^{(1)}p_1 - \beta_1 \varepsilon_{33}^{(1)}p_1\right)e^{p_1 k x_2} \\ +X_2^{(1)}\left(e_{31}^{(1)} - \alpha_2 e_{33}^{(1)}p_1 + \beta_2 \varepsilon_{33}^{(1)}p_1\right)e^{-p_1 k x_2} \\ +X_3^{(1)}\left(e_{31}^{(1)} + \alpha_3 e_{33}^{(1)}p_2 - \beta_3 \varepsilon_{33}^{(1)}p_2\right)e^{p_2 k x_2} \\ +X_4^{(1)}\left(e_{31}^{(1)} - \alpha_4 e_{33}^{(1)}p_2 + \beta_4 \varepsilon_{33}^{(1)}p_2\right)e^{-p_2 k x_2} \\ +X_5^{(1)}\left(e_{31}^{(1)} + \alpha_5 e_{33}^{(1)}p_3 - \beta_5 \varepsilon_{33}^{(1)}p_3\right)e^{p_3 k x_2} \\ +X_6^{(1)}\left(e_{31}^{(1)} - \alpha_6 e_{33}^{(1)}p_3 + \beta_6 \varepsilon_{33}^{(1)}p_3\right)e^{-p_3 k x_2} \end{pmatrix} k\cos(kx_1 - \omega t). \qquad (2.38)$$

(2.38) piezoelektrik malzeme polarizasyon doğrultusunun Ox_2 ekseni ile çakıştığı ve dalga hızının $c < c_2^{(1)}$ olduğu durum için katmanda elde edilen gerilme ve elektrik yer değiştirme ifadeleridir.

2.2.1.2 Uzunluk Doğrultusunda Polarizasyon Durumu

(2.7)'deki ifadeler (2.4) ve (2.5)'te yerlerine yazıldığında katmanda piezoelektrik malzeme polarizasyon doğrultusunun Ox_1 ekseni ile çakıştığı durum için mekanik yer değiştirmeler ve elektrik potansiyeli cinsinden elektromekanik hareket denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\left(c_{33}^{(1)}+\sigma_{11}^{(1),0}\right)\frac{\partial^2 u_1^{(1)}}{\partial x_1^2}+\left(c_{44}^{(1)}+\sigma_{22}^{(1),0}\right)\frac{\partial^2 u_1^{(1)}}{\partial x_2^2}+\left(c_{13}^{(1)}+c_{44}^{(1)}\right)\frac{\partial^2 u_2^{(1)}}{\partial x_1 \partial x_2}$$
$$+e_{33}^{(1)}\frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial x_1^2}+e_{15}^{(1)}\frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial x_2^2}=\rho^{(1)}\frac{\partial^2 u_1^{(1)}}{\partial t^2},$$

$$\left(c_{13}^{(1)}+c_{44}^{(1)}\right)\frac{\partial^2 u_1^{(1)}}{\partial x_1 \partial x_2}+\left(c_{44}^{(1)}+\sigma_{11}^{(1),0}\right)\frac{\partial^2 u_2^{(1)}}{\partial x_1^2}+\left(c_{11}^{(1)}+\sigma_{22}^{(1),0}\right)\frac{\partial^2 u_2^{(1)}}{\partial x_2^2}$$
$$+\left(e_{15}^{(1)}+e_{31}^{(1)}\right)\frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial x_1 \partial x_2}=\rho^{(1)}\frac{\partial^2 u_2^{(1)}}{\partial t^2},$$

$$e_{33}^{(1)}\frac{\partial^2 u_1^{(1)}}{\partial x_1^2}+e_{15}^{(1)}\frac{\partial^2 u_1^{(1)}}{\partial x_2^2}\left(e_{15}^{(1)}+e_{31}^{(1)}\right)\frac{\partial^2 u_2^{(1)}}{\partial x_1 \partial x_2}-\varepsilon_{33}^{(1)}\frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial x_1^2}-\varepsilon_{11}^{(1)}\frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial x_2^2}=0. \tag{2.39}$$

Yüzey dalgalarının yayılım doğrultusu Ox_1 ekseninde olduğunda, katman için mekanik yer değiştirmeler ve elektrik potansiyeli aşağıdaki gibi temsil edilebilir:

$$u_1^{(1)}=A^{(1)}e^{R^{(1)}kx_2}\sin(kx_1-\omega t),$$

$$u_2^{(1)}=B^{(1)}e^{R^{(1)}kx_2}\cos\left(kx_1-\omega t\right),$$

$$\varphi^{(1)}=C^{(1)}e^{R^{(1)}kx_2}\sin(kx_1-\omega t). \tag{2.40}$$

(2.40)'daki ifadeler (2.39)'da yerlerine yazılarak elde edilen denklem takımının katsayılar matrisinin ($\left[K^{(1)}\right]$) elemanları aşağıdaki gibidir:

$$K_{11}=\left(c_{33}^{(1)}+\sigma_{11}^{(1),0}-\left(c_{44}^{(1)}+\sigma_{22}^{(1),0}\right)\left(R^{(1)}\right)^2-\rho^{(1)}\left(\omega^2/k^2\right)\right),$$

$$K_{12}=\left(c_{13}^{(1)}+c_{44}^{(1)}\right)R^{(1)},$$

$$K_{13}=\left(e_{33}^{(1)}-e_{15}^{(1)}\left(R^{(1)}\right)^2\right),$$

$$K_{21}=\left(c_{13}^{(1)}+c_{44}^{(1)}\right)R^{(1)},$$

$$K_{22} = -\left(c_{44}^{(1)} + \sigma_{11}^{(1),0} - \left(c_{11}^{(1)} + \sigma_{22}^{(1),0} \right) \left(R^{(1)} \right)^2 - \rho^{(1)} \left(\omega^2 / k^2 \right) \right),$$

$$K_{23} = \left(e_{15}^{(1)} + e_{31}^{(1)} \right) R^{(1)},$$

$$K_{31} = \left(e_{33}^{(1)} - e_{15}^{(1)} \left(R^{(1)} \right)^2 \right),$$

$$K_{32} = \left(e_{15}^{(1)} + e_{31}^{(1)} \right) R^{(1)},$$

$$K_{33} = -\left(\varepsilon_{33}^{(1)} - \varepsilon_{11}^{(1)} \left(R^{(1)} \right)^2 \right). \qquad (2.41)$$

Dalga hızı $c > c_2^{(1)}$ olduğu durumda (2.41)'de elemanları verilen $\left[K^{(1)} \right]$ matrisinin determinantı sıfıra eşitlenerek elde edilen denklemde, verilen $c = \omega / k$ değerine karşılık (2.25)'deki biçimde $R^{(1)}$ parametresine ait iki sanal ve dört reel kök elde edilir. Bundan dolayı katmandaki mekanik yer değiştirmeler ve elektrik potansiyeli aşağıdaki gibidir:

$$u_1^{(1)} = \left(\begin{array}{c} X_1^{(1)} \sin\left(p_1 k x_2 \right) + X_2^{(1)} \cos\left(p_1 k x_2 \right) + X_3^{(1)} e^{p_2 k x_2} \\ + X_4^{(1)} e^{-p_2 k x_2} + X_5^{(1)} e^{p_3 k x_2} + X_6^{(1)} e^{-p_3 k x_2} \end{array} \right) \sin(k x_1 - \omega t),$$

$$u_2^{(1)} = \left(\begin{array}{c} X_1^{(1)} \alpha_1 \cos\left(p_1 k x_2 \right) + X_2^{(1)} \alpha_2 \sin\left(p_1 k x_2 \right) + X_3^{(1)} \alpha_3 e^{p_2 k x_2} \\ + X_4^{(1)} \alpha_4 e^{-p_2 k x_2} + X_5^{(1)} \alpha_5 e^{p_3 k x_2} + X_6^{(1)} \alpha_6 e^{-p_3 k x_2} \end{array} \right) \cos\left(k x_1 - \omega t \right),$$

$$\varphi^{(1)} = \left(\begin{array}{c} X_1^{(1)} \beta_1 \sin\left(p_1 k x_2 \right) + X_2^{(1)} \beta_2 \cos\left(p_1 k x_2 \right) + X_3^{(1)} \beta_3 e^{p_2 k x_2} \\ + X_4^{(1)} \beta_4 e^{-p_2 k x_2} + X_5^{(1)} \beta_5 e^{p_3 k x_2} + X_6^{(1)} \beta_6 e^{-p_3 k x_2} \end{array} \right) \sin\left(k x_1 - \omega t \right). \qquad (2.42)$$

(2.34) yardımıyla α_1, β_1, α_2 ve β_2'nin bulunması için gereken $\left[K1 \right]$ ve $\left[K2 \right]$ matrislerinin elemanları aşağıdaki gibidir:

$$K1_{11} = -\left(c_{33}^{(1)} + \sigma_{11}^{(1),0} + \left(c_{44}^{(1)} + \sigma_{22}^{(1),0} \right) p_1^{\,2} - \rho^{(1)} \left(\omega^2 / k^2 \right) \right),$$

$$K1_{12} = \left(c_{13}^{(1)} + c_{44}^{(1)} \right) p_1,$$

$$K1_{13} = -\left(e_{33}^{(1)} + e_{15}^{(1)} p_1^{\,2} \right),$$

$$K1_{21} = \left(c_{13}^{(1)} + c_{44}^{(1)} \right) p_1,$$

$$K1_{22} = -\left(c_{44}^{(1)} + \sigma_{11}^{(1),0} + \left(c_{11}^{(1)} + \sigma_{22}^{(1),0} \right) p_1^{\,2} - \rho^{(1)} \left(\omega^2 / k^2 \right) \right),$$

$$K1_{23} = \left(e_{15}^{(1)} + e_{31}^{(1)}\right) p_1,$$

$$K1_{31} = -\left(e_{33}^{(1)} + e_{15}^{(1)} {p_1}^2\right),$$

$$K1_{32} = \left(e_{15}^{(1)} + e_{31}^{(1)}\right) p_1,$$

$$K1_{33} = \left(\varepsilon_{33}^{(1)} + \varepsilon_{11}^{(1)} {p_1}^2\right),$$

$$K2_{11} = \left(c_{33}^{(1)} + \sigma_{11}^{(1),0} + \left(c_{44}^{(1)} + \sigma_{22}^{(1),0}\right) {p_1}^2 - \rho^{(1)}\left(\omega^2 / k^2\right)\right),$$

$$K2_{12} = \left(c_{13}^{(1)} + c_{44}^{(1)}\right) p_1,$$

$$K2_{13} = \left(e_{33}^{(1)} + e_{15}^{(1)} {p_1}^2\right),$$

$$K2_{21} = \left(c_{13}^{(1)} + c_{44}^{(1)}\right) p_1,$$

$$K2_{22} = \left(c_{44}^{(1)} + \sigma_{11}^{(1),0} + \left(c_{11}^{(1)} + \sigma_{22}^{(1),0}\right) {p_1}^2 - \rho^{(1)}\left(\omega^2 / k^2\right)\right),$$

$$K2_{23} = \left(e_{15}^{(1)} + e_{31}^{(1)}\right) p_1,$$

$$K2_{31} = \left(e_{33}^{(1)} + e_{15}^{(1)} {p_1}^2\right),$$

$$K2_{32} = \left(e_{15}^{(1)} + e_{31}^{(1)}\right) p_1,$$

$$K2_{33} = -\left(\varepsilon_{33}^{(1)} + \varepsilon_{11}^{(1)} {p_1}^2\right). \tag{2.43}$$

(2.41)'de $R^{(1)}$ yerine p_2 yazılarak ve bu değerler kullanılarak (2.23)'ten α_3 ve β_3, $-p_2$ yazılarak α_4 ve β_4, p_3 yazılarak α_5 ve β_5, $-p_3$ yazılarak α_6 ve β_6 elde edilir.

Bulunan bu değerlere bağlı olarak (2.7)'deki gerilme ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\sigma_{12}^{(1)} = \begin{pmatrix} X_1^{(1)}\left(c_{44}^{(1)} p_1 - \alpha_1 c_{44}^{(1)} + \beta_1 e_{15}^{(1)} p_1\right)\cos\left(p_1 k x_2\right) \\ + X_2^{(1)}\left(-c_{44}^{(1)} p_1 - \alpha_2 c_{44}^{(1)} - \beta_2 e_{15}^{(1)} p_1\right)\sin\left(p_1 k x_2\right) \\ + X_3^{(1)}\left(c_{44}^{(1)} p_2 - \alpha_3 c_{44}^{(1)} + \beta_3 e_{15}^{(1)} p_2\right) e^{p_2 k x_2} \\ + X_4^{(1)}\left(-c_{44}^{(1)} p_2 - \alpha_4 c_{44}^{(1)} - \beta_4 e_{15}^{(1)} p_2\right) e^{-p_2 k x_2} \\ + X_5^{(1)}\left(c_{44}^{(1)} p_3 - \alpha_5 c_{44}^{(1)} + \beta_5 e_{15}^{(1)} p_3\right) e^{p_3 k x_2} \\ + X_6^{(1)}\left(-c_{44}^{(1)} p_3 - \alpha_6 c_{44}^{(1)} - \beta_6 e_{15}^{(1)} p_3\right) e^{-p_3 k x_2} \end{pmatrix} k \sin(k x_1 - \omega t),$$

$$\sigma_{22}^{(1)} = \begin{pmatrix} X_1^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} - \alpha_1 c_{11}^{(1)} p_1 + \beta_1 e_{31}^{(1)}\right)\sin(p_1 k x_2) \\ +X_2^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} + \alpha_2 c_{11}^{(1)} p_1 + \beta_2 e_{31}^{(1)}\right)\cos(p_1 k x_2) \\ +X_3^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} + \alpha_3 c_{11}^{(1)} p_2 + \beta_3 e_{31}^{(1)}\right)e^{p_2 k x_2} \\ +X_4^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} - \alpha_4 c_{11}^{(1)} p_2 + \beta_4 e_{31}^{(1)}\right)e^{-p_2 k x_2} \\ +X_5^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} + \alpha_5 c_{11}^{(1)} p_3 + \beta_5 e_{31}^{(1)}\right)e^{p_3 k x_2} \\ +X_6^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} - \alpha_6 c_{11}^{(1)} p_3 + \beta_6 e_{31}^{(1)}\right)e^{-p_3 k x_2} \end{pmatrix} k\cos(k x_1 - \omega t). \qquad (2.44)$$

(2.44) piezoelektrik malzeme polarizasyon doğrultusunun Ox_1 ekseni ile çakıştığı ve dalga hızının $c > c_2^{(1)}$ olduğu durum için katmanda elde edilen gerilme ifadeleridir.

Dalga hızı $c < c_2^{(1)}$ olduğu durumda $R^{(1)}$ parametresine ait elde edilen altı reel kök (2.36)'daki biçimde olmaktadır. Bundan dolayı katmandaki mekanik yer değiştirmeler ve elektrik potansiyeli aşağıdaki gibidir:

$$u_1^{(1)} = \begin{pmatrix} X_1^{(1)}e^{p_1 k x_2} + X_2^{(1)}e^{-p_1 k x_2} + X_3^{(1)}e^{p_2 k x_2} + X_4^{(1)}e^{-p_2 k x_2} \\ +X_5^{(1)}e^{p_3 k x_2} + X_6^{(1)}e^{-p_3 k x_2} \end{pmatrix}\sin(k x_1 - \omega t),$$

$$u_2^{(1)} = \begin{pmatrix} X_1^{(1)}\alpha_1 e^{p_1 k x_2} + X_2^{(1)}\alpha_2 e^{-p_1 k x_2} + X_3^{(1)}\alpha_3 e^{p_2 k x_2} + X_4^{(1)}\alpha_4 e^{-p_2 k x_2} \\ +X_5^{(1)}\alpha_5 e^{p_3 k x_2} + X_6^{(1)}\alpha_6 e^{-p_3 k x_2} \end{pmatrix}\cos\left(k x_1 - \omega t\right),$$

$$\varphi^{(1)} = \begin{pmatrix} X_1^{(1)}\beta_1 e^{p_1 k x_2} + X_2^{(1)}\beta_2 e^{-p_1 k x_2} + X_3^{(1)}\beta_3 e^{p_2 k x_2} + X_4^{(1)}\beta_4 e^{-p_2 k x_2} \\ +X_5^{(1)}\beta_5 e^{p_3 k x_2} + X_6^{(1)}\beta_6 e^{-p_3 k x_2} \end{pmatrix}\sin\left(k x_1 - \omega t\right). \qquad (2.45)$$

(2.41)'de $R^{(1)}$ yerine p_1 yazılarak ve bu değerler kullanılarak (2.23)'ten α_1 ve β_1, $-p_1$ yazılarak α_2 ve β_2, p_2 yazılarak α_3 ve β_3, $-p_2$ yazılarak α_4 ve β_4 elde edilir, p_3 yazılarak α_5 ve β_5, $-p_3$ yazılarak α_6 ve β_6 elde edilir.

Bulunan bu değerlere bağlı olarak (2.7)'deki gerilme ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\sigma_{12}^{(1)} = \begin{pmatrix} X_1^{(1)}\left(c_{44}^{(1)} p_1 - \alpha_1 c_{44}^{(1)} + \beta_1 e_{15}^{(1)} p_1\right) e^{p_1 k x_2} \\ + X_2^{(1)}\left(-c_{44}^{(1)} p_1 - \alpha_2 c_{44}^{(1)} - \beta_2 e_{15}^{(1)} p_1\right) e^{-p_1 k x_2} \\ + X_3^{(1)}\left(c_{44}^{(1)} p_2 - \alpha_3 c_{44}^{(1)} + \beta_3 e_{15}^{(1)} p_2\right) e^{p_2 k x_2} \\ + X_4^{(1)}\left(-c_{44}^{(1)} p_2 - \alpha_4 c_{44}^{(1)} - \beta_4 e_{15}^{(1)} p_2\right) e^{-p_2 k x_2} \\ + X_5^{(1)}\left(c_{44}^{(1)} p_3 - \alpha_5 c_{44}^{(1)} + \beta_5 e_{15}^{(1)} p_3\right) e^{p_3 k x_2} \\ + X_6^{(1)}\left(-c_{44}^{(1)} p_3 - \alpha_6 c_{44}^{(1)} - \beta_6 e_{15}^{(1)} p_3\right) e^{-p_3 k x_2} \end{pmatrix} k \sin(k x_1 - \omega t),$$

$$\sigma_{22}^{(1)} = \begin{pmatrix} X_1^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} + \alpha_1 c_{11}^{(1)} p_1 + \beta_1 e_{31}^{(1)}\right) e^{p_1 k x_2} \\ + X_2^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} - \alpha_2 c_{11}^{(1)} p_1 + \beta_2 e_{31}^{(1)}\right) e^{-p_1 k x_2} \\ + X_3^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} + \alpha_3 c_{11}^{(1)} p_2 + \beta_3 e_{31}^{(1)}\right) e^{p_2 k x_2} \\ + X_4^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} - \alpha_4 c_{11}^{(1)} p_2 + \beta_4 e_{31}^{(1)}\right) e^{-p_2 k x_2} \\ + X_5^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} + \alpha_5 c_{11}^{(1)} p_3 + \beta_5 e_{31}^{(1)}\right) e^{p_3 k x_2} \\ + X_6^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} - \alpha_6 c_{11}^{(1)} p_3 + \beta_6 e_{31}^{(1)}\right) e^{-p_3 k x_2} \end{pmatrix} k \cos(k x_1 - \omega t). \quad (2.46)$$

(2.46) piezoelektrik malzeme polarizasyon doğrultusunun Ox_1 ekseni ile çakıştığı ve dalga hızının $c < c_2^{(1)}$ olduğu durum için katmanda elde edilen gerilme ifadeleridir.

2.2.2 Yarıdüzlemde Gerilme İfadelerinin Bulunması

(2.12)'deki ifadeler (2.4)'te yerlerine yazıldığında yarıdüzlemde mekanik yer değiştirmeler cinsinden hareket denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\left(A_{11}^{(2)} + \sigma_{11}^{(2),0}\right)\frac{\partial^2 u_1^{(2)}}{\partial x_1^2} + \left(\mu_{12}^{(2)} + \sigma_{22}^{(2),0}\right)\frac{\partial^2 u_1^{(2)}}{\partial x_2^2} + \left(A_{12}^{(2)} + \mu_{12}^{(2)}\right)\frac{\partial^2 u_2^{(1)}}{\partial x_1 \partial x_2} = \rho^{(2)}\frac{\partial^2 u_1^{(2)}}{\partial t^2},$$

$$\left(A_{12}^{(2)} + \mu_{12}^{(2)}\right)\frac{\partial^2 u_1^{(2)}}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(\mu_{12}^{(2)} + \sigma_{11}^{(2),0}\right)\frac{\partial^2 u_2^{(2)}}{\partial x_1^2} + \left(A_{22}^{(2)} + \sigma_{22}^{(2),0}\right)\frac{\partial^2 u_2^{(2)}}{\partial x_2^2} = \rho^{(2)}\frac{\partial^2 u_2^{(2)}}{\partial t^2}. \quad (2.47)$$

(2.20)'ye benzer şekilde yarıdüzlem için mekanik yer değiştirmeler aşağıdaki gibi temsil edilebilir:

$$u_1^{(2)} = X^{(2)} e^{R^{(2)} k x_2} \sin(k x_1 - \omega t),$$

$$u_2^{(2)} = Y^{(2)} e^{R^{(2)} k x_2} \cos(k x_1 - \omega t). \quad (2.48)$$

(2.48)'deki ifadeler (2.47)'de yerlerine yazıldığında aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\left(-A_{11}^{(2)}-\sigma_{11}^{(2),0}+\left(\mu_{12}^{(2)}+\sigma_{22}^{(2),0}\right)\left(R^{(2)}\right)^2+\rho^{(2)}\left(\omega^2/k^2\right)\right)X^{(2)}-\left(A_{12}^{(2)}+\mu_{12}^{(2)}\right)R^{(2)}Y^{(2)}=0,$$

$$\left(A_{12}^{(2)}+\mu_{12}^{(2)}\right)R^{(2)}X^{(2)}$$
$$+\left(-\mu_{12}^{(2)}-\sigma_{11}^{(2),0}+\left(A_{22}^{(2)}+\sigma_{22}^{(2),0}\right)\left(R^{(2)}\right)^2+\rho^{(2)}\left(\omega^2/k^2\right)\right)Y^{(2)}=0, \quad (2.49)$$

veya

$$\begin{bmatrix}\left(k_{11}+\left(R^{(2)}\right)^2\right) & k_{12}R^{(2)}\\ k_{21}R^{(2)} & \left(k_{22}+\left(R^{(2)}\right)^2\right)\end{bmatrix}.\begin{Bmatrix}X^{(2)}\\ Y^{(2)}\end{Bmatrix}=\left[K^{(2)}\right].X^{(2)}\begin{Bmatrix}1\\ \gamma\end{Bmatrix}=0. \quad (2.50)$$

Burada

$$k_{11}=\frac{\left(-A_{11}^{(2)}-\sigma_{11}^{(2),0}+\rho^{(2)}\left(\omega^2/k^2\right)\right)}{\left(\mu_{12}^{(2)}+\sigma_{22}^{(2),0}\right)},\quad k_{12}=-\frac{\left(A_{12}^{(2)}+\mu_{12}^{(2)}\right)}{\left(\mu_{12}^{(2)}+\sigma_{22}^{(2),0}\right)},$$

$$k_{21}=\frac{\left(A_{12}^{(2)}+\mu_{12}^{(2)}\right)}{\left(A_{22}^{(2)}+\sigma_{22}^{(2),0}\right)},\quad k_{22}=\frac{-\mu_{12}^{(2)}-\sigma_{11}^{(2),0}+\rho^{(2)}\left(\omega^2/k^2\right)}{\left(A_{22}^{(2)}+\sigma_{22}^{(2),0}\right)}. \quad (2.51)$$

$X^{(2)}$ ve $Y^{(2)}$'nin sıfırdan farklı çözümlerini elde etmek için (2.49)'daki denklem takımının katsayılar matrisinin ($\left[K^{(2)}\right]$) determinantı sıfır olmalıdır. Bu eşitlik aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\left(R^{(2)}\right)^4+\left(k_{11}+k_{22}-k_{12}k_{21}\right)\left(R^{(2)}\right)^2+\left(k_{11}k_{22}\right)=0 \quad (2.52)$$

(2.52)'nin çözümünden $R^{(2)}$ için dört kök elde edilir. Yarıdüzlem için aşağıdaki kökler alınır:

$$R_1^{(2)}=\sqrt{-\frac{\left(k_{11}+k_{22}-k_{12}k_{21}\right)}{2}+\sqrt{\left(\frac{\left(k_{11}+k_{22}-k_{12}k_{21}\right)}{2}\right)^2-\left(k_{11}k_{22}\right)}},$$

$$R_2^{(2)}=\sqrt{-\frac{\left(k_{11}+k_{22}-k_{12}k_{21}\right)}{2}-\sqrt{\left(\frac{\left(k_{11}+k_{22}-k_{12}k_{21}\right)}{2}\right)^2-\left(k_{11}k_{22}\right)}}. \quad (2.53)$$

Bu durumda (2.48)'deki ifadeler aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$u_1^{(2)}=\left(X_1^{(2)}e^{R_1^{(2)}kx_2}+X_2^{(2)}e^{R_2^{(2)}kx_2}\right)\sin(kx_1-\omega t),$$

$$u_2^{(2)} = \left(Y_1^{(2)} e^{R_1^{(2)} k x_2} + Y_2^{(2)} e^{R_2^{(2)} k x_2} \right) \cos(k x_1 - \omega t). \tag{2.54}$$

(2.50)'den $Y_1^{(2)} = \gamma_1 X_1^{(2)}$ ve $Y_2^{(2)} = \gamma_2 X_2^{(2)}$ eşitlikleri sağlanarak yarıdüzlemdeki mekanik yer değiştirmeler aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$u_1^{(2)} = \left(X_1^{(2)} e^{R_1^{(2)} k x_2} + X_2^{(2)} e^{R_2^{(2)} k x_2} \right) \sin(k x_1 - \omega t),$$

$$u_2^{(2)} = \left(X_1^{(2)} \gamma_1 e^{R_1^{(2)} k x_2} + X_2^{(2)} \gamma_2 e^{R_2^{(2)} k x_2} \right) \cos(k x_1 - \omega t). \tag{2.55}$$

Burada

$$\gamma_1 = -\frac{k_{21} R_1^{(2)}}{k_{22} + \left(R_1^{(2)} \right)^2}, \quad \gamma_2 = -\frac{k_{21} R_2^{(2)}}{k_{22} + \left(R_2^{(2)} \right)^2}. \tag{2.56}$$

(2.12)'deki gerilme ifadeleri (2.55) kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\sigma_{12}^{(2)} = \left(X_1^{(2)} \mu_{12}^{(2)} \left(R_1^{(2)} - \gamma_1 \right) e^{R_1^{(2)} k x_2} + X_2^{(2)} \mu_{12}^{(2)} \left(R_2^{(2)} - \gamma_2 \right) e^{R_2^{(2)} k x_2} \right) k \sin(k x_1 - \omega t),$$

$$\sigma_{22}^{(2)} = \begin{pmatrix} X_1^{(2)} \left(A_{12}^{(2)} + \gamma_1 A_{22}^{(2)} R_1^{(2)} \right) e^{R_1^{(2)} k x_2} \\ + X_2^{(2)} \left(A_{12}^{(2)} + \gamma_2 A_{22}^{(2)} R_2^{(2)} \right) e^{R_2^{(2)} k x_2} \end{pmatrix} k \cos(k x_1 - \omega t). \tag{2.57}$$

2.2.3 Kalınlık Doğrultusunda Polarizasyon Durumunda Dispersiyon Denklemlerinin Bulunması

Piezoelektrik malzeme polarizasyon doğrultusunun Ox_2 ekseni ile çakıştığı, dalga hızının $c > c_2^{(1)}$ olduğu ve piezoelektrik dış katmaların üst ve alt yüzey elektrotları elektriksel kısa devre olduğu durumda (2.14-2.16)'daki temas ve sınır şartlarından bilinmeyen sekiz $X_1^{(1)}$, $X_2^{(1)}$, $X_3^{(1)}$, $X_4^{(1)}$, $X_5^{(1)}$, $X_6^{(1)}$, $X_1^{(2)}$ ve $X_2^{(2)}$ sabitlerinin çözümü için aşağıdaki cebirsel sekiz denklem elde edilir:

$u_1^{(1)}\big|_{x_2=0} = u_1^{(2)}\big|_{x_2=0}$ için birinci denklem:

$$X_2^{(1)} + X_3^{(1)} + X_4^{(1)} + X_5^{(1)} + X_6^{(1)} - X_1^{(2)} - X_2^{(2)} = 0,$$

$u_2^{(1)}\big|_{x_2=0} = u_2^{(2)}\big|_{x_2=0}$ için ikinci denklem:

$$X_1^{(1)} \alpha_1 + X_3^{(1)} \alpha_3 + X_4^{(1)} \alpha_4 + X_5^{(1)} \alpha_5 + X_6^{(1)} \alpha_6 - X_1^{(2)} \gamma_1 - X_2^{(2)} \gamma_2 = 0,$$

$\sigma_{12}^{(1)}\big|_{x_2=0} = \sigma_{12}^{(2)}\big|_{x_2=0}$ için üçüncü denklem:

$$\left.\begin{array}{l} X_1^{(1)}\left(c_{44}^{(1)}p_1 - \alpha_1 c_{44}^{(1)} - \beta_1 e_{15}^{(1)}\right) + X_3^{(1)}\left(c_{44}^{(1)}p_2 - \alpha_3 c_{44}^{(1)} - \beta_3 e_{15}^{(1)}\right) \\ + X_4^{(1)}\left(-c_{44}^{(1)}p_2 - \alpha_4 c_{44}^{(1)} - \beta_4 e_{15}^{(1)}\right) + X_5^{(1)}\left(c_{44}^{(1)}p_3 - \alpha_5 c_{44}^{(1)} - \beta_5 e_{15}^{(1)}\right) \\ + X_6^{(1)}\left(-c_{44}^{(1)}p_3 - \alpha_6 c_{44}^{(1)} - \beta_6 e_{15}^{(1)}\right) - X_1^{(2)}\mu_{12}^{(2)}\left(R_1^{(2)} - \gamma_1\right) - X_2^{(2)}\mu_{12}^{(2)}\left(R_2^{(2)} - \gamma_2\right) \end{array}\right\} = 0,$$

$\sigma_{22}^{(1)}\big|_{x_2=0} = \sigma_{22}^{(2)}\big|_{x_2=0}$ için dördüncü denklem:

$$\left.\begin{array}{l} X_2^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} + \alpha_2 c_{33}^{(1)}p_1 + \beta_2 e_{33}^{(1)}p_1\right) + X_3^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} + \alpha_3 c_{33}^{(1)}p_2 + \beta_3 e_{33}^{(1)}p_2\right) \\ + X_4^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} - \alpha_4 c_{33}^{(1)}p_2 - \beta_4 e_{33}^{(1)}p_2\right) + X_5^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} + \alpha_5 c_{33}^{(1)}p_3 + \beta_5 e_{33}^{(1)}p_3\right) \\ + X_6^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} - \alpha_6 c_{33}^{(1)}p_3 - \beta_6 e_{33}^{(1)}p_3\right) - X_1^{(2)}\left(A_{12}^{(2)} + \gamma_1 A_{22}^{(2)}R_1^{(2)}\right) - X_2^{(2)}\left(A_{12}^{(2)} + \gamma_2 A_{22}^{(2)}R_2^{(2)}\right) \end{array}\right\} = 0,$$

$\sigma_{12}^{(1)}\big|_{x_2=h} = 0$ için beşinci denklem:

$$\left.\begin{array}{l} X_1^{(1)}\left(c_{44}^{(1)}p_1 - \alpha_1 c_{44}^{(1)} - \beta_1 e_{15}^{(1)}\right)\cos\left(p_1 kh\right) + X_2^{(1)}\left(-c_{44}^{(1)}p_1 - \alpha_2 c_{44}^{(1)} - \beta_2 e_{15}^{(1)}\right)\sin\left(p_1 kh\right) \\ + X_3^{(1)}\left(c_{44}^{(1)}p_2 - \alpha_3 c_{44}^{(1)} - \beta_3 e_{15}^{(1)}\right)e^{p_2 kh} + X_4^{(1)}\left(-c_{44}^{(1)}p_2 - \alpha_4 c_{44}^{(1)} - \beta_4 e_{15}^{(1)}\right)e^{-p_2 kh} \\ + X_5^{(1)}\left(c_{44}^{(1)}p_3 - \alpha_5 c_{44}^{(1)} - \beta_5 e_{15}^{(1)}\right)e^{p_3 kh} + X_6^{(1)}\left(-c_{44}^{(1)}p_3 - \alpha_6 c_{44}^{(1)} - \beta_6 e_{15}^{(1)}\right)e^{-p_3 kh} \end{array}\right\} = 0,$$

$\sigma_{22}^{(1)}\big|_{x_2=h} = 0$ için altıncı denklem:

$$\left.\begin{array}{l} X_1^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} - \alpha_1 c_{33}^{(1)}p_1 - \beta_1 e_{33}^{(1)}p_1\right)\sin(p_1 kh) + X_2^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} + \alpha_2 c_{33}^{(1)}p_1 + \beta_2 e_{33}^{(1)}p_1\right)\cos(p_1 kh) \\ + X_3^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} + \alpha_3 c_{33}^{(1)}p_2 + \beta_3 e_{33}^{(1)}p_2\right)e^{p_2 kh} + X_4^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} - \alpha_4 c_{33}^{(1)}p_2 - \beta_4 e_{33}^{(1)}p_2\right)e^{-p_2 kh} \\ + X_5^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} + \alpha_5 c_{33}^{(1)}p_3 + \beta_5 e_{33}^{(1)}p_3\right)e^{p_3 kh} + X_6^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} - \alpha_6 c_{33}^{(1)}p_3 - \beta_6 e_{33}^{(1)}p_3\right)e^{-p_3 kh} \end{array}\right\} = 0,$$

$\varphi^{(1)}\big|_{x_2=0} = 0$ için yedinci denklem:

$$X_1^{(1)}\beta_1 + X_3^{(1)}\beta_3 + X_4^{(1)}\beta_4 + X_5^{(1)}\beta_5 + X_6^{(1)}\beta_6 = 0,$$

$\varphi^{(1)}\big|_{x_2=h} = 0$ için sekizinci denklem:

$$\left.\begin{array}{l} X_1^{(1)}\beta_1\cos\left(p_1 kh\right) + X_2^{(1)}\beta_2\sin\left(p_1 kh\right) + X_3^{(1)}\beta_3 e^{p_2 kh} \\ \qquad + X_4^{(1)}\beta_4 e^{-p_2 kh} + X_5^{(1)}\beta_5 e^{p_3 kh} + X_6^{(1)}\beta_6 e^{-p_3 kh} \end{array}\right\} = 0. \qquad (2.58)$$

(2.58)'deki denklemlerde katmandaki mekanik yer değiştirmeler ve elektrik potansiyeli için (2.29), katmandaki gerilmeler ve elektrik yer değiştirme için (2.35), yarıdüzlemdeki

mekanik yer değiştirmeler için (2.55) ve yarıdüzlemdeki gerilmeler için (2.57) kullanılmıştır. (2.58)'deki denklem takımının sıfırdan farklı çözümü için katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşit olmalıdır. Bu eşitlik piezoelektrik katman ve metal yarıdüzlemden oluşan sistemde yüzey dalgalarının dispersiyon denklemidir ve temsili olarak aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\det\left\|\alpha_{nm}(c/c_2^{(1)}, kh)\right\| = 0, \quad (n,m = 1,2,...,8). \tag{2.59}$$

Burada α_{nm} değerleri (2.58)'den kolaylıkla bulunabilir.

Dalga hızının $c > c_2^{(1)}$ olduğu ve piezoelektrik dış katmaların üst ve alt yüzey elektrotları elektriksel açık devre olduğu durumda (2.14), (2.15), (2.17)'deki temas ve sınır şartları kullanılır. Dolayısıyla (2.58)'deki yedinci ve sekizinci denklem yerine aşağıdaki iki denklem kullanılır:

$D_2^{(1)}\big|_{x_2=0} = 0$ için yedinci denklem:

$$\left.\begin{aligned} &X_2^{(1)}\left(e_{31}^{(1)} + \alpha_2 e_{33}^{(1)} p_1 - \beta_2 \varepsilon_{33}^{(1)} p_1\right) + X_3^{(1)}\left(e_{31}^{(1)} + \alpha_3 e_{33}^{(1)} p_2 - \beta_3 \varepsilon_{33}^{(1)} p_2\right) \\ &+X_4^{(1)}\left(e_{31}^{(1)} - \alpha_4 e_{33}^{(1)} p_2 + \beta_4 \varepsilon_{33}^{(1)} p_2\right) + X_5^{(1)}\left(e_{31}^{(1)} + \alpha_5 e_{33}^{(1)} p_3 - \beta_5 \varepsilon_{33}^{(1)} p_3\right) = 0, \\ &+X_6^{(1)}\left(e_{31}^{(1)} - \alpha_6 e_{33}^{(1)} p_3 + \beta_6 \varepsilon_{33}^{(1)} p_3\right) \end{aligned}\right)$$

$D_2^{(1)}\big|_{x_2=h} = 0$ için sekizinci denklem:

$$\left.\begin{aligned} &X_1^{(1)}\left(e_{31}^{(1)} - \alpha_1 e_{33}^{(1)} p_1 + \beta_1 \varepsilon_{33}^{(1)} p_1\right)\sin(p_1 kh) \\ &+X_2^{(1)}\left(e_{31}^{(1)} + \alpha_2 e_{33}^{(1)} p_1 - \beta_2 \varepsilon_{33}^{(1)} p_1\right)\cos(p_1 kh) \\ &+X_3^{(1)}\left(e_{31}^{(1)} + \alpha_3 e_{33}^{(1)} p_2 - \beta_3 \varepsilon_{33}^{(1)} p_2\right)e^{p_2 kh} + X_4^{(1)}\left(e_{31}^{(1)} - \alpha_4 e_{33}^{(1)} p_2 + \beta_4 \varepsilon_{33}^{(1)} p_2\right)e^{-p_2 kh} \\ &+X_5^{(1)}\left(e_{31}^{(1)} + \alpha_5 e_{33}^{(1)} p_3 - \beta_5 \varepsilon_{33}^{(1)} p_3\right)e^{p_3 kh} + X_6^{(1)}\left(e_{31}^{(1)} - \alpha_6 e_{33}^{(1)} p_3 + \beta_6 \varepsilon_{33}^{(1)} p_3\right)e^{-p_3 kh} \end{aligned}\right) = 0. \tag{2.60}$$

Piezoelektrik malzeme polarizasyon doğrultusunun Ox_2 ekseni ile çakıştığı, dalga yayılım hızının $c < c_2^{(1)}$ olduğu ve piezoelektrik dış katmaların üst ve alt yüzey elektrotları elektriksel kısa devre olduğu durumda (2.58)'deki denklemlerin yerini aşağıdaki cebirsel sekiz denklem alır:

$u_1^{(1)}\big|_{x_2=0} = u_1^{(2)}\big|_{x_2=0}$ için birinci denklem:

$$X_1^{(1)} + X_2^{(1)} + X_3^{(1)} + X_4^{(1)} + X_5^{(1)} + X_6^{(1)} - X_1^{(2)} - X_2^{(2)} = 0,$$

$u_2^{(1)}\big|_{x_2=0} = u_2^{(2)}\big|_{x_2=0}$ için ikinci denklem:

$$X_1^{(1)}\alpha_1 + X_2^{(1)}\alpha_2 + X_3^{(1)}\alpha_3 + X_4^{(1)}\alpha_4 + X_5^{(1)}\alpha_5 + X_6^{(1)}\alpha_6 - X_1^{(2)}\gamma_1 - X_2^{(2)}\gamma_2 = 0,$$

$\sigma_{12}^{(1)}\big|_{x_2=0} = \sigma_{12}^{(2)}\big|_{x_2=0}$ için üçüncü denklem:

$$\left.\begin{array}{l} X_1^{(1)}\left(c_{44}^{(1)}p_1 - \alpha_1 c_{44}^{(1)} - \beta_1 e_{15}^{(1)}\right) + X_2^{(1)}\left(-c_{44}^{(1)}p_1 - \alpha_2 c_{44}^{(1)} - \beta_2 e_{15}^{(1)}\right) \\ + X_3^{(1)}\left(c_{44}^{(1)}p_2 - \alpha_3 c_{44}^{(1)} - \beta_3 e_{15}^{(1)}\right) + X_4^{(1)}\left(-c_{44}^{(1)}p_2 - \alpha_4 c_{44}^{(1)} - \beta_4 e_{15}^{(1)}\right) \\ + X_5^{(1)}\left(c_{44}^{(1)}p_3 - \alpha_5 c_{44}^{(1)} - \beta_5 e_{15}^{(1)}\right) + X_6^{(1)}\left(-c_{44}^{(1)}p_3 - \alpha_6 c_{44}^{(1)} - \beta_6 e_{15}^{(1)}\right) \\ - X_1^{(2)}\mu_{12}^{(2)}\left(R_1^{(2)} - \gamma_1\right) - X_2^{(2)}\mu_{12}^{(2)}\left(R_2^{(2)} - \gamma_2\right) \end{array}\right\} = 0,$$

$\sigma_{22}^{(1)}\big|_{x_2=0} = \sigma_{22}^{(2)}\big|_{x_2=0}$ için dördüncü denklem:

$$\left.\begin{array}{l} X_1^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} + \alpha_1 c_{33}^{(1)}p_1 + \beta_1 e_{33}^{(1)}p_1\right) + X_2^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} - \alpha_2 c_{33}^{(1)}p_1 - \beta_2 e_{33}^{(1)}p_1\right) \\ + X_3^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} + \alpha_3 c_{33}^{(1)}p_2 + \beta_3 e_{33}^{(1)}p_2\right) + X_4^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} - \alpha_4 c_{33}^{(1)}p_2 - \beta_4 e_{33}^{(1)}p_2\right) \\ + X_5^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} + \alpha_5 c_{33}^{(1)}p_3 + \beta_5 e_{33}^{(1)}p_3\right) + X_6^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} - \alpha_6 c_{33}^{(1)}p_3 - \beta_6 e_{33}^{(1)}p_3\right) \\ - X_1^{(2)}\left(A_{12}^{(2)} + \gamma_1 A_{22}^{(2)}R_1^{(2)}\right) - X_2^{(2)}\left(A_{12}^{(2)} + \gamma_2 A_{22}^{(2)}R_2^{(2)}\right) \end{array}\right\} = 0,$$

$\sigma_{12}^{(1)}\big|_{x_2=h} = 0$ için beşinci denklem:

$$\left.\begin{array}{l} X_1^{(1)}\left(c_{44}^{(1)}p_1 - \alpha_1 c_{44}^{(1)} - \beta_1 e_{15}^{(1)}\right)e^{p_1 kh} + X_2^{(1)}\left(-c_{44}^{(1)}p_1 - \alpha_2 c_{44}^{(1)} - \beta_2 e_{15}^{(1)}\right)e^{-p_1 kh} \\ + X_3^{(1)}\left(c_{44}^{(1)}p_2 - \alpha_3 c_{44}^{(1)} - \beta_3 e_{15}^{(1)}\right)e^{p_2 kh} + X_4^{(1)}\left(-c_{44}^{(1)}p_2 - \alpha_4 c_{44}^{(1)} - \beta_4 e_{15}^{(1)}\right)e^{-p_2 kh} \\ + X_5^{(1)}\left(c_{44}^{(1)}p_3 - \alpha_5 c_{44}^{(1)} - \beta_5 e_{15}^{(1)}\right)e^{p_3 kh} + X_6^{(1)}\left(-c_{44}^{(1)}p_3 - \alpha_6 c_{44}^{(1)} - \beta_6 e_{15}^{(1)}\right)e^{-p_3 kh} \end{array}\right\} = 0,$$

$\sigma_{22}^{(1)}\big|_{x_2=h} = 0$ için altıncı denklem:

$$\left.\begin{array}{l} X_1^{(1)}\left(c_{44}^{(1)}p_1 - \alpha_1 c_{44}^{(1)} - \beta_1 e_{15}^{(1)}\right)e^{p_1 kh} + X_2^{(1)}\left(-c_{44}^{(1)}p_1 - \alpha_2 c_{44}^{(1)} - \beta_2 e_{15}^{(1)}\right)e^{-p_1 kh} \\ + X_3^{(1)}\left(c_{44}^{(1)}p_2 - \alpha_3 c_{44}^{(1)} - \beta_3 e_{15}^{(1)}\right)e^{p_2 kh} + X_4^{(1)}\left(-c_{44}^{(1)}p_2 - \alpha_4 c_{44}^{(1)} - \beta_4 e_{15}^{(1)}\right)e^{-p_2 kh} \\ + X_5^{(1)}\left(c_{44}^{(1)}p_3 - \alpha_5 c_{44}^{(1)} - \beta_5 e_{15}^{(1)}\right)e^{p_3 kh} + X_6^{(1)}\left(-c_{44}^{(1)}p_3 - \alpha_6 c_{44}^{(1)} - \beta_6 e_{15}^{(1)}\right)e^{-p_3 kh} \end{array}\right\} = 0,$$

$\varphi^{(1)}\big|_{x_2=0} = 0$ için yedinci denklem:

$$X_1^{(1)}\beta_1 + X_2^{(1)}\beta_2 + X_3^{(1)}\beta_3 + X_4^{(1)}\beta_4 + X_5^{(1)}\beta_5 + X_6^{(1)}\beta_6 = 0,$$

$\varphi^{(1)}\big|_{x_2=h} = 0$ için sekizinci denklem:

$$X_1^{(1)}\beta_1 e^{p_1 kh} + X_2^{(1)}\beta_2 e^{-p_1 kh} + X_3^{(1)}\beta_3 e^{p_2 kh} + X_4^{(1)}\beta_4 e^{-p_2 kh} + X_5^{(1)}\beta_5 e^{p_3 kh} + X_6^{(1)}\beta_6 e^{-p_3 kh} = 0. \quad (2.61)$$

(2.61)'deki denklemlerde katmandaki mekanik yer değiştirmeler ve elektrik potansiyeli için (2.37), katmandaki gerilmeler ve elektrik yer değiştirme için (2.38), yarıdüzlemdeki mekanik yer değiştirmeler için (2.55) ve yarıdüzlemdeki gerilmeler için (2.57) kullanılmıştır.

Dalga hızının $c < c_2^{(1)}$ olduğu ve piezoelektrik dış katmaların üst ve alt yüzey elektrotları elektriksel açık devre olduğu durumda (2.14), (2.15), (2.17)'deki temas ve sınır şartları kullanılır. Dolayısıyla (2.61)'deki yedinci ve sekizinci denklem yerine aşağıdaki iki denklem kullanılır:

$D_2^{(1)}\big|_{x_2=0} = 0$ için yedinci denklem:

$$\begin{pmatrix} X_1^{(1)}\left(e_{31}^{(1)} + \alpha_1 e_{33}^{(1)} p_1 - \beta_1 \varepsilon_{33}^{(1)} p_1\right) + X_2^{(1)}\left(e_{31}^{(1)} - \alpha_2 e_{33}^{(1)} p_1 + \beta_2 \varepsilon_{33}^{(1)} p_1\right) \\ + X_3^{(1)}\left(e_{31}^{(1)} + \alpha_3 e_{33}^{(1)} p_2 - \beta_3 \varepsilon_{33}^{(1)} p_2\right) + X_4^{(1)}\left(e_{31}^{(1)} - \alpha_4 e_{33}^{(1)} p_2 + \beta_4 \varepsilon_{33}^{(1)} p_2\right) \\ + X_5^{(1)}\left(e_{31}^{(1)} + \alpha_5 e_{33}^{(1)} p_3 - \beta_5 \varepsilon_{33}^{(1)} p_3\right) + X_6^{(1)}\left(e_{31}^{(1)} - \alpha_6 e_{33}^{(1)} p_3 + \beta_6 \varepsilon_{33}^{(1)} p_3\right) \end{pmatrix} = 0,$$

$D_2^{(1)}\big|_{x_2=h} = 0$ için sekizinci denklem:

$$\begin{pmatrix} X_1^{(1)}\left(e_{31}^{(1)} + \alpha_1 e_{33}^{(1)} p_1 - \beta_1 \varepsilon_{33}^{(1)} p_1\right) + X_2^{(1)}\left(e_{31}^{(1)} - \alpha_2 e_{33}^{(1)} p_1 + \beta_2 \varepsilon_{33}^{(1)} p_1\right) \\ + X_3^{(1)}\left(e_{31}^{(1)} + \alpha_3 e_{33}^{(1)} p_2 - \beta_3 \varepsilon_{33}^{(1)} p_2\right) + X_4^{(1)}\left(e_{31}^{(1)} - \alpha_4 e_{33}^{(1)} p_2 + \beta_4 \varepsilon_{33}^{(1)} p_2\right) \\ + X_5^{(1)}\left(e_{31}^{(1)} + \alpha_5 e_{33}^{(1)} p_3 - \beta_5 \varepsilon_{33}^{(1)} p_3\right) + X_6^{(1)}\left(e_{31}^{(1)} - \alpha_6 e_{33}^{(1)} p_3 + \beta_6 \varepsilon_{33}^{(1)} p_3\right) \end{pmatrix} = 0. \quad (2.62)$$

2.2.4 Uzunluk Doğrultusunda Polarizasyon Durumunda Dispersiyon Denklemlerinin Bulunması

Piezoelektrik malzeme polarizasyon doğrultusunun Ox_1 ekseni ile çakıştığı, dalga hızının $c > c_2^{(1)}$ olduğu ve piezoelektrik dış katmaların üst ve alt yüzey elektrotları elektriksel kısa devre olduğu durumda (2.14-2.16)'daki temas ve sınır şartlarından bilinmeyen sekiz $X_1^{(1)}$, $X_2^{(1)}$, $X_3^{(1)}$, $X_4^{(1)}$, $X_5^{(1)}$, $X_6^{(1)}$, $X_1^{(2)}$ ve $X_2^{(2)}$ sabitlerinin çözümü için aşağıdaki cebirsel sekiz denklem elde edilir:

$u_1^{(1)}\big|_{x_2=0} = u_1^{(2)}\big|_{x_2=0}$ için birinci denklem:

$$X_2^{(1)} + X_3^{(1)} + X_4^{(1)} + X_5^{(1)} + X_6^{(1)} - X_1^{(2)} - X_2^{(2)} = 0,$$

$u_2^{(1)}\big|_{x_2=0} = u_2^{(2)}\big|_{x_2=0}$ için ikinci denklem:

$$X_1^{(1)}\alpha_1 + X_3^{(1)}\alpha_3 + X_4^{(1)}\alpha_4 + X_5^{(1)}\alpha_5 + X_6^{(1)}\alpha_6 - X_1^{(2)}\gamma_1 - X_2^{(2)}\gamma_2 = 0,$$

$\sigma_{12}^{(1)}\big|_{x_2=0} = \sigma_{12}^{(2)}\big|_{x_2=0}$ için üçüncü denklem:

$$\left(\begin{array}{l} X_1^{(1)}\left(c_{44}^{(1)} p_1 - \alpha_1 c_{44}^{(1)} + \beta_1 e_{15}^{(1)} p_1\right) + X_3^{(1)}\left(c_{44}^{(1)} p_2 - \alpha_3 c_{44}^{(1)} + \beta_3 e_{15}^{(1)} p_2\right) \\ + X_4^{(1)}\left(-c_{44}^{(1)} p_2 - \alpha_4 c_{44}^{(1)} - \beta_4 e_{15}^{(1)} p_2\right) + X_5^{(1)}\left(c_{44}^{(1)} p_3 - \alpha_5 c_{44}^{(1)} + \beta_5 e_{15}^{(1)} p_3\right) \\ + X_6^{(1)}\left(-c_{44}^{(1)} p_3 - \alpha_6 c_{44}^{(1)} - \beta_6 e_{15}^{(1)} p_3\right) - X_1^{(2)}\mu_{12}^{(2)}\left(R_1^{(2)} - \gamma_1\right) \\ - X_2^{(2)}\mu_{12}^{(2)}\left(R_2^{(2)} - \gamma_2\right) \end{array}\right) = 0,$$

$\sigma_{22}^{(1)}\big|_{x_2=0} = \sigma_{22}^{(2)}\big|_{x_2=0}$ için dördüncü denklem:

$$\left(\begin{array}{l} X_2^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} + \alpha_2 c_{11}^{(1)} p_1 + \beta_2 e_{31}^{(1)}\right) + X_3^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} + \alpha_3 c_{11}^{(1)} p_2 + \beta_3 e_{31}^{(1)}\right) \\ + X_4^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} - \alpha_4 c_{11}^{(1)} p_2 + \beta_4 e_{31}^{(1)}\right) + X_5^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} + \alpha_5 c_{11}^{(1)} p_3 + \beta_5 e_{31}^{(1)}\right) \\ + X_6^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} - \alpha_6 c_{11}^{(1)} p_3 + \beta_6 e_{31}^{(1)}\right) - X_1^{(2)}\left(A_{12}^{(2)} + \gamma_1 A_{22}^{(2)} R_1^{(2)}\right) \\ - X_2^{(2)}\left(A_{12}^{(2)} + \gamma_2 A_{22}^{(2)} R_2^{(2)}\right) \end{array}\right) = 0,$$

$\sigma_{12}^{(1)}\big|_{x_2=h} = 0$ için beşinci denklem:

$$\left(\begin{array}{l} X_1^{(1)}\left(c_{44}^{(1)} p_1 - \alpha_1 c_{44}^{(1)} + \beta_1 e_{15}^{(1)} p_1\right)\cos\left(p_1 kh\right) \\ + X_2^{(1)}\left(-c_{44}^{(1)} p_1 - \alpha_2 c_{44}^{(1)} - \beta_2 e_{15}^{(1)} p_1\right)\sin\left(p_1 kh\right) \\ + X_3^{(1)}\left(c_{44}^{(1)} p_2 - \alpha_3 c_{44}^{(1)} + \beta_3 e_{15}^{(1)} p_2\right)e^{p_2 kh} + X_4^{(1)}\left(-c_{44}^{(1)} p_2 - \alpha_4 c_{44}^{(1)} - \beta_4 e_{15}^{(1)} p_2\right)e^{-p_2 kh} \\ + X_5^{(1)}\left(c_{44}^{(1)} p_3 - \alpha_5 c_{44}^{(1)} + \beta_5 e_{15}^{(1)} p_3\right)e^{p_3 kh} + X_6^{(1)}\left(-c_{44}^{(1)} p_3 - \alpha_6 c_{44}^{(1)} - \beta_6 e_{15}^{(1)} p_3\right)e^{-p_3 kh} \end{array}\right) = 0,$$

$\sigma_{22}^{(1)}\big|_{x_2=h} = 0$ için altıncı denklem:

$$\left(\begin{array}{l} X_1^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} - \alpha_1 c_{11}^{(1)} p_1 + \beta_1 e_{31}^{(1)}\right)\sin(p_1 kh) + X_2^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} + \alpha_2 c_{11}^{(1)} p_1 + \beta_2 e_{31}^{(1)}\right)\cos(p_1 kh) \\ + X_3^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} + \alpha_3 c_{11}^{(1)} p_2 + \beta_3 e_{31}^{(1)}\right)e^{p_2 kh} + X_4^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} - \alpha_4 c_{11}^{(1)} p_2 + \beta_4 e_{31}^{(1)}\right)e^{-p_2 kh} \\ + X_5^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} + \alpha_5 c_{11}^{(1)} p_3 + \beta_5 e_{31}^{(1)}\right)e^{p_3 kh} + X_6^{(1)}\left(c_{13}^{(1)} - \alpha_6 c_{11}^{(1)} p_3 + \beta_6 e_{31}^{(1)}\right)e^{-p_3 kh} \end{array}\right) = 0,$$

$\varphi^{(1)}\big|_{x_2=0} = 0$ için yedinci denklem:

$$X_2^{(1)}\beta_1 + X_3^{(1)}\beta_3 + X_4^{(1)}\beta_4 + X_5^{(1)}\beta_5 + X_6^{(1)}\beta_6 = 0,$$

$\varphi^{(1)}\big|_{x_2=h} = 0$ için sekizinci denklem:

$$\left(\begin{array}{l} X_1^{(1)}\beta_1 \sin\left(p_1 kh\right) + X_2^{(1)}\beta_2 \cos\left(p_1 kh\right) + X_3^{(1)}\beta_3 e^{p_2 kh} \\ \qquad + X_4^{(1)}\beta_4 e^{-p_2 kh} + X_5^{(1)}\beta_5 e^{p_3 kh} + X_6^{(1)}\beta_6 e^{-p_3 kh} \end{array} \right) = 0. \tag{2.63}$$

(2.63)'teki denklemlerde katmandaki mekanik yer değiştirmeler ve elektrik potansiyeli için (2.42), katmandaki gerilmeler için (2.44), yarıdüzlemdeki mekanik yer değiştirmeler için (2.55) ve yarıdüzlemdeki gerilmeler için (2.57) kullanılmıştır. (2.63)'deki denklem takımının sıfırdan farklı çözümü için katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşit olmalıdır. Bu eşitlik piezoelektrik katman ve metal yarıdüzlemden oluşan sistemde yüzey dalgalarının dispersiyon denklemidir ve temsili olarak aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\det\left\|\beta_{nm}(c/c_2^{(1)}, kh)\right\| = 0, \quad (n, m = 1, 2, ..., 8). \tag{2.64}$$

Piezoelektrik malzeme polarizasyon doğrultusunun Ox_1 ekseni ile çakıştığı, dalga yayılım hızının $c < c_2^{(1)}$ olduğu ve piezoelektrik dış katmaların üst ve alt yüzey elektrotları elektriksel kısa devre olduğu durumda (2.63)'teki denklemlerin yerini aşağıdaki cebirsel sekiz denklem alır:

$u_1^{(1)}\big|_{x_2=0} = u_1^{(2)}\big|_{x_2=0}$ için birinci denklem:

$$X_1^{(1)} + X_2^{(1)} + X_3^{(1)} + X_4^{(1)} + X_5^{(1)} + X_6^{(1)} - X_1^{(2)} - X_2^{(2)} = 0,$$

$u_2^{(1)}\big|_{x_2=0} = u_2^{(2)}\big|_{x_2=0}$ için ikinci denklem:

$$X_1^{(1)}\alpha_1 + X_2^{(1)}\alpha_2 + X_3^{(1)}\alpha_3 + X_4^{(1)}\alpha_4 + X_5^{(1)}\alpha_5 + X_6^{(1)}\alpha_6 - X_1^{(2)}\gamma_1 - X_2^{(2)}\gamma_2 = 0,$$

$\sigma_{12}^{(1)}\big|_{x_2=0} = \sigma_{12}^{(2)}\big|_{x_2=0}$ için üçüncü denklem:

$$\left(\begin{array}{l} X_1^{(1)}\left(c_{44}^{(1)} p_1 - \alpha_1 c_{44}^{(1)} + \beta_1 e_{15}^{(1)} p_1\right) + X_2^{(1)}\left(-c_{44}^{(1)} p_1 - \alpha_2 c_{44}^{(1)} - \beta_2 e_{15}^{(1)} p_1\right) \\ + X_3^{(1)}\left(c_{44}^{(1)} p_2 - \alpha_3 c_{44}^{(1)} + \beta_3 e_{15}^{(1)} p_2\right) + X_4^{(1)}\left(-c_{44}^{(1)} p_2 - \alpha_4 c_{44}^{(1)} - \beta_4 e_{15}^{(1)} p_2\right) \\ + X_5^{(1)}\left(c_{44}^{(1)} p_3 - \alpha_5 c_{44}^{(1)} + \beta_5 e_{15}^{(1)} p_3\right) + X_6^{(1)}\left(-c_{44}^{(1)} p_3 - \alpha_6 c_{44}^{(1)} - \beta_6 e_{15}^{(1)} p_3\right) \\ - X_1^{(2)}\mu_{12}^{(2)}\left(R_1^{(2)} - \gamma_1\right) - X_2^{(2)}\mu_{12}^{(2)}\left(R_2^{(2)} - \gamma_2\right) \end{array} \right) = 0,$$

$\sigma_{22}^{(1)}\big|_{x_2=0} = \sigma_{22}^{(2)}\big|_{x_2=0}$ için dördüncü denklem:

$$\left(\begin{array}{l} X_1^{(1)}\left(c_{13}^{(1)}+\alpha_1 c_{11}^{(1)} p_1+\beta_1 e_{31}^{(1)}\right)+X_2^{(1)}\left(c_{13}^{(1)}-\alpha_2 c_{11}^{(1)} p_1+\beta_2 e_{31}^{(1)}\right) \\ +X_3^{(1)}\left(c_{13}^{(1)}+\alpha_3 c_{11}^{(1)} p_2+\beta_3 e_{31}^{(1)}\right)+X_4^{(1)}\left(c_{13}^{(1)}-\alpha_4 c_{11}^{(1)} p_2+\beta_4 e_{31}^{(1)}\right) \\ +X_5^{(1)}\left(c_{13}^{(1)}+\alpha_5 c_{11}^{(1)} p_3+\beta_5 e_{31}^{(1)}\right)+X_6^{(1)}\left(c_{13}^{(1)}-\alpha_6 c_{11}^{(1)} p_3+\beta_6 e_{31}^{(1)}\right) \\ -X_1^{(2)}\left(A_{12}^{(2)}+\gamma_1 A_{22}^{(2)} R_1^{(2)}\right)-X_2^{(2)}\left(A_{12}^{(2)}+\gamma_2 A_{22}^{(2)} R_2^{(2)}\right) \end{array}\right)=0,$$

$\sigma_{12}^{(1)}\big|_{x_2=h} = 0$ için beşinci denklem:

$$\left(\begin{array}{l} X_1^{(1)}\left(c_{44}^{(1)} p_1-\alpha_1 c_{44}^{(1)}+\beta_1 e_{15}^{(1)} p_1\right)e^{p_1 kh}+X_2^{(1)}\left(-c_{44}^{(1)} p_1-\alpha_2 c_{44}^{(1)}-\beta_2 e_{15}^{(1)} p_1\right)e^{-p_1 kh} \\ +X_3^{(1)}\left(c_{44}^{(1)} p_2-\alpha_3 c_{44}^{(1)}+\beta_3 e_{15}^{(1)} p_2\right)e^{p_2 kh}+X_4^{(1)}\left(-c_{44}^{(1)} p_2-\alpha_4 c_{44}^{(1)}-\beta_4 e_{15}^{(1)} p_2\right)e^{-p_2 kh} \\ +X_5^{(1)}\left(c_{44}^{(1)} p_3-\alpha_5 c_{44}^{(1)}+\beta_5 e_{15}^{(1)} p_3\right)e^{p_3 kh}+X_6^{(1)}\left(-c_{44}^{(1)} p_3-\alpha_6 c_{44}^{(1)}-\beta_6 e_{15}^{(1)} p_3\right)e^{-p_3 kh} \end{array}\right)=0,$$

$\sigma_{22}^{(1)}\big|_{x_2=h} = 0$ için altıncı denklem:

$$\left(\begin{array}{l} X_1^{(1)}\left(c_{13}^{(1)}+\alpha_1 c_{11}^{(1)} p_1+\beta_1 e_{31}^{(1)}\right)e^{p_1 kh}+X_2^{(1)}\left(c_{13}^{(1)}-\alpha_2 c_{11}^{(1)} p_1+\beta_2 e_{31}^{(1)}\right)e^{-p_1 kh} \\ +X_3^{(1)}\left(c_{13}^{(1)}+\alpha_3 c_{11}^{(1)} p_2+\beta_3 e_{31}^{(1)}\right)e^{p_2 kh}+X_4^{(1)}\left(c_{13}^{(1)}-\alpha_4 c_{11}^{(1)} p_2+\beta_4 e_{31}^{(1)}\right)e^{-p_2 kh} \\ +X_5^{(1)}\left(c_{13}^{(1)}+\alpha_5 c_{11}^{(1)} p_3+\beta_5 e_{31}^{(1)}\right)e^{p_3 kh}+X_6^{(1)}\left(c_{13}^{(1)}-\alpha_6 c_{11}^{(1)} p_3+\beta_6 e_{31}^{(1)}\right)e^{-p_3 kh} \end{array}\right)=0,$$

$\varphi^{(1)}\big|_{x_2=0} = 0$ için yedinci denklem:

$$X_1^{(1)}\beta_1+X_2^{(1)}\beta_2+X_3^{(1)}\beta_3+X_4^{(1)}\beta_4+X_5^{(1)}\beta_5+X_6^{(1)}\beta_6=0,$$

$\varphi^{(1)}\big|_{x_2=h} = 0$ için sekizinci denklem:

$$X_1^{(1)}\beta_1 e^{p_1 kh}+X_2^{(1)}\beta_2 e^{-p_1 kh}+X_3^{(1)}\beta_3 e^{p_2 kh}+X_4^{(1)}\beta_4 e^{-p_2 kh}+X_5^{(1)}\beta_5 e^{p_3 kh}+X_6^{(1)}\beta_6 e^{-p_3 kh}=0. \quad (2.65)$$

(2.65)'teki denklemlerde katmandaki mekanik yer değiştirmeler ve elektrik potansiyeli için (2.45), katmandaki gerilmeler için (2.46), yarıdüzlemdeki mekanik yer değiştirmeler için (2.55) ve yarıdüzlemdeki gerilmeler için (2.57) kullanılmıştır.

2.3 Dispersiyon Eğrilerinin Elde Edilmesi ve Yorumlanması

Dispersiyon eğrileri, $c/c_2^{(1)}$ (boyutsuz dalga yayılım hızı) ve kh (boyutsuz dalga sayısı) arasındaki ilişki bulunarak gösterilecektir. $c_2^{(1)}$ katman malzemesinin enine dalga yayılım hızı olup (2.26) ile elde edilir.

Çizelge 2.1 Malzemelerin elastik, piezoelektrik ve dielektrik özellikleri

Malzeme Özellikleri	Malzemeler				
	Alüminyum [39], [81]	Çelik [81]	PZT-2 [27]	PZT-4 [39]	PZT-6B [78]
$\rho(\times 10^3 kg/m^3)$	2.70	7.795	7.60	7.50	7.55
$c_{11}(\times 10^{10} N/m^2)$	10.20	24.76	13.50	13.20	16.80
$c_{33}(\times 10^{10} N/m^2)$	10.20	24.76	11.30	11.50	16.30
$c_{44}(\times 10^{10} N/m^2)$	2.60	7.75	2.22	2.60	3.55
$c_{13}(\times 10^{10} N/m^2)$	5.0	9.26	6.81	7.30	8.42
$e_{15}(C/m^2)$	_	_	9.8	10.50	4.60
$e_{33}(C/m^2)$	_	_	9	14.10	7.10
$e_{31}(C/m^2)$	_	_	-1.9	-4.10	-0.90
$\varepsilon_{11}(\times 10^{-9} F/m)$	_	_	8.7615	7.10	3.60
$\varepsilon_{33}(\times 10^{-9} F/m)$	_	_	3.9825	5.80	3.42
$a(\times 10^{11} N/m^2)$	3.08	-2.35	_	_	_
$b(\times 10^{11} N/m^2)$	-0.49	-2.75	_	_	_
$c(\times 10^{11} N/m^2)$	-2.92	-4.90	_	_	_
$\lambda(\times 10^{10} N/m^2)$	5.0	9.26	_	_	_
$\mu(\times 10^{10} N/m^2)$	2.60	7.75	_	_	_

Dispersiyon eğrileri, dispersiyon denklemlerinin bilinen sayısal çözüm yöntemlerinden biri olan yarılama (bisection) yöntemi kullanarak yapılan çözümünden MATLAB bilgisayar yazılım programı yardımıyla elde edilir. Sabit bir kh değerine karşılık, belirlenen aralıktaki $c/c_2^{(1)}$ değerleri belirli artımlarla dispersiyon denkleminde denenir.

Dispersiyon denklemini sıfır yapan birbirine en yakın kökler arasında yarılama yöntemi kullanılarak kökler elde edilir. Kabul edilebilir yakınlıkta kökler elde edilene kadar yeterli sayıda iterasyon tekrar edilir. Bu şekilde sabit bir kh değerine karşılık bulunan birden fazla $c/c_2^{(1)}$ kökü, verilen boyutsuz dalga sayısındaki farklı modlara ait dalga yayılım hızını verir. Farklı kh değerleri için işlemler tekrar edilerek dispersiyon eğrileri elde edilir.

Sayısal çözümlemede elastik, piezoelektrik ve dielektrik özellikleri Çizelge 2.1'de verilen malzemeler kullanılmıştır. Piezoelektrik katman için PZT-2, PZT-4, PZT-6B malzemeleri; metal yarıdüzlem için ise alüminyum ve çelik malzemeleri kullanılmıştır.

Piezoelektriklik özelliğinin etkilerini görebilmek için katman malzemesine ait Çizelge 2.1'deki piezoelektrik ve dielektrik sabitlerin sıfır alındığı durum (transversal izotrop katman) da incelenmiştir. Bunun için Bölüm 2.2.3 ve Bölüm 2.2.4'teki dispersiyon denklemleri elde edilirken piezoelektrik ve dielektrik sabitler sıfır alınırsa, transversal izotrop katmanın simetri ekseninin katman kalınlığı veya uzunluğu doğrultusunda olduğu durumlara ait dispersiyon denklemleri kolaylıkla bulunabilir.

Yatay tek eksenli öngerilmelerin şiddetini katmanda ve yarıdüzlemde belirlemek için aşağıdaki değişkenler tanımlanmıştır:

$$\psi^{(1)} = \sigma_{11}^{(1),0} / c_{44}^{(1)}, \quad \psi^{(2)} = \sigma_{11}^{(2),0} / \mu^{(2)}. \tag{2.66}$$

Sistemde düşey tek eksenli öngerilmeler bulunduğu durumda katmanda ve yarıdüzlemde öngerilmeler eşit olacağından ($\sigma_{22}^{(1),0} = \sigma_{22}^{(2),0} = P_0$) sistem üzerindeki öngerilmeler aşağıdaki değişken ile tanımlanmıştır:

$$\psi^{(1)} = P_0 / c_{44}^{(1)}. \tag{2.67}$$

Öngerilmelerin yüzey dalgalarının yayılım hızına etkisini ölçebilmek için aşağıdaki değişkenler tanımlanmıştır:

$$\eta = 10^3 (\bar{c} - c)/c. \tag{2.68}$$

(2.68)'de $\bar{c}$ sistemde öngerilme bulunduğu durumda dalga yayılım hızını, c ise sistemde herhangi bir öngerilme bulunmadığı durumda dalga yayılım hızını göstermektedir. Öngerilmelerin yüzey dalgalarının yayılım hızına etkisi, η ve kh

arasındaki ilişki, $\psi^{(1)}$ veya $\psi^{(2)}$'nin 0.001, 0.002 ve 0.003 değerleri için bulunarak gösterilecektir.

Katman ve yarıdüzlemde öngerilmeler birlikte verilmeyip ayrı ayrı bulunduğu durumlar için sonuçlar alınmıştır. Bu sistem bileşenlerinden her birinin sitemden ayrı olarak öngerilme ile yüklendikten sonra sisteme eklendiği kabul edilmiştir. Diğer bir ifadeyle sistem bileşenlerinden birindeki öngerilme diğer bileşen üzerinde öngerilme oluşturmamaktadır. Böylece her bir bileşen üzerindeki öngerilmelerin dispersiyon eğrilerine etkileri ayrı ayrı gösterilmiş olacaktır.

Katmandaki yatay tek eksenli öngerilmelerin, üçüncü derece elastik sabitler hesaba katıldığında ve katılmadığında yarıdüzlemdeki yatay tek eksenli öngerilmelerin, üçüncü derece elastik sabitler hesaba katıldığında ve katılmadığında düşey tek eksenli öngerilmelerin dalga yayılım hızına etkileri ayrı ayrı incelenecektir.

2.3.1 Piezoelektriklik Özelliğinin Dispersiyon Eğrilerine Etkisi

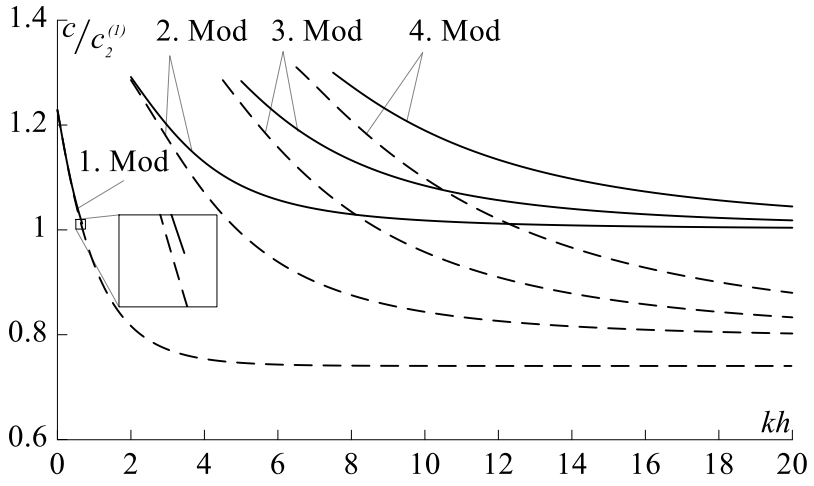
Bu bölümde sonuçlar piezoelektrik katmanın üst ve alt yüzey elektrotları elektriksel kısa devre olduğu durum ve katmanda piezoelektrik malzeme polarizasyon doğrultusunun Ox_2 ekseni ile çakıştığı durum (katman kalınlığı doğrultusunda polarizasyon) için elde edilmiştir. Ayrıca, yalnızca yatay tek eksenli çekme ve basma öngerilmelerinin bulunduğu varsayılmıştır ($\sigma_{22}^{(1),0} = 0$).

Kesikli çizgi ile gösterilen eğriler katmana ait piezoelektrik ve dielektrik sabitler sıfır alınarak elde edilen sonuçları, düz çizgi ile gösterilen eğriler ise katmana ait piezoelektrik ve dielektrik sabitlerin Çizelge 2.1'deki gibi alındığında elde edilen sonuçları göstermektedir.

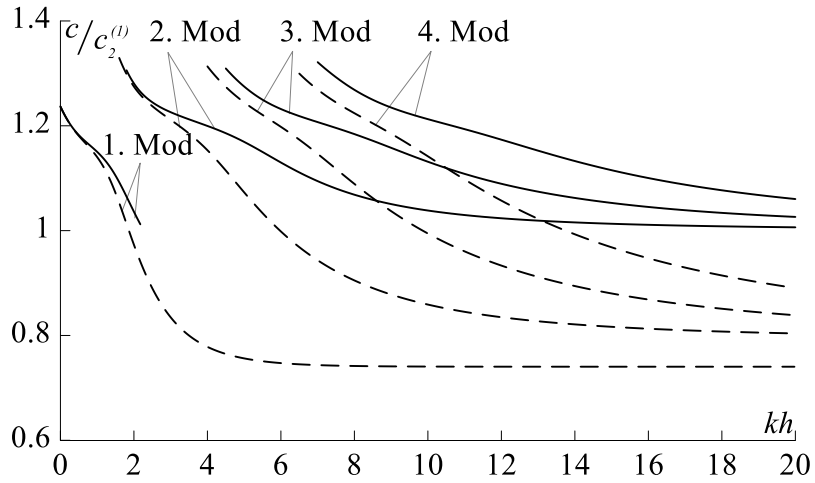
Şekil 2.2-2.4'teki sonuçlar katmanda veya yarıdüzlemde herhangi bir öngerilmenin bulunmadığı durumda elde edilmiştir ($\sigma_{11}^{(1),0} = \sigma_{11}^{(2),0} = 0$). Bu şekillerde farklı malzeme çiftleri için piezoelektrik katman ve metal yarıdüzlemden oluşan öngerilmesiz sistemde ilk dört moda ait dispersiyon eğrileri gösterilmiştir.

Jin vd. [39] PZT-4/Alüminyum (katman/yarıdüzlem) öngerilmesiz sistemi için piezoelektrik katmanın üst ve alt yüzey elektrotları elektriksel kısa devre olduğu durumda ve katmanda piezoelektrik malzeme polarizasyon doğrultusunun Ox_2 ekseni

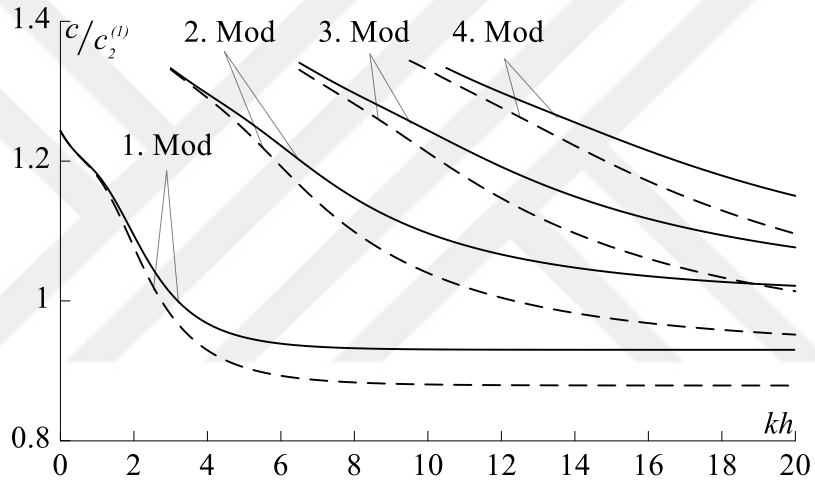
ile çakıştığı durumda ikinci, üçüncü ve dördüncü moda ait dispersiyon eğrilerini elde etmiş fakat birinci moda ait dispersiyon eğrisini göstermemiştir. Şekil 2.2'deki piezoelektrik ve dielektrik sabitlerin dikkate alındığı durum için elde edilen ikinci, üçüncü ve dördüncü moda ait dispersiyon eğrileri Jin vd.'nin [39] elde ettiği sonuçlarla örtüşmektedir. Şekil 2.2'deki birinci mod dispersiyon eğrisi ise ancak belirli bir kh değerinden önce bulunmaktadır. Benzer olarak Pang vd. [27] PZT-4 katman ve piezomanyetik yarıdüzlemden oluşan öngerilmesiz sistemde birinci mod dispersiyon eğrisinin yalnızca belirli bir kh değerinden önce bulunduğunu göstermiştir. Ancak Şekil 2.2'de katmana ait piezoelektrik ve dielektrik sabitler sıfır alınarak elde edilen birinci moda ait dispersiyon eğrisinin tüm $(0,\infty)$ aralığındaki kh değerleri için bulunduğu görülmektedir. Şekil 2.3'te yarıdüzlem malzemesi çelik olarak değiştirildiğinde de benzer durum görülmektedir. Şekil 2.4'te ise katman malzemesi PZT-6B olarak değiştirildiğinde sadece katmana ait piezoelektrik ve dielektrik sabitlerin sıfır alınmadığı durumda değil piezoelektrik ve dielektrik sabitlerin sıfır alındığı durumda da birinci moda ait dispersiyon eğrisinin tüm $(0,\infty)$ aralığındaki kh değerleri için bulunduğu görülmektedir. Dolayısıyla bu özel durumun piezoelektrik katman malzemesinin piezoelektrik ve dielektrik özelliklerinden kaynaklanabileceği sonucu çıkarılabilir. Şekil 2.2'deki ikinci, üçüncü ve dördüncü moda ait dispersiyon eğrilerinin Jin vd.'nin [39] elde ettiği sonuçlarla örtüşmesi bu çalışmada kullanılan program ve algoritmanın doğruluğunu göstermektedir.



Şekil 2.2 PZT-4/Alüminyum sistemi için piezoelektriklik özelliğinin dispersiyon eğrilerine etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)



Şekil 2.3 PZT-4/Çelik sistemi için piezoelektriklik özelliğinin dispersiyon eğrilerine etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)



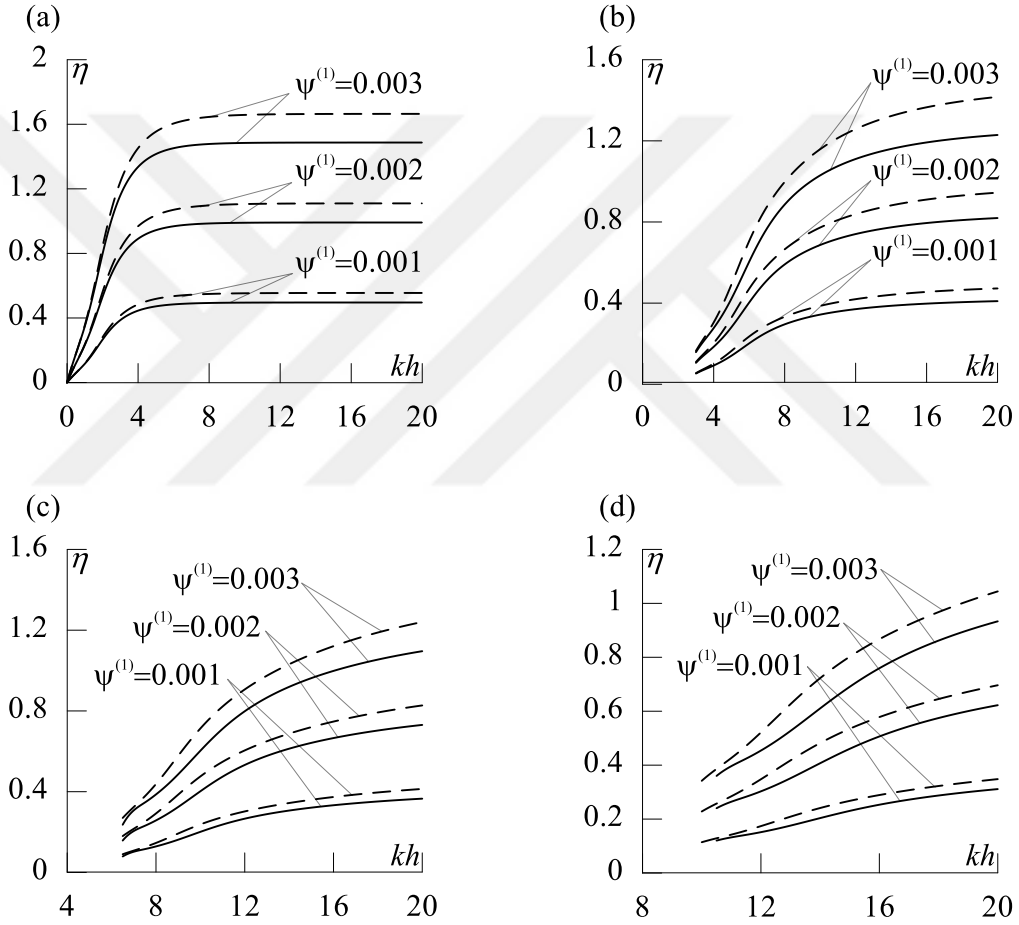
Şekil 2.4 PZT-6B/Çelik sistemi için piezoelektriklik özelliğinin dispersiyon eğrilerine etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)

Şekil 2.2-2.4, katmanın piezoelektriklik özelliğinin yüzey dalgalarının yayılım hızını arttırdığını göstermektedir. Piezoelektriklik özelliğinin dispersiyon eğrilerine etkisi artan *kh* değeri ile artmaktadır. Diğer bir ifadeyle katmana ait piezoelektrik ve dielektrik sabitler sıfır alındığı ve alınmadığı durumlardaki yüzey dalgalarının yayılım hızları düşük *kh* değerlerinde birbirlerine daha yakınken yüksek *kh* değerlerinde aralarındaki fark büyümektedir.

Şekil 2.5-2.8'de PZT-6B katman ve çelik yarıdümlemden oluşan sistemde farklı öngerilmelerin piezoelektriklik özelliğinin varlığında ve yokluğunda dispersiyon eğrilerine etkileri incelenmiştir. Bu şekillerde (a), (b), (c) ve (d) ile sırasıyla birinci,

ikinci, üçüncü ve dördüncü moda ait yüzey dalgalarının dispersiyon eğrileri gösterilmiştir.

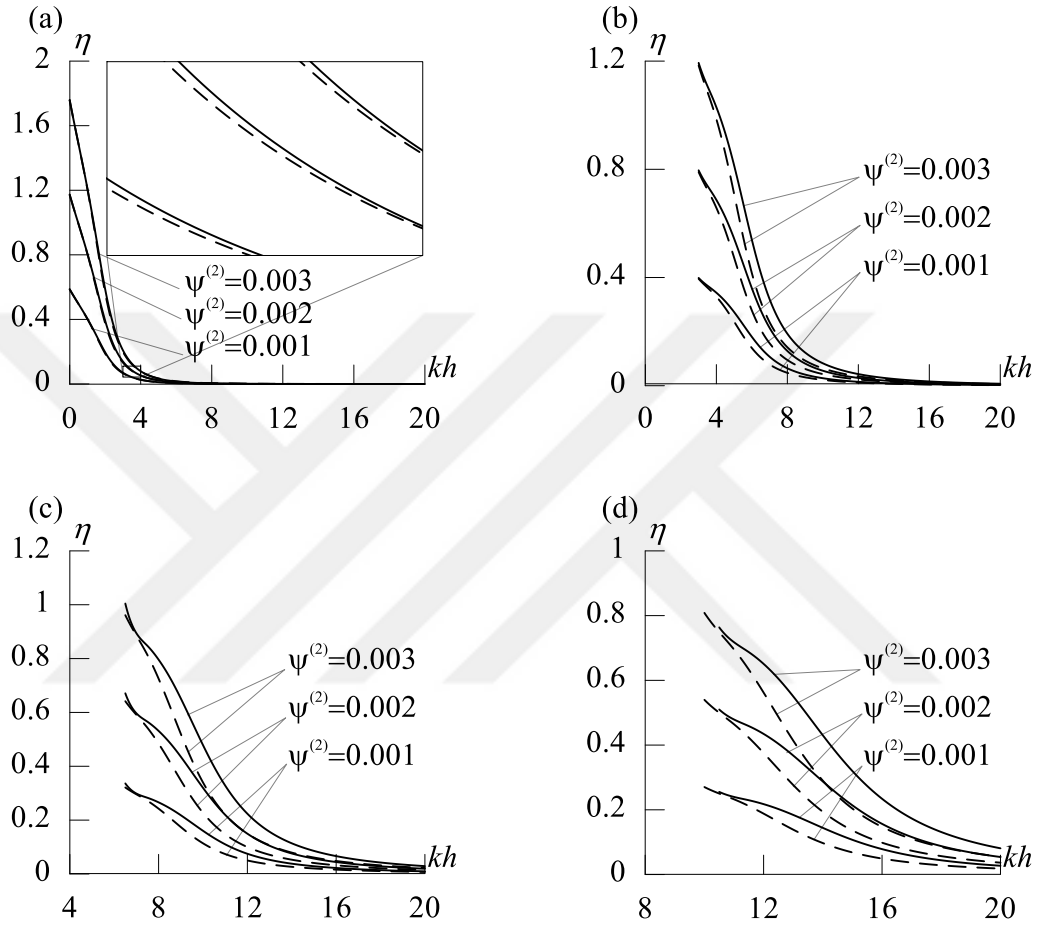
Şekil 2.5'te katmandaki yatay çekme öngerilmesinin ($\sigma_{11}^{(1),0} > 0$, $\sigma_{11}^{(2),0} = 0$) yüzey dalgalarının yayılım hızını arttırdığı görülmektedir. Küçük kh değerlerinde katmandaki yatay çekme öngerilmesinin yüzey dalgalarının yayılım hızına etkisi daha azdır. Tüm modlarda piezoelektriklik özelliğinin katmandaki yatay çekme öngerilmesinin yüzey dalgalarının yayılım hızına etkisini azalttığı görülmektedir. Ayrıca artan kh değeri ile birlikte piezoelektriklik özelliğinin bu etkisi artmaktadır.



Şekil 2.5 PZT-6B/Çelik sistemi için katmandaki yatay çekme öngerilmesinin birinci (a), ikinci (b), üçüncü (c), dördüncü (d) mod dispersiyon eğrilerine etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)

Şekil 2.6'da yarıdüzlemdeki yatay çekme öngerilmesinin üçüncü derece elastik sabitler hesaba katılmadığında ($\sigma_{11}^{(2),0} > 0$, $\sigma_{11}^{(1),0} = 0$, $a^{(2)} = 0$, $b^{(2)} = 0$, $c^{(2)} = 0$) yüzey dalgalarının yayılım hızını arttırdığı görülmektedir. Büyük kh değerlerinde yarıdüzlemdeki yatay çekme öngerilmesinin yüzey dalgalarının yayılım hızına etkisi

daha azdır. Şekil 2.5'ten farklı olarak tüm modlarda piezoelektriklik özelliğinin, yarıdüzlemdeki yatay çekme öngerilmesinin yüzey dalgalarının yayılım hızına etkisini arttırdığı görülmektedir. Piezoelektriklik özelliğinin bu etkisi farklı *kh* değerlerinde değişmektedir. Ayrıca birinci moda ait dispersiyon eğrileri için bu etkinin oldukça küçük olduğu görülmektedir.



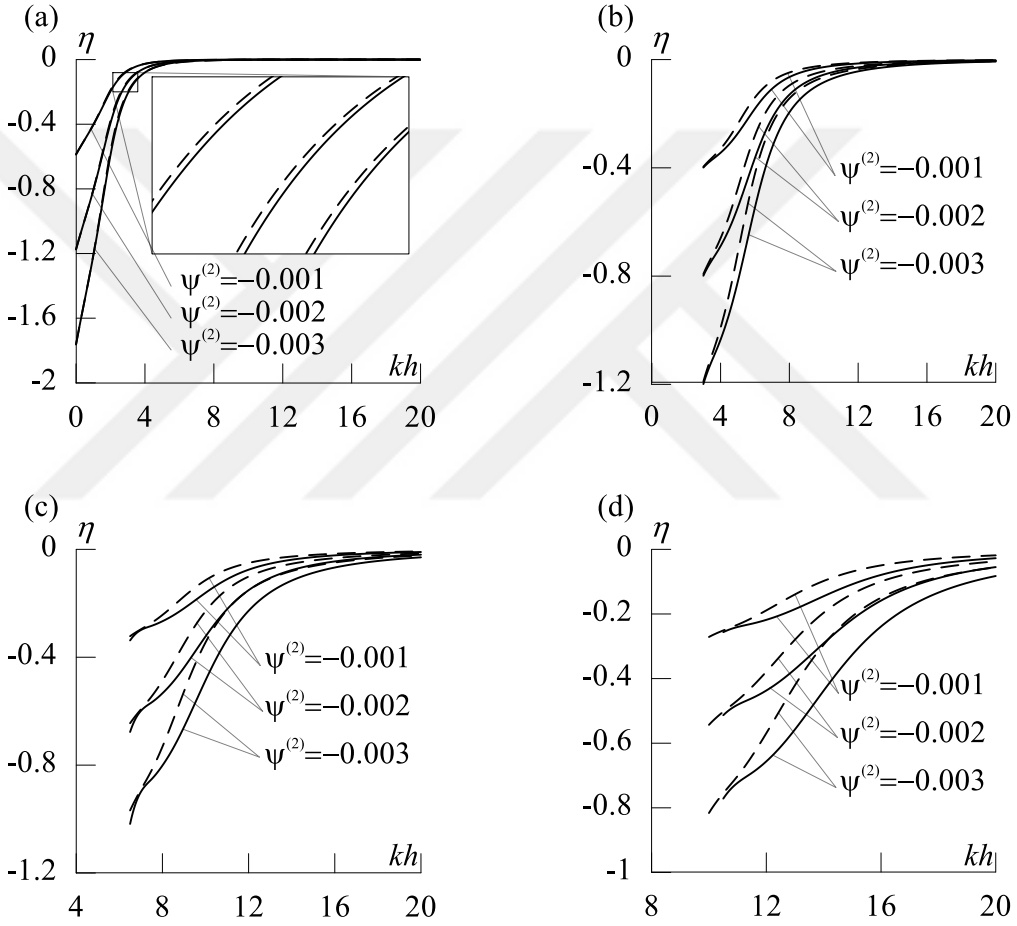
Şekil 2.6 PZT-6B/Çelik sistemi için üçüncü derece elastik sabitler hesaba katılmadığında yarıdüzlemdeki yatay çekme öngerilmesinin birinci (a), ikinci (b), üçüncü (c), dördüncü (d) mod dispersiyon eğrilerine etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)

Şekil 2.7'de yarıdüzlemdeki yatay basma öngerilmesinin üçüncü derece elastik sabitler hesaba katılmadığında ($\sigma_{11}^{(2),0} < 0$, $\sigma_{11}^{(1),0} = 0$, $a^{(2)} = 0$, $b^{(2)} = 0$, $c^{(2)} = 0$) yüzey dalgalarının yayılım hızını azalttığı görülmektedir. Şekil 2.6 ile Şekil 2.7'de elde edilen sonuçların birbirleriyle tamamen simetrik etkiler gösterdiği görülmektedir.

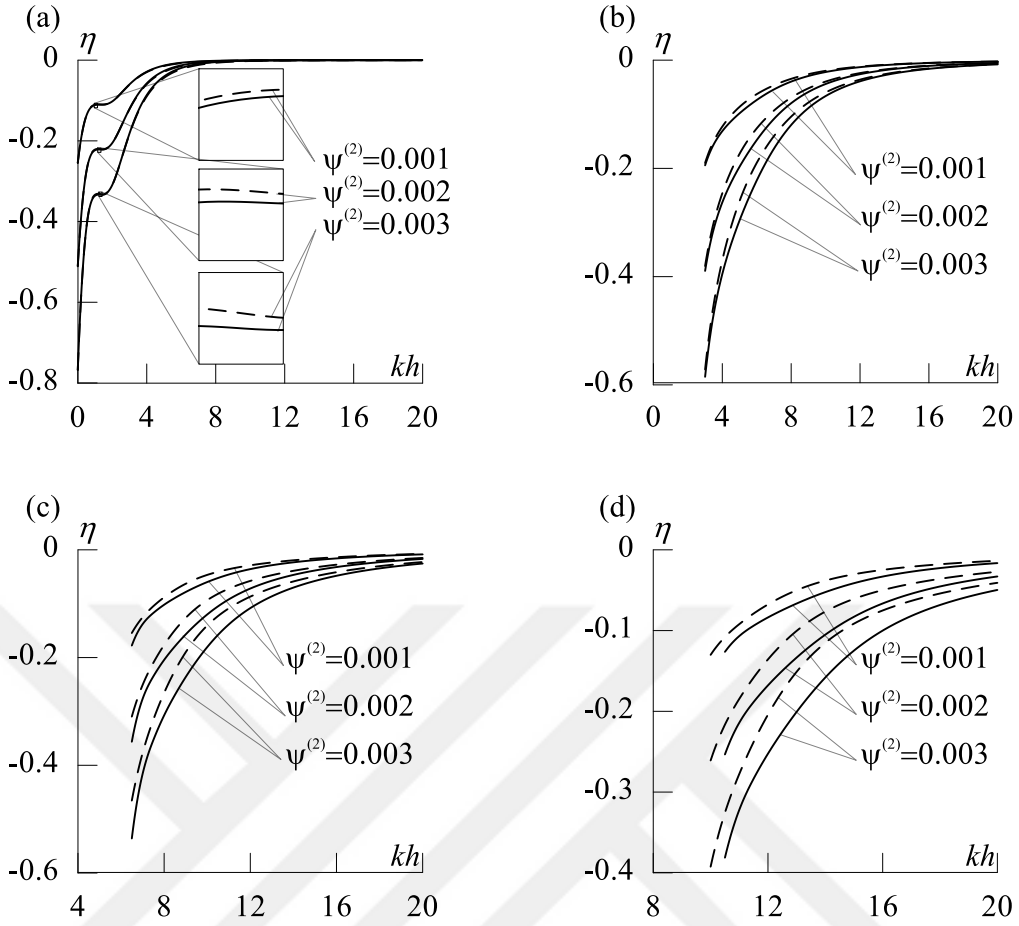
Şekil 2.8'de yarıdüzlemdeki yatay çekme öngerilmesinin üçüncü derece elastik sabitler hesaba katıldığında ($\sigma_{11}^{(2),0} > 0$, $\sigma_{11}^{(1),0} = 0$, $a^{(2)} \neq 0$, $b^{(2)} \neq 0$, $c^{(2)} \neq 0$) yüzey dalgalarının

yayılım hızını azalttığı görülmektedir. Şekil 2.6'ya benzer olarak büyük *kh* değerlerinde yarıdüzlemdeki yatay çekme öngerilmesinin yüzey dalgalarının yayılım hızına etkisi daha azdır ve piezoelektriklik özelliğinin yarıdüzlemdeki yatay çekme öngerilmesinin yüzey dalgalarının yayılım hızına etkisini arttırdığı görülmektedir. Piezoelektriklik özelliğinin bu etkisi farklı *kh* değerlerinde değişmekle birlikte bu etki dördüncü moda ait dispersiyon eğrileri üzerinde en fazladır.

Şekil 2.6 ve Şekil 2.8 karşılaştırıldığında aynı malzeme türü ve gerilme durumunda yalnızca üçüncü derece elastik sabitlerin etkisi görülmektedir.



Şekil 2.7 PZT-6B/Çelik sistemi için üçüncü derece elastik sabitler hesaba katılmadığında yarıdüzlemdeki yatay basma öngerilmesinin birinci (a), ikinci (b), üçüncü (c), dördüncü (d) mod dispersiyon eğrilerine etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)



Şekil 2.8 PZT-6B/Çelik sistemi için üçüncü derece elastik sabitler hesaba katıldığında yarıdüzlemdeki yatay çekme öngerilmesinin birinci (a), ikinci (b), üçüncü (c), dördüncü (d) mod dispersiyon eğrilerine etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)

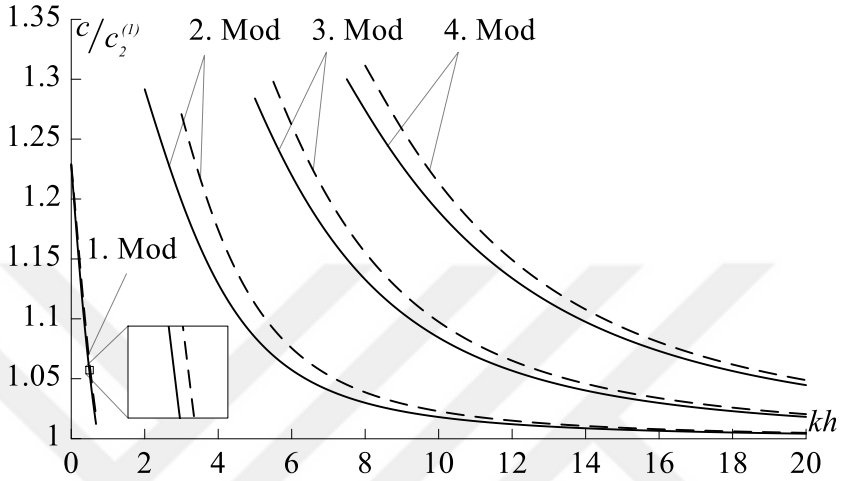
2.3.2 Açık ve Kısa Devre Elektrot Durumlarının Dispersiyon Eğrilerine Etkisi

Bu bölümde sonuçlar katmanda piezoelektrik malzeme polarizasyon doğrultusunun Ox_2 ekseni ile çakıştığı ve herhangi bir öngerilmenin bulunmadığı durum için elde edilmiştir ($\sigma_{11}^{(1),0} = \sigma_{11}^{(2),0} = 0$, $\sigma_{22}^{(1),0} = 0$).

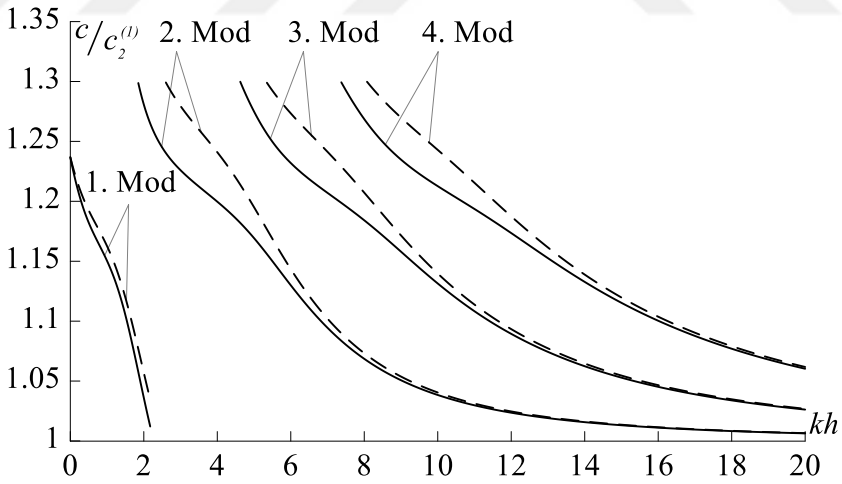
Kesikli çizgi ile gösterilen eğriler piezoelektrik katmanın üst ve alt yüzey elektrotlarının elektriksel açık devre durumunda elde edilen dispersiyon eğrilerini, düz çizgi ile gösterilen eğriler ise piezoelektrik katmanın üst ve alt yüzey elektrotlarının elektriksel kısa (kapalı) devre durumunda elde edilen dispersiyon eğrilerini göstermektedir.

Şekil 2.9-2.11, yüzey dalgalarının yayılım hızının katmanın üst ve alt yüzey elektrotlarının elektriksel açık devre durumunda, kısa devre durumuna göre daha yüksek olduğunu göstermektedir. Artan kh değeri ile açık ve kısa devre elektrot durumlarının

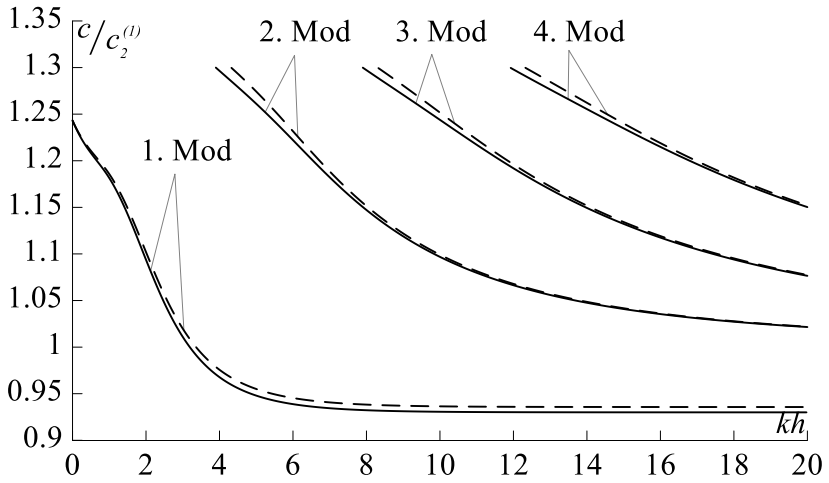
dispersiyon eğrilerine olan etkisi azalmaktadır. Ancak yüzey dalgalarının birinci mod dispersiyon eğrilerinde *kh* değeri sıfıra doğru yaklaşırken üst ve alt yüzey elektrotlarının elektriksel açık veya kısa devre olması durumlarından bağımsız olarak dalga yayılım hızının belirli bir değere yaklaştığı görülmektedir. Bu şekillerden sadece katman malzeme türünün değil yarıdüzlem malzeme türünün de açık ve kısa devre elektrot durumlarının dispersiyon eğrilerine etkisini değiştirdiği görülmektedir.



Şekil 2.9 PZT-4/Alüminyum sistemi için açık ve kısa devre elektrot durumlarının dispersiyon eğrilerine etkisi (—— kısa devre elektrot, - - - - açık devre elektrot)



Şekil 2.10 PZT-4/Çelik sistemi için açık ve kısa devre elektrot durumlarının dispersiyon eğrilerine etkisi (—— kısa devre elektrot, - - - - açık devre elektrot)



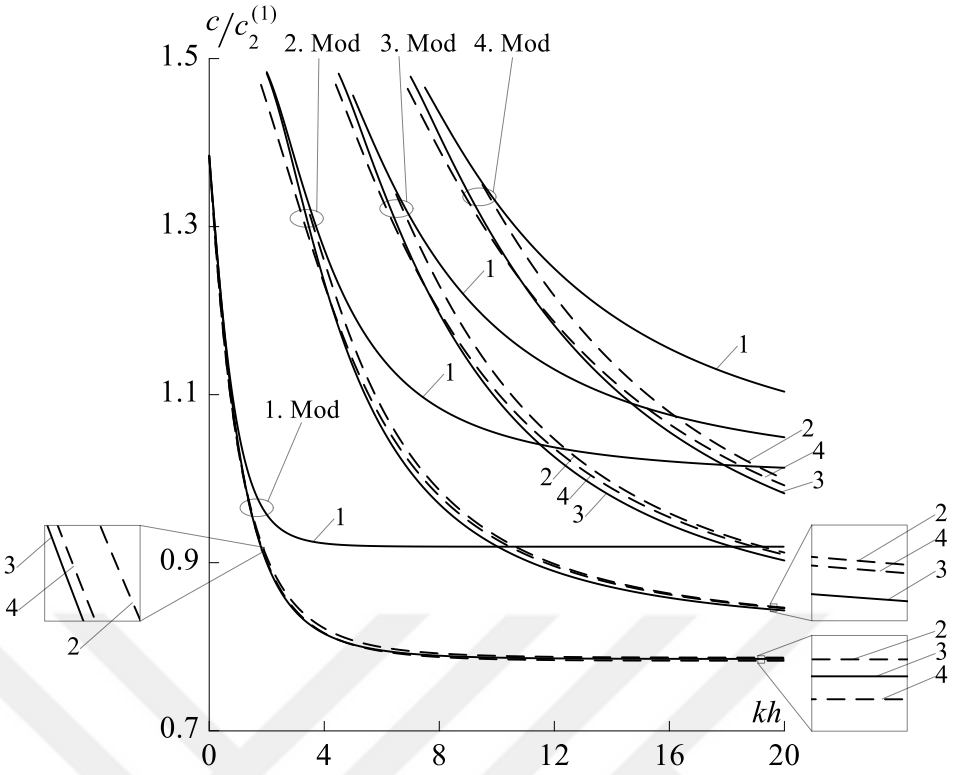
Şekil 2.11 PZT-6B/Çelik sistemi için açık ve kısa devre elektrot durumlarının dispersiyon eğrilerine etkisi (—— kısa devre elektrot, - - - - açık devre elektrot)

2.3.3 Polarizasyon Doğrultusunun Dispersiyon Eğrilerine Etkisi

Bu bölümde sonuçlar piezoelektrik katmanın üst ve alt yüzey elektrotları elektriksel kısa devre olduğu durumda ve düşey tek eksenli öngerilmelerinin bulunmadığı ($\sigma_{22}^{(1),0}=0$) durumda elde edilmiştir.

Kesikli çizgi ile gösterilen eğriler katmanda polarizasyon doğrultusunun veya simetri ekseninin Ox_1 ekseni ile çakıştığı durumda (uzunluk doğrultusunda polarizasyon) elde edilen sonuçları, düz çizgi ile gösterilen eğriler ise katmanda polarizasyon doğrultusunun veya simetri ekseninin Ox_2 ekseni ile çakıştığı durumda (kalınlık doğrultusunda polarizasyon) elde edilen sonuçları göstermektedir.

Şekil 2.12-2.15'teki sonuçlar katmanda veya yarıdüzlemde herhangi bir öngerilmenin bulunmadığı durumda elde edilmiştir ($\sigma_{11}^{(1),0}=\sigma_{11}^{(2),0}=0$). Bu şekillerde farklı malzeme çiftleri için piezoelektrik katman ve metal yarıdüzlemden oluşan öngerilmesiz sistemde yüzey dalgalarının ilk dört moduna ait dispersiyon eğrileri gösterilmiştir. Bu şekillerde "1" ve "2" ile katmanda piezoelektrik ve dielektrik sabitlerin sıfır alınmadığı ve polarizasyon doğrultusunun sırasıyla Ox_2 ve Ox_1 ekseni ile çakıştığı durumda elde edilen dispersiyon eğrileri işaretlenmiştir. "3" ve "4" ile ise katmanda piezoelektrik ve dielektrik sabitlerin sıfır alındığı ve simetri ekseninin sırasıyla Ox_2 ve Ox_1 ekseni ile çakıştığı durumda elde edilen dispersiyon eğrileri işaretlenmiştir.

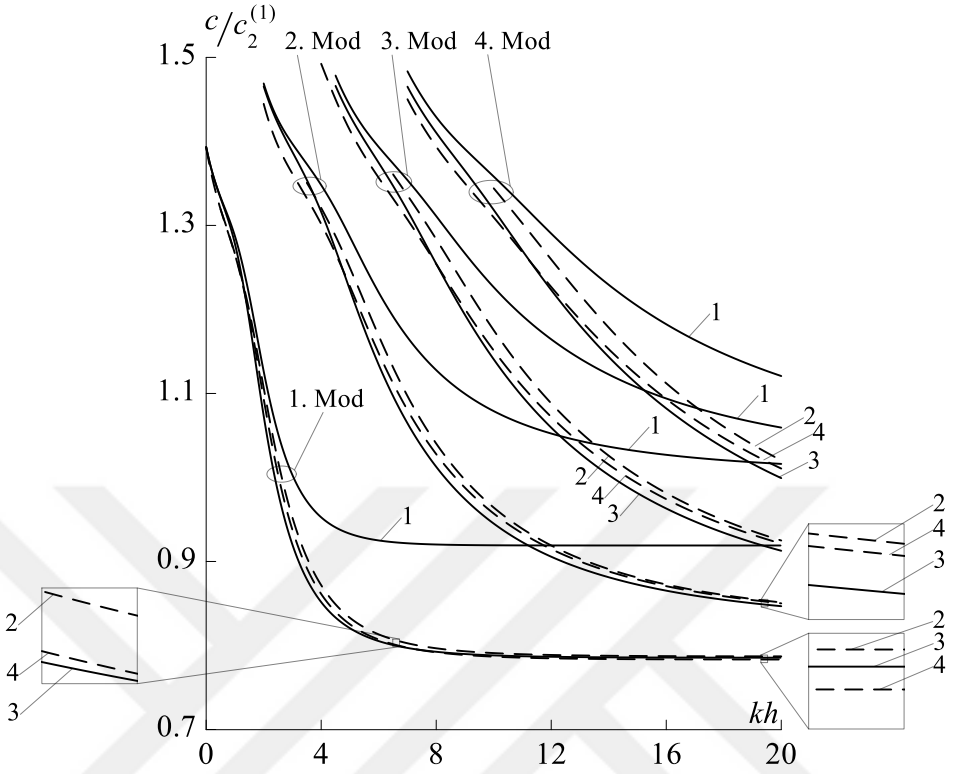


Şekil 2.12 PZT-2/Alüminyum sistemi için polarizasyon doğrultusunun dispersiyon eğrilerine etkisi (1-piezoelektriklik özelliği var ve polarizasyon doğrultusu Ox_2, 2-piezoelektriklik özelliği var ve polarizasyon doğrultusu Ox_1, 3-piezoelektriklik özelliği yok ve simetri ekseni Ox_2, 4-piezoelektriklik özelliği yok ve simetri ekseni Ox_1)

Bölüm 2.3.1'de katman malzemesi PZT-4 olduğunda birinci moda ait dispersiyon eğrisinin belirli bir kh değerinden önce bulunabileceği belirtilmiş ve bu özel durumun katman malzemesinin piezoelektrik ve dielektrik özelliklerinden kaynaklanabileceği sonucu çıkarılmıştı. Şekil 2.14'te "2" ile işaretlenmiş birinci moda ait dispersiyon eğrisinin tüm $(0,\infty)$ aralığındaki kh değerleri için bulunduğu görülmektedir. Dolayısıyla bu özel durum katman malzemesinin piezoelektrik ve dielektrik özelliklerinden kaynaklanabileceği gibi piezoelektrik katmanın polarizasyon doğrultusundan da kaynaklanabilmektedir.

Şekil 2.12-2.15'te, piezoelektrik katmanın polarizasyon doğrultusunun yüzey dalgalarının yayılım hızını büyük oranda etkilediği görülmektedir. Polarizasyon doğrultusunun Ox_2 ekseni ile çakıştığı durumda, Ox_1 ekseni ile çakıştığı duruma göre yüzey dalgalarının yayılım hızı daha yüksektir ve aralarındaki fark artan kh değeri ile artmaktadır. Piezoelektrik katmanın polarizasyon doğrultusunun Ox_1 ekseni ile çakıştığı

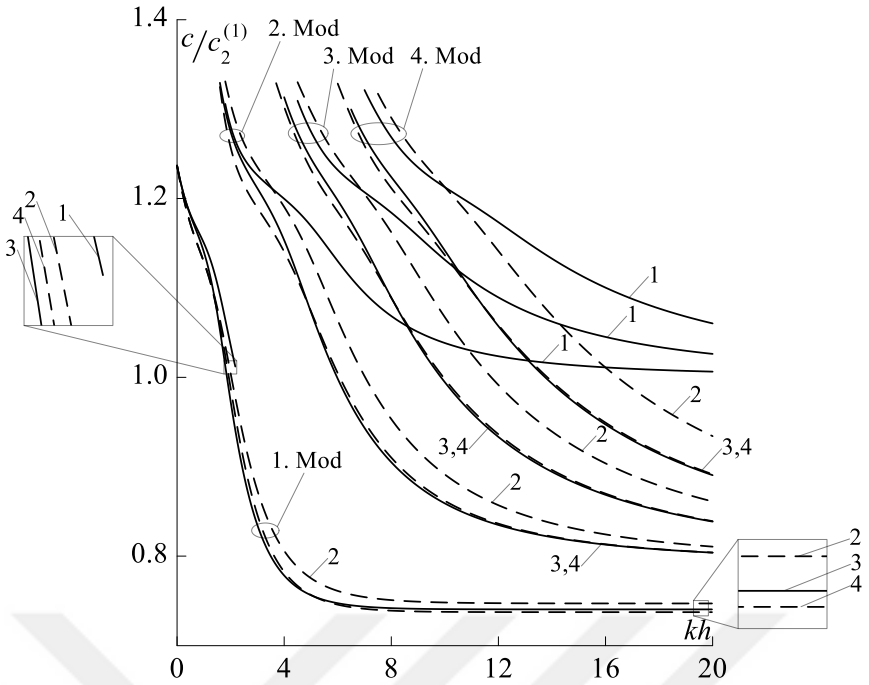
durumda dispersiyon eğrileri (“2”), katmanda piezoelektrik ve dielektrik sabitlerin sıfır alındığı durumdaki dispersiyon eğrilerine (“3”, “4”) yaklaşmaktadır.



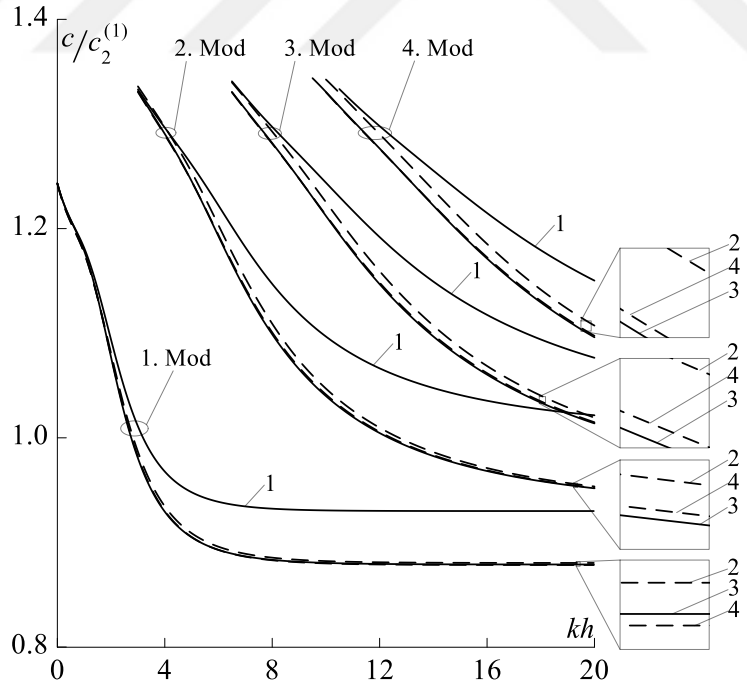
Şekil 2.13 PZT-2/Çelik sistemi için polarizasyon doğrultusunun dispersiyon eğrilerine etkisi (1-piezoelektriklik özelliği var ve polarizasyon doğrultusu Ox_2, 2-piezoelektriklik özelliği var ve polarizasyon doğrultusu Ox_1, 3-piezoelektriklik özelliği yok ve simetri ekseni Ox_2, 4-piezoelektriklik özelliği yok ve simetri ekseni Ox_1)

Katmandaki piezoelektrik ve dielektrik sabitler sıfır alındığında, katman transversal izotrop malzemeye dönüşmektedir. Piezoelektriklik özelliğinin bulunmadığı bu durumda simetri ekseninin değişmesinin (“3”, “4”) yüzey dalgalarının yayılım hızını pek etkilemediği Şekil 2.12-2.15’ten görülmektedir.

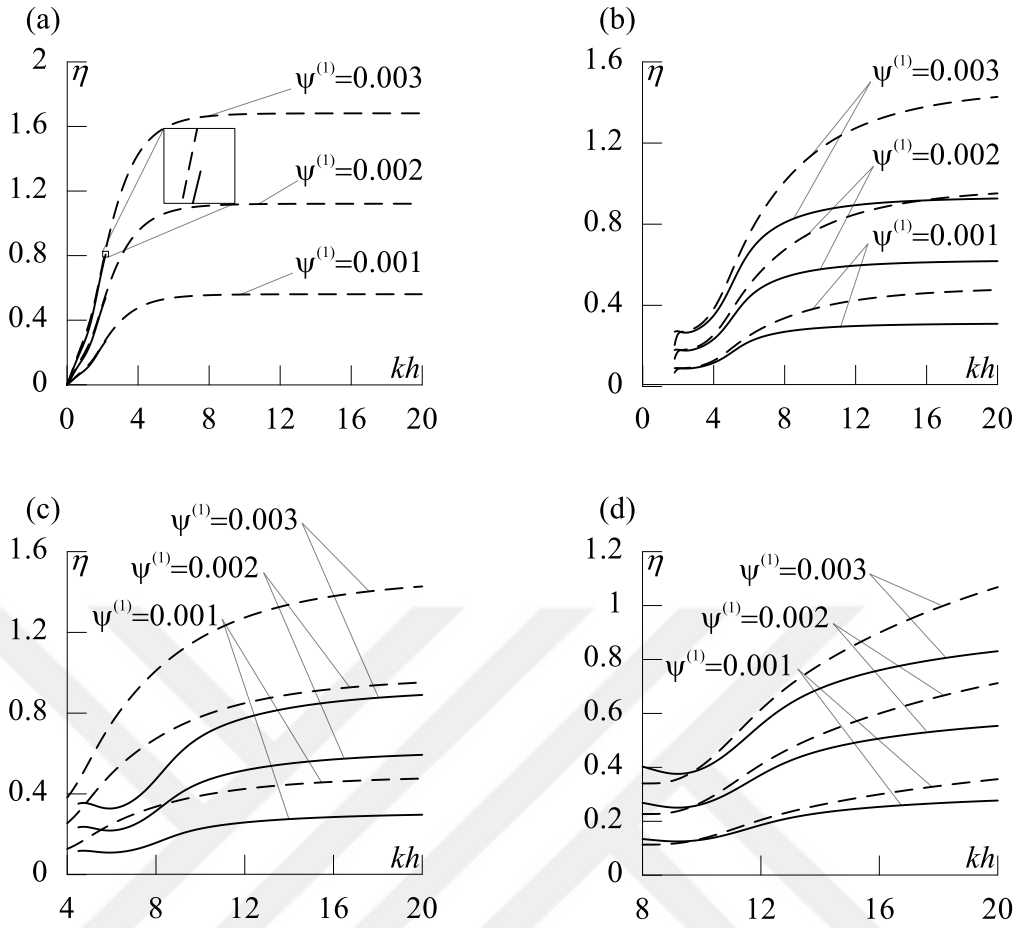
Şekil 2.12’de PZT-2 katman ve alüminyum yarıdümlemden oluşan sistem için elde edilen sonuçlarla Şekil 2.13’te PZT-2 katman ve çelik yarıdümlemden oluşan sistem için elde edilen sonuçların birbirlerine yakın olmasından yarıdüzlem malzeme türünün polarizasyon doğrultusunun dispersiyon eğrilerine etkisini pek değiştirmediği sonucu çıkarılabilir. Diğer bir taraftan Şekil 2.13’teki sonuçlar ile Şekil 2.14’teki PZT-4 katman ve çelik yarıdümlemden oluşan sistem için elde edilen sonuçlar karşılaştırıldığında katman malzeme türünün polarizasyon doğrultusunun dispersiyon eğrilerine etkisini oldukça fazla değiştirdiği görülmektedir.



Şekil 2.14 PZT-4/Çelik sistemi için polarizasyon doğrultusunun dispersiyon eğrilerine etkisi (1-piezoelektriklik özelliği var ve polarizasyon doğrultusu Ox_2, 2-piezoelektriklik özelliği var ve polarizasyon doğrultusu Ox_1, 3-piezoelektriklik özelliği yok ve simetri ekseni Ox_2, 4-piezoelektriklik özelliği yok ve simetri ekseni Ox_1)



Şekil 2.15 PZT-6B/Çelik sistemi için polarizasyon doğrultusunun dispersiyon eğrilerine etkisi (1-piezoelektriklik özelliği var ve polarizasyon doğrultusu Ox_2, 2-piezoelektriklik özelliği var ve polarizasyon doğrultusu Ox_1, 3-piezoelektriklik özelliği yok ve simetri ekseni Ox_2, 4-piezoelektriklik özelliği yok ve simetri ekseni Ox_1)

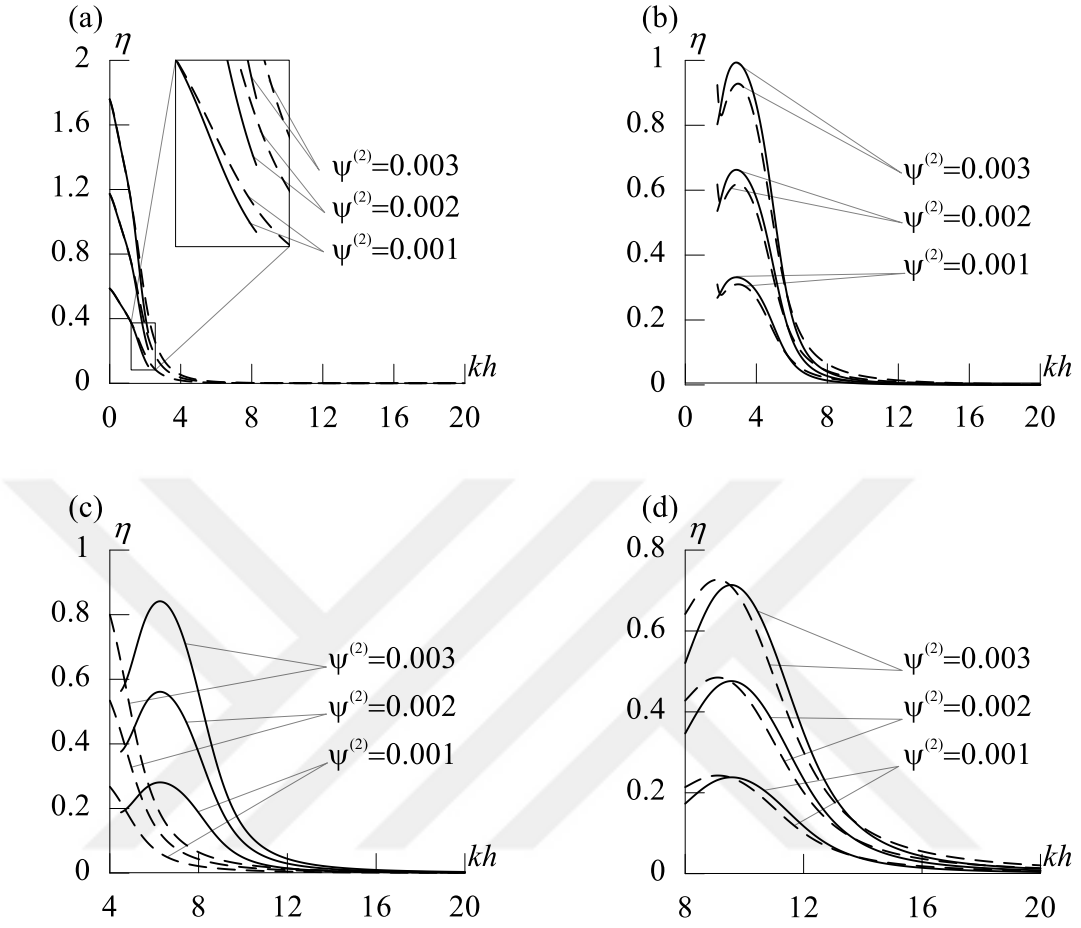


Şekil 2.16 PZT-4/Çelik sistemi için katmandaki yatay çekme öngerilmesinin birinci (a), ikinci (b), üçüncü (c), dördüncü (d) mod dispersiyon eğrilerine etkisi (—— polarizasyon doğrultusu Ox_2, - - - - polarizasyon doğrultusu Ox_1)

Şekil 2.16-2.19'da PZT-4 katman ve çelik yarıdümlemden oluşan sistemde farklı öngerilmelerin piezoelektrik katmanın polarizasyon doğrultusunun Ox_1 veya Ox_2 ekseni ile çakıştığı durumlarında dispersiyon eğrilerine etkileri incelenmiştir. Bu şekillerde (a), (b), (c) ve (d) ile sırasıyla birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü moda ait yüzey dalgalarının dispersiyon eğrileri gösterilmiştir.

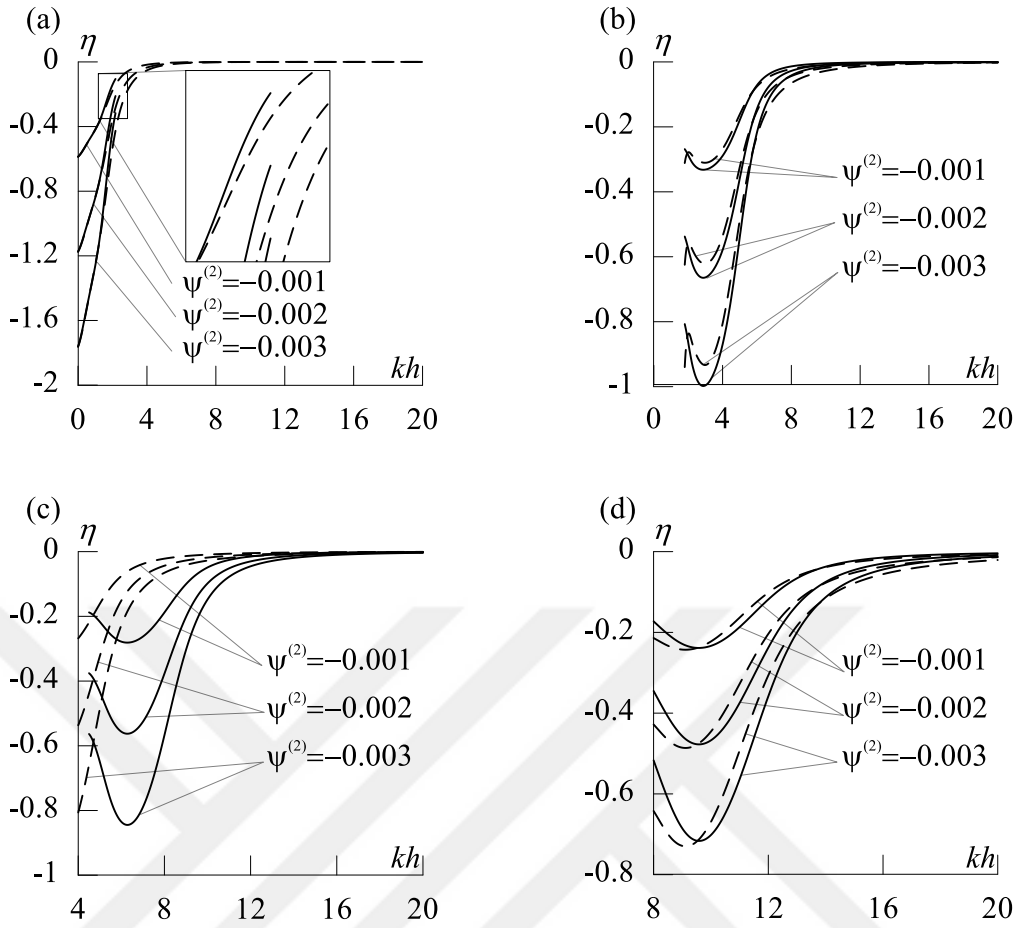
Şekil 2.16'da katmandaki yatay çekme öngerilmesinin ($\sigma_{11}^{(1),0} > 0$, $\sigma_{11}^{(2),0} = 0$) yüzey dalgalarının yayılım hızını arttırdığı görülmektedir. Küçük kh değerlerinde katmandaki yatay çekme öngerilmesinin yüzey dalgalarının yayılım hızına etkisi daha azdır. Katmandaki yatay çekme öngerilmesinin yüzey dalgalarının yayılım hızına etkisi katmanın polarizasyon doğrultusunun Ox_1 ekseni ile çakıştığı durumda, polarizasyon doğrultusunun Ox_2 ekseni ile çakıştığı duruma göre daha yüksektir. Ayrıca artan kh

değeri ile birlikte bu iki durumun yüzey dalgalarının yayılım hızına etkisi arasındaki farkın genellikle arttığı görülmektedir.



Şekil 2.17 PZT-4/Çelik sistemi için üçüncü derece elastik sabitler hesaba katılmadığında yarıdüzlemdeki yatay çekme öngerilmesinin birinci (a), ikinci (b), üçüncü (c), dördüncü (d) mod dispersiyon eğrilerine etkisi (—— polarizasyon doğrultusu Ox_2, - - - - polarizasyon doğrultusu Ox_1)

Şekil 2.17'de yarıdüzlemdeki yatay çekme öngerilmesinin üçüncü derece elastik sabitler hesaba katılmadığında ($\sigma_{11}^{(2),0} > 0$, $\sigma_{11}^{(1),0} = 0$, $a^{(2)} = 0$, $b^{(2)} = 0$, $c^{(2)} = 0$) yüzey dalgalarının yayılım hızını arttırdığı görülmektedir. Artan kh değerleri ile birlikte yarıdüzlemdeki yatay çekme öngerilmesinin yüzey dalgalarının yayılım hızına etkisi de azalmaktadır. Genellikle yarıdüzlemdeki yatay çekme öngerilmesinin yüzey dalgalarının yayılım hızına etkisi katmanın polarizasyon doğrultusunun Ox_2 ekseni ile çakıştığı durumda, polarizasyon doğrultusunun Ox_1 ekseni ile çakıştığı duruma göre daha yüksektir.

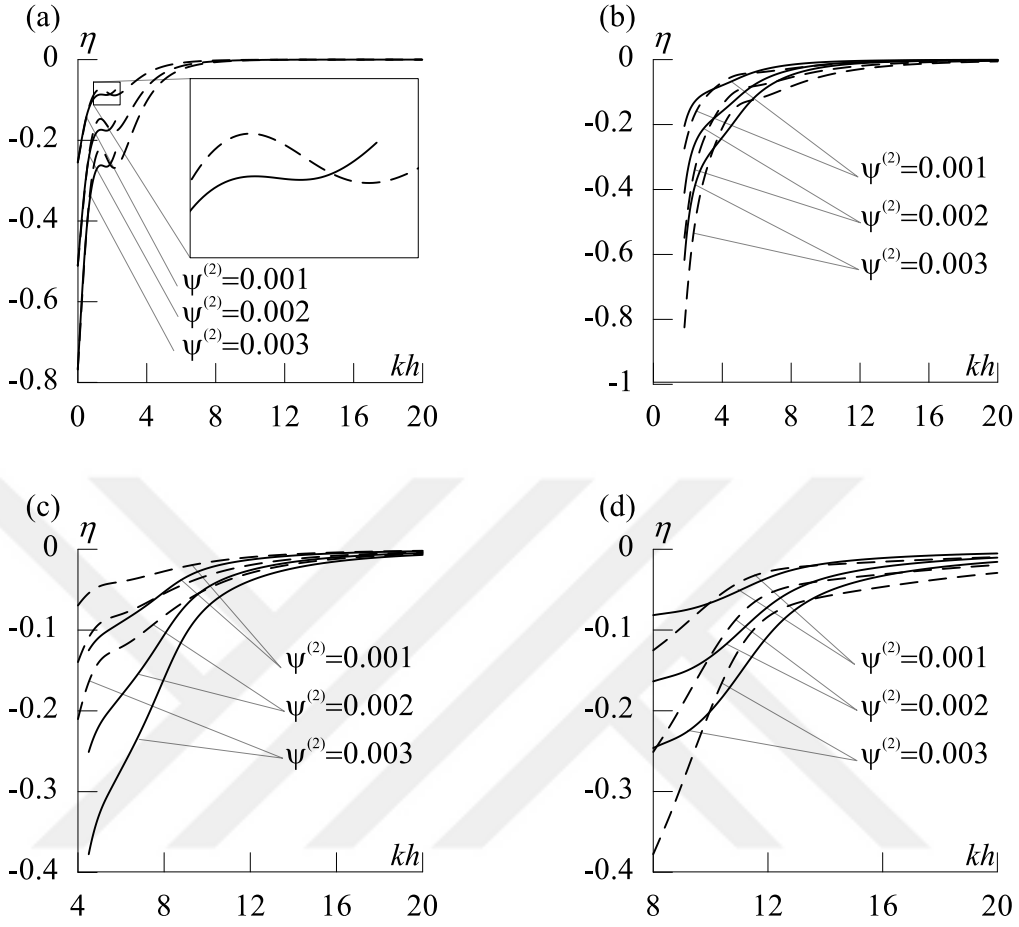


Şekil 2.18 PZT-4/Çelik sistemi için üçüncü derece elastik sabitler hesaba katılmadığında yarıdüzlemdeki yatay basma öngerilmesinin birinci (a), ikinci (b), üçüncü (c), dördüncü (d) mod dispersiyon eğrilerine etkisi (—— polarizasyon doğrultusu Ox_2, - - - - polarizasyon doğrultusu Ox_1)

Şekil 2.18'de yarıdüzlemdeki yatay basma öngerilmesinin üçüncü derece elastik sabitler hesaba katılmadığında ($\sigma_{11}^{(2),0} < 0$, $\sigma_{11}^{(1),0} = 0$, $a^{(2)} = 0$, $b^{(2)} = 0$, $c^{(2)} = 0$) yüzey dalgalarının yayılım hızını azalttığı görülmektedir. Şekil 2.17 ile Şekil 2.18'de elde edilen sonuçların birbirleriyle tamamen simetrik etkiler gösterdiği görülmektedir.

Şekil 2.19'da yarıdüzlemdeki yatay çekme öngerilmesinin üçüncü derece elastik sabitler hesaba katıldığında ($\sigma_{11}^{(2),0} > 0$, $\sigma_{11}^{(1),0} = 0$, $a^{(2)} \neq 0$, $b^{(2)} \neq 0$, $c^{(2)} \neq 0$) yüzey dalgalarının yayılım hızını azalttığı görülmektedir. Şekil 2.17'ye benzer olarak büyük kh değerlerinde yarıdüzlemdeki yatay çekme öngerilmesinin yüzey dalgalarının yayılım hızına etkisi daha azdır. Katmanın polarizasyon doğrultusunun Ox_1 veya Ox_2 ekseni ile çakıştığı durumlar farklı kh değerlerinde yüzey dalgalarının yayılım hızına farklı etki

göstermektedir. Şekil 2.17 ve Şekil 2.19 karşılaştırıldığında üçüncü derece elastik sabitlerin sonuçları büyük oranda etkilediği görülmektedir.



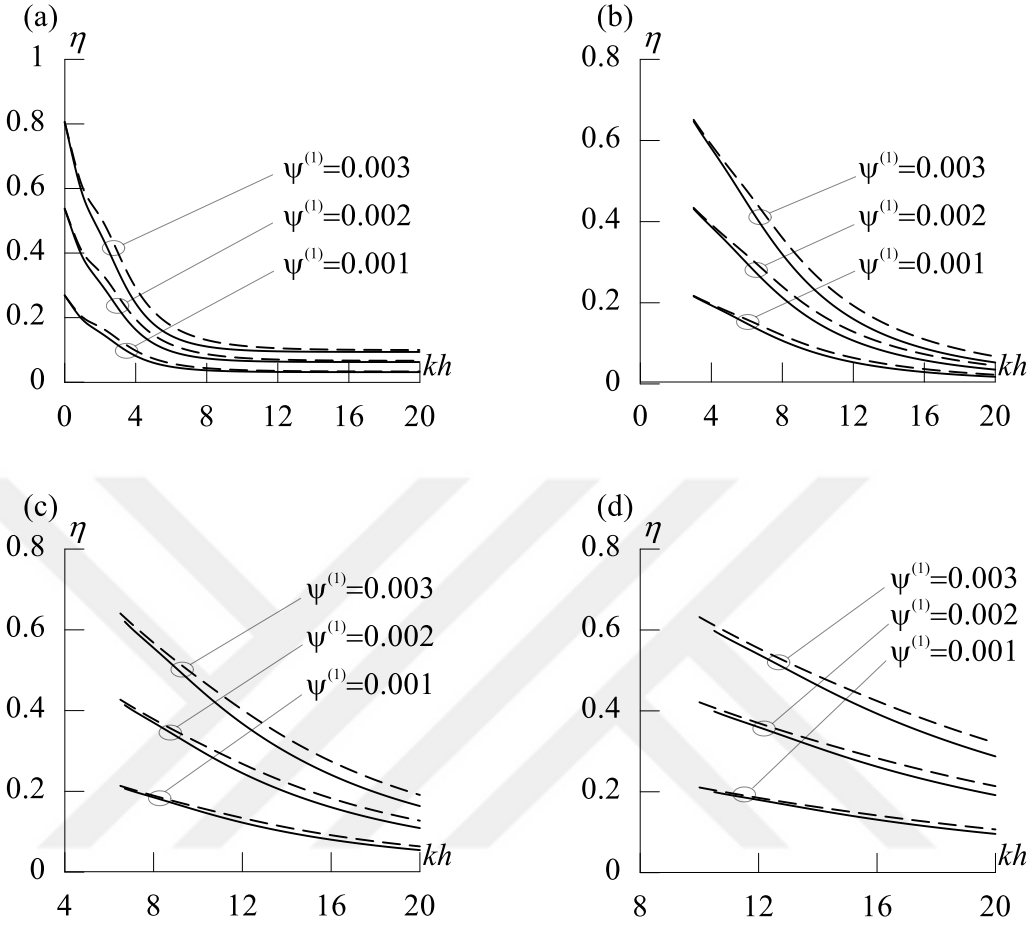
Şekil 2.19 PZT-4/Çelik sistemi için üçüncü derece elastik sabitler hesaba katıldığında yarıdüzlemdeki yatay çekme öngerilmesinin birinci (a), ikinci (b), üçüncü (c), dördüncü (d) mod dispersiyon eğrilerine etkisi (—— polarizasyon doğrultusu Ox_2, - - - - polarizasyon doğrultusu Ox_1)

2.3.4 Düşey Tek Eksenli Öngerilmelerin Dispersiyon Eğrilerine Etkisi

Bu bölümde sonuçlar piezoelektrik katmanın üst ve alt yüzey elektrotları elektriksel kısa devre olduğu durum ve katmanda piezoelektrik malzeme polarizasyon doğrultusunun Ox_2 ekseni ile çakıştığı durum için elde edilmiştir. Ayrıca, yalnızca düşey tek eksenli çekme ve basma öngerilmelerinin bulunduğu varsayılmıştır ($\sigma_{11}^{(1),0}=0$, $\sigma_{11}^{(2),0}=0$).

Kesikli çizgi ile gösterilen eğriler katmana ait piezoelektrik ve dielektrik sabitler sıfır alınarak elde edilen sonuçları, düz çizgi ile gösterilen eğriler ise katmana ait

piezoelektrik ve dielektrik sabitlerin sıfır alınmadan elde edilen sonuçları göstermektedir.

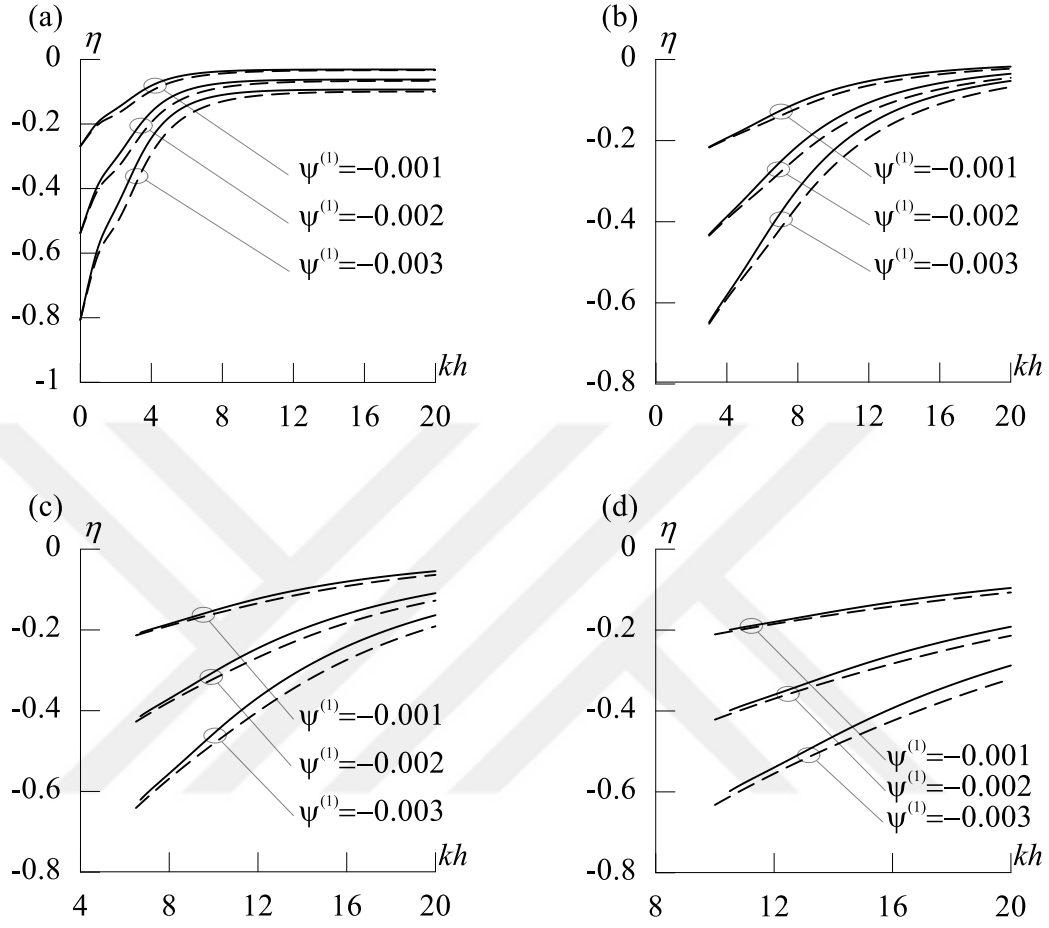


Şekil 2.20 PZT-6B/Çelik sistemi için üçüncü derece elastik sabitler hesaba katılmadığında düşey çekme öngerilmesinin birinci (a), ikinci (b), üçüncü (c), dördüncü (d) mod dispersiyon eğrilerine etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)

Şekil 2.20-2.22'de PZT-6B katman ve çelik yarıdümlemden oluşan sistemde düşey çekme ve basma öngerilmelerinin piezoelektriklik özelliğinin varlığında ve yokluğunda dispersiyon eğrilerine etkileri incelenmiştir. Ayrıca bu öngerilmelerin üçüncü derece elastik sabitlerin de dikkate alındığı ve alınmadığı durumlarda dispersiyon eğrilerine etkileri incelenmiştir. Bu şekillerde (a), (b), (c) ve (d) ile sırasıyla birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü moda ait yüzey dalgalarının dispersiyon eğrileri gösterilmiştir.

Şekil 2.20'de düşey çekme öngerilmesinin üçüncü derece elastik sabitler hesaba katılmadığında ($\sigma_{22}^{(1),0} > 0$, $a^{(2)} = 0$, $b^{(2)} = 0$, $c^{(2)} = 0$) yüzey dalgalarının yayılım hızını arttırdığı görülmektedir. Artan kh değerleri ile birlikte düşey çekme öngerilmesinin

yüzey dalgalarının yayılım hızına etkisi azalmaktadır. Tüm modlarda piezoelektriklik özelliğinin düşey çekme öngerilmesinin yüzey dalgalarının yayılım hızına etkisini azalttığı görülmektedir.



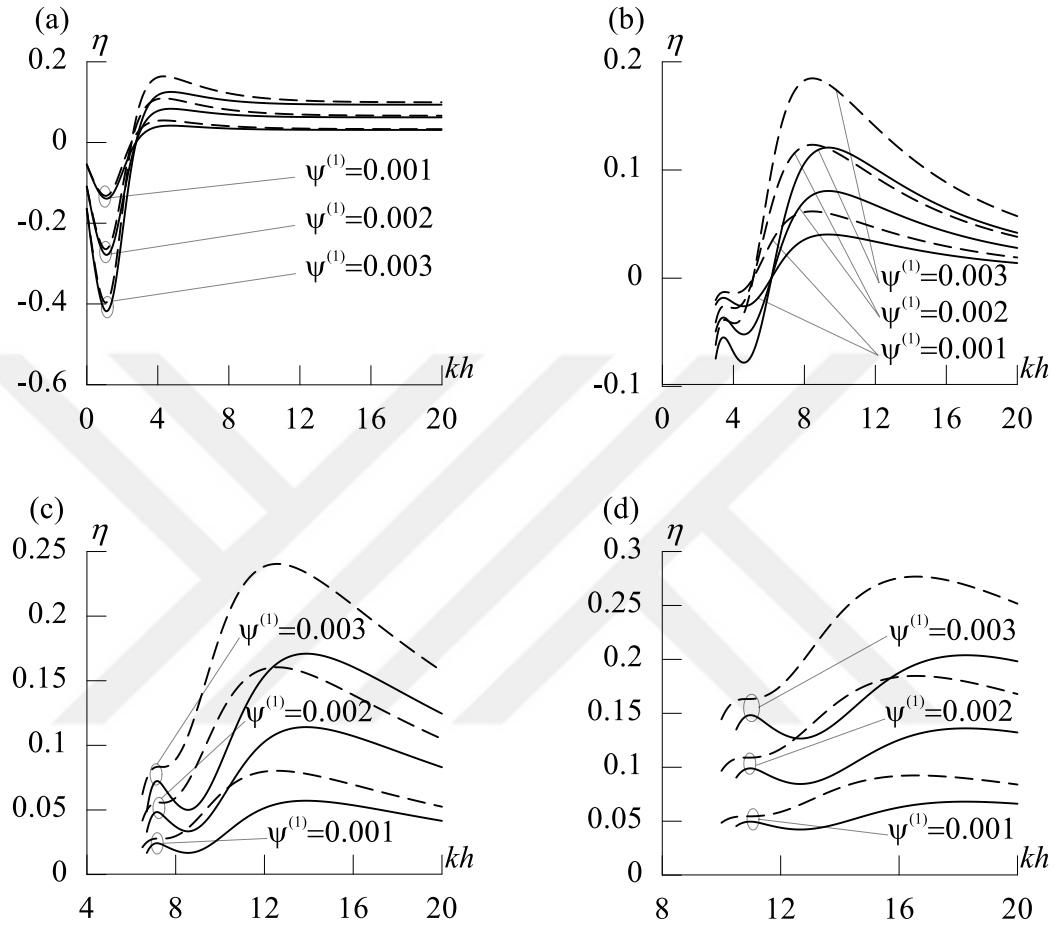
Şekil 2.21 PZT-6B/Çelik sistemi için üçüncü derece elastik sabitler hesaba katılmadığında düşey basma öngerilmesinin birinci (a), ikinci (b), üçüncü (c), dördüncü (d) mod dispersiyon eğrilerine etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)

Şekil 2.21'de düşey basma öngerilmesinin üçüncü derece elastik sabitler hesaba katılmadığında ($\sigma_{22}^{(1),0} < 0$, $a^{(2)} = 0$, $b^{(2)} = 0$, $c^{(2)} = 0$) yüzey dalgalarının yayılım hızını azalttığı görülmektedir. Şekil 2.20 ile Şekil 2.21'de elde edilen sonuçların birbirleriyle tamamen simetrik etkiler gösterdiği görülmektedir.

Şekil 2.22'de düşey çekme öngerilmesinin üçüncü derece elastik sabitler hesaba katıldığında ($\sigma_{22}^{(1),0} > 0$, $a^{(2)} = 0$, $b^{(2)} = 0$, $c^{(2)} = 0$) yüzey dalgalarının yayılım hızını üçüncü ve dördüncü mod için arttırdığı, birinci ve ikinci mod için ise farklı kh değerlerinde arttırdığı veya azalttığı görülmektedir. Genellikle piezoelektriklik

özelliğinin düşey çekme öngerilmesinin yüzey dalgalarının yayılım hızına etkisini azalttığı görülmektedir.

Şekil 2.21 ile Şekil 2.22 karşılaştırıldığında, üçüncü derece elastik sabitlerin hesaba katılmasının yüzey dalgalarının yayılım hızındaki büyük etkisi görülmektedir.



Şekil 2.22 PZT-6B/Çelik sistemi için üçüncü derece elastik sabitler hesaba katıldığında düşey çekme öngerilmesinin birinci (a), ikinci (b), üçüncü (c), dördüncü (d) mod dispersiyon eğrilerine etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)

BÖLÜM 3

ÖNGERİLMELİ PZT/METAL/PZT SANDVİÇ PLAKTA LAMB DALGALARININ DİSPERSİYONU

Bu bölümde, iki piezoelektrik dış katman ve bir metal iç katmandan oluşan yatay öngerilme altındaki sistemde Lamb dalgalarının dispersiyon denklemleri elde edilecektir. Dispersiyon denklemleri matematiksel işlemlerde kolaylık sağlaması için dış ve iç katman malzemelerinin enine ve boyuna dalga yayılım hızlarına göre ayrılmış beş farklı dalga yayılım hızı aralığında ayrı ayrı elde edilecektir. Piezoelektrik malzemenin polarizasyon doğrultusunun katman kalınlığı boyunca olduğu ve piezoelektrik katmanların üst ve alt yüzey elektrotlarının elektriksel kısa devre olduğu varsayılacaktır. Dispersiyon denklemlerinin sayısal çözümü ile elde edilecek dispersiyon eğrilerine piezoelektriklik özelliğinin, öngerilmelerin ve ideal olmayan temas koşullarının etkileri incelenecektir.

3.1 Problemin Matematiksel Formülasyonu

Kalınlığı H_{PZT} olan piezoelektrik iki dış katman ve kalınlığı $2H_{metal}$ olan bir metal iç katmandan oluşan öngerilmeli sandviç plak Şekil 3.1'de gösterilmiştir. Sandviç plakta dış katmanlara ait malzeme türü ve kalınlıkları aynıdır. Metal iç katmanın orta düzleminde $Ox_1x_2x_3$ kartezyen koordinat sistemi tanımlanmıştır. Şekil 3.1'de gösterilmeyen x_3 ekseni sayfa düzlemine dik doğrultudadır. $h_1 = H_{metal}$ ve $h_2 = H_{metal} + H_{PZT}$ olmak üzere üst dış katman

$$\left\{-\infty < x_1 < +\infty,\ h_1 \le x_2 \le h_2,\ -\infty < x_3 < +\infty\right\} \tag{3.1}$$

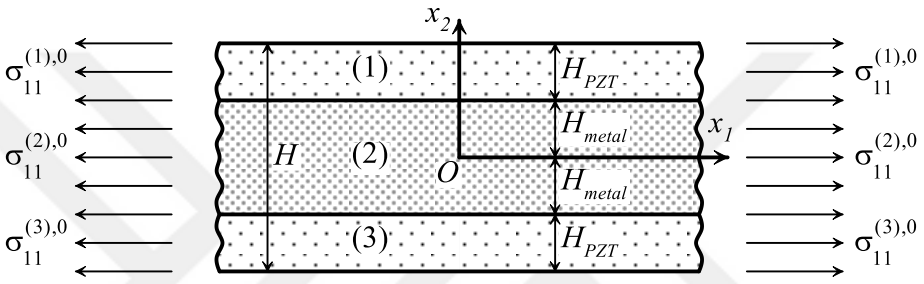
bölgesini kapsamaktadır ve üst dış katmana ait büyüklükler üst indis (1) ile gösterilmektedir. İç katman

$$\left\{-\infty < x_1 < +\infty,\ -h_1 \le x_2 \le h_1,\ -\infty < x_3 < +\infty\right\} \tag{3.2}$$

bölgesini kapsamaktadır ve iç katmana ait büyüklükler üst indis (2) ile gösterilmektedir. Alt dış katman ise

$$\left\{-\infty < x_1 < +\infty,\ -h_2 \le x_2 \le -h_1,\ -\infty < x_3 < +\infty\right\} \tag{3.3}$$

bölgesini kapsamaktadır ve alt dış katmana ait büyüklükler üst indis (3) ile gösterilmektedir.



Şekil 3.1 Piezoelektrik katman ve metal yarıdüzlemden oluşan öngerilmeli sistem

Ox_1 ekseninde, katmanlar üzerine etki eden homojen yayılı normal öngerilmeler üst indis $(m),0$ ile gösterilerek aşağıdaki gibi verilmektedir ($m=1,2,3$):

$$\sigma_{11}^{(m),0} = sabit_m \neq 0,$$

$$\sigma_{22}^{(m),0} = \sigma_{12}^{(m),0} = 0. \tag{3.4}$$

[78], [81], [82] ve [83] çalışmalarına göre hareket denklemleri:

$$\frac{\partial \sigma_{11}^{(m)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}^{(m)}}{\partial x_2} + \sigma_{11}^{(m),0} \frac{\partial^2 u_1^{(m)}}{\partial x_1^2} = \rho^{(m)} \frac{\partial^2 u_1^{(m)}}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}^{(m)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}^{(m)}}{\partial x_2} + \sigma_{11}^{(m),0} \frac{\partial^2 u_2^{(m)}}{\partial x_1^2} = \rho^{(m)} \frac{\partial^2 u_2^{(m)}}{\partial t^2}, \quad (m=1,2,3) \tag{3.5}$$

şeklinde, elektrik yük denklemi ise aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$\frac{\partial D_1^{(n)}}{\partial x_1} + \frac{\partial D_2^{(n)}}{\partial x_2} = 0. \quad (n=1,3) \tag{3.6}$$

Görüldüğü gibi (3.5) tüm katmanlar için geçerliyken, (3.6) piezoelektriklik özelliğinden dolayı yalnızca dış katmanlar için geçerlidir.

Piezoelektrik malzeme polarizasyon doğrultusunun Ox_2 ekseni ile çakıştığı (kalınlık doğrultusunda polarize edilmiş) varsayıldığından dış katmanlarda bünye denklemleri aşağıdaki gibi verilmektedir (Yang [78]):

$$\sigma_{11}^{(n)} = c_{11}^{(n)} \frac{\partial u_1^{(n)}}{\partial x_1} + c_{13}^{(n)} \frac{\partial u_2^{(n)}}{\partial x_2} + e_{31}^{(n)} \frac{\partial \varphi^{(n)}}{\partial x_2},$$

$$\sigma_{22}^{(n)} = c_{13}^{(n)} \frac{\partial u_1^{(n)}}{\partial x_1} + c_{33}^{(n)} \frac{\partial u_2^{(n)}}{\partial x_2} + e_{33}^{(n)} \frac{\partial \varphi^{(n)}}{\partial x_2},$$

$$\sigma_{12}^{(n)} = c_{44}^{(n)} \left(\frac{\partial u_1^{(n)}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^{(n)}}{\partial x_1} \right) + e_{15}^{(n)} \frac{\partial \varphi^{(n)}}{\partial x_1},$$

$$D_1^{(n)} = e_{15}^{(n)} \left(\frac{\partial u_1^{(n)}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^{(n)}}{\partial x_1} \right) - \varepsilon_{11}^{(n)} \frac{\partial \varphi^{(n)}}{\partial x_1},$$

$$D_2^{(n)} = e_{31}^{(n)} \frac{\partial u_1^{(n)}}{\partial x_1} + e_{33}^{(n)} \frac{\partial u_2^{(n)}}{\partial x_2} - \varepsilon_{33}^{(n)} \frac{\partial \varphi^{(n)}}{\partial x_2}. \quad (n = 1,3) \tag{3.7}$$

(3.5), (3.6) ve (3.7)'deki simgeler için Bölüm 2.1'deki gösterim kullanılmıştır.

İç katmanda bünye denklemleri Bölüm 2.1'deki gibi Murnaghan potansiyeli yardımıyla elde edildikten sonra doğrusallaştırılarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\sigma_{11}^{(2)} = A_{11}^{(2)} \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_1} + A_{12}^{(2)} \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_2},$$

$$\sigma_{22}^{(2)} = A_{12}^{(2)} \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_1} + A_{22}^{(2)} \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_2},$$

$$\sigma_{12}^{(2)} = \mu_{12}^{(2)} \left(\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_1} \right). \tag{3.8}$$

Buradaki $A_{11}^{(2)}$, $A_{22}^{(2)}$, $A_{12}^{(2)}$ ve $\mu_{12}^{(2)}$ sabit katsayıları aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$A_{11}^{(2)} = \lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} + \frac{\left(2b^{(2)} + c^{(2)}\right)}{\mu^{(2)}} \sigma_{11}^{(2),0} + \frac{2K_2^{(2)}}{3K_1^{(2)}} \sigma_{11}^{(2),0},$$

$$A_{22}^{(2)} = \lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} + \frac{2K_2^{(2)}}{3K_1^{(2)}}\sigma_{11}^{(2),0},$$

$$A_{12}^{(2)} = \lambda^{(2)} + \frac{b^{(2)}}{\mu^{(2)}}\sigma_{11}^{(2),0} + \frac{2\left(a^{(2)}\mu^{(2)} - b^{(2)}\lambda^{(2)}\right)}{3K_1^{(2)}\mu^{(2)}}\sigma_{11}^{(2),0},$$

$$\mu_{12}^{(2)} = \mu^{(2)} + \frac{b^{(2)}}{3K_1^{(2)}}\sigma_{11}^{(2),0} + \frac{c^{(2)}\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}\right)}{12K_1^{(2)}\mu^{(2)}}\sigma_{11}^{(2),0},$$

$$K_1^{(2)} = \lambda^{(2)} + \frac{2}{3}\mu^{(2)}, \quad K_2^{(2)} = \left(a^{(2)} + b^{(2)}\right) - \left(2b^{(2)} + c^{(2)}\right)\frac{\lambda^{(2)}}{2\mu^{(2)}}. \tag{3.9}$$

İç katman ile dış katmanlar arasında ideal ve ideal olmayan temas koşulları varsayılmıştır. Bu iki arayüzeyde ($x_2 = h_1$, $x_2 = -h_1$) sürekli gerilme koşulları aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$\sigma_{12}^{(1)}\Big|_{x_2=h_1} = \sigma_{12}^{(2)}\Big|_{x_2=h_1}, \quad \sigma_{22}^{(1)}\Big|_{x_2=h_1} = \sigma_{22}^{(2)}\Big|_{x_2=h_1},$$

$$\sigma_{12}^{(2)}\Big|_{x_2=-h_1} = \sigma_{12}^{(3)}\Big|_{x_2=-h_1}, \quad \sigma_{22}^{(2)}\Big|_{x_2=-h_1} = \sigma_{22}^{(3)}\Big|_{x_2=-h_1}. \tag{3.10}$$

Mekanik yer değiştirmelerle ilgili temas koşullarının süreksiz olduğu varsayılmıştır. Bu iki arayüzeyde süreksiz mekanik yer değiştirme temas koşulları aşağıdaki gibi verilmektedir [84], [76]:

$$u_1^{(1)}\Big|_{x_2=h_1} - u_1^{(2)}\Big|_{x_2=h_1} = F_1' \frac{2h_1}{\mu^{(2)}}\sigma_{12}^{(2)}\Big|_{x_2=h_1},$$

$$u_2^{(1)}\Big|_{x_2=h_1} - u_2^{(2)}\Big|_{x_2=h_1} = F_2' \frac{2h_1}{\mu^{(2)}}\sigma_{22}^{(2)}\Big|_{x_2=h_1},$$

$$u_1^{(3)}\Big|_{x_2=-h_1} - u_1^{(2)}\Big|_{x_2=-h_1} = F_1'' \frac{2h_1}{\mu^{(2)}}\sigma_{12}^{(2)}\Big|_{x_2=-h_1},$$

$$u_2^{(3)}\Big|_{x_2=-h_1} - u_2^{(2)}\Big|_{x_2=-h_1} = F_2'' \frac{2h_1}{\mu^{(2)}}\sigma_{22}^{(2)}\Big|_{x_2=-h_1}. \tag{3.11}$$

Bu boyutsuz değişkenler

$$0 \le F_1'; F_1''; F_2'; F_2'' \le \infty \tag{3.12}$$

aralığında farklı değerler alabilirler. Bu değişkenlerin sıfıra eşit olduğu durumda (3.11) ideal (tam) temas koşullarına karşılık gelecektir. Bu değişkenlerin sonsuza eşit olduğu durumda ise katmanlar arasında temasın olmadığı durumu temsil etmektedir.

(3.11)'deki ideal olmayan temas koşullarını ifade etmek için kullanılan model ilk kez Rokhlin ve Wang [85] tarafından oluşturulmuştur. Bu modele göre, katmanların temas yüzeyleri arasında Ox_1 ekseni doğrultusundaki yer değiştirme farklılıkları $\sigma_{12}^{(2)}$ gerilmesiyle orantılıdır. F_1' ve F_1'' yanal ideal olmayan temas koşulunu tanımlamada kullanılan değişkenler veya orantı sabitleridir (shear-spring type parameters). Katmanların temas yüzeyleri arasında Ox_2 ekseni doğrultusundaki yer değiştirme farklılıkları $\sigma_{22}^{(2)}$ gerilmesiyle orantılıdır. F_2' ve F_2'' düşey ideal olmayan temas koşulunu tanımlamada kullanılan değişkenler veya orantı sabitleridir (normal-spring type parameters).

Sandviç plağın dış yüzeylerinde ($x_2 = h_2$ ve $x_2 = -h_2$) sağlanan gerilme koşulları aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$\sigma_{12}^{(1)}\Big|_{x_2=h_2} = 0, \quad \sigma_{22}^{(1)}\Big|_{x_2=h_2} = 0,$$

$$\sigma_{12}^{(3)}\Big|_{x_2=-h_2} = 0, \quad \sigma_{22}^{(3)}\Big|_{x_2=-h_2} = 0. \tag{3.13}$$

Piezoelektrik dış katmaların üst ve alt yüzey elektrotları elektriksel kısa devre olduğu durumunda sağlanan elektrik potansiyeli koşulları aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$\varphi^{(1)}\Big|_{x_2=h_2} = 0, \quad \varphi^{(1)}\Big|_{x_2=h_1} = 0,$$

$$\varphi^{(1)}\Big|_{x_2=-h_2} = 0, \quad \varphi^{(1)}\Big|_{x_2=-h_1} = 0. \tag{3.14}$$

Piezoelektrik dış katmaların üst ve alt yüzey elektrotları elektriksel açık devre olduğu durumunda sağlanan elektrik yer değiştirme koşulları aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$D_2^{(1)}\Big|_{x_2=h_2} = 0, \quad D_2^{(1)}\Big|_{x_2=h_1} = 0,$$

$$D_2^{(1)}\Big|_{x_2=-h_2} = 0, \quad D_2^{(1)}\Big|_{x_2=-h_1} = 0. \tag{3.15}$$

3.2 Problemin Çözüm Yöntemi

Dispersiyon eğrilerinin elde edilmesinde kullanılacak denklemler piezoelektrik dış katmanlar ve metal iç katman için ayrı olarak elde edilmiştir.

3.2.1 Dış Katmanlarda Gerilme ve Elektrik Yer Değiştirme İfadelerinin Bulunması

Her iki dış katman da aynı malzeme ve özelliklere sahip olduğundan üstteki dış piezoelektrik katman için çözüm yöntemi ele alınacaktır. Katmanla ilgili denklemler piezoelektrik malzemenin polarizasyon doğrultusunun Ox_2 ekseninde olduğu durum için elde edilmiştir.

(3.7)'deki ifadeler (3.5) ve (3.6)'da yerlerine yazıldığında piezoelektrik dış katman için mekanik yer değiştirmeler ve elektrik potansiyeli cinsinden elektromekanik hareket denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\left(c_{11}^{(1)}+\sigma_{11}^{(1),0}\right)\frac{\partial^2 u_1^{(1)}}{\partial x_1^2}+c_{44}^{(1)}\frac{\partial^2 u_1^{(1)}}{\partial x_2^2}+\left(c_{13}^{(1)}+c_{44}^{(1)}\right)\frac{\partial^2 u_2^{(1)}}{\partial x_1\partial x_2}+\left(e_{15}^{(1)}+e_{31}^{(1)}\right)\frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial x_1\partial x_2}=\rho^{(1)}\frac{\partial^2 u_1^{(1)}}{\partial t^2},$$

$$\left(c_{13}^{(1)}+c_{44}^{(1)}\right)\frac{\partial^2 u_1^{(1)}}{\partial x_1\partial x_2}+\left(c_{44}^{(1)}+\sigma_{11}^{(1),0}\right)\frac{\partial^2 u_2^{(1)}}{\partial x_1^2}+c_{33}^{(1)}\frac{\partial^2 u_2^{(1)}}{\partial x_2^2}+e_{15}^{(1)}\frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial x_1^2}+e_{33}^{(1)}\frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial x_2^2}=\rho^{(1)}\frac{\partial^2 u_2^{(1)}}{\partial t^2},$$

$$\left(e_{15}^{(1)}+e_{31}^{(1)}\right)\frac{\partial^2 u_1^{(1)}}{\partial x_1\partial x_2}+e_{15}^{(1)}\frac{\partial^2 u_2^{(1)}}{\partial x_1^2}+e_{33}^{(1)}\frac{\partial^2 u_2^{(1)}}{\partial x_2^2}-\varepsilon_{11}^{(1)}\frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial x_1^2}-\varepsilon_{33}^{(1)}\frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial x_2^2}=0. \tag{3.16}$$

Lamb dalgalarının yayılım doğrultusu Ox_1 ekseninde olduğunda, dış katman için mekanik yer değiştirmeler ve elektrik potansiyeli aşağıdaki gibi temsil edilebilir:

$$u_1^{(1)}=A^{(1)}e^{R^{(1)}kx_2}\sin(kx_1-\omega t),$$

$$u_2^{(1)}=B^{(1)}e^{R^{(1)}kx_2}\cos\left(kx_1-\omega t\right),$$

$$\varphi^{(1)}=C^{(1)}e^{R^{(1)}kx_2}\cos(kx_1-\omega t). \tag{3.17}$$

Buradaki simgeler için Bölüm 2.2'deki gösterim kullanılmıştır.

(3.17)'deki ifadeler (3.16)'da yerlerine yazılarak elde edilen denklem takımının katsayılar matrisine $\left[K^{(1)}\right]$ denirse bu denklem takımı matris formunda (2.21)'deki gibi gösterilebilir. Bu matrisin elemanları aşağıdaki gibidir:

$$K_{11}=\left(c_{11}^{(1)}+\sigma_{11}^{(1),0}-c_{44}^{(1)}\left(R^{(1)}\right)^2-\rho^{(1)}\left(\omega^2/k^2\right)\right),$$

$$K_{12}=\left(c_{13}^{(1)}+c_{44}^{(1)}\right)R^{(1)},$$

$$K_{13}=\left(e_{15}^{(1)}+e_{31}^{(1)}\right)R^{(1)},$$

$$K_{21}=\left(c_{13}^{(1)}+c_{44}^{(1)}\right)R^{(1)},$$

$$K_{22}=-\left(c_{44}^{(1)}+\sigma_{11}^{(1),0}-c_{33}^{(1)}\left(R^{(1)}\right)^2-\rho^{(1)}\left(\omega^2/k^2\right)\right),$$

$$K_{23}=-\left(e_{15}^{(1)}-e_{33}^{(1)}\left(R^{(1)}\right)^2\right),$$

$$K_{31}=\left(e_{15}^{(1)}+e_{31}^{(1)}\right)R^{(1)},$$

$$K_{32}=-\left(e_{15}^{(1)}-e_{33}^{(1)}\left(R^{(1)}\right)^2\right),$$

$$K_{33}=-\left(\varepsilon_{33}^{(1)}\left(R^{(1)}\right)^2-\varepsilon_{11}^{(1)}\right). \tag{3.18}$$

(3.18)'deki matris elemanları kullanılarak α ve β (2.23)'deki gibi bulunur. Böylece $B^{(1)}$ ve $C^{(1)}$'in $A^{(1)}$ cinsinden ifadeleri elde edilmiş olur. $A^{(1)}$, $B^{(1)}$ ve $C^{(1)}$'in sıfırdan farklı çözümlerini elde etmek için (2.24) sağlanmalıdır.

(2.24)'ten her bir $c=\omega/k$ değerine karşılık $R^{(1)}$ parametresine ait altı kök elde edilir. Bu köklerin her biri Lamb dalgalarının yayılımının farklı mod bileşenlerini temsil etmektedir ve birer özel çözüm verir. Dalga hızı $c_1^{(1)}>c>c_2^{(1)}$ olduğu durumda $R^{(1)}$ parametresine ait kökler aşağıdaki gibi olmaktadır (iki sanal, dört reel kök):

$$R_1^{(1)}=ip_1,\ \ R_2^{(1)}=-ip_1,\ \ R_3^{(1)}=p_2,\ \ R_4^{(1)}=-p_2,\ \ R_5^{(1)}=p_3,\ \ R_6^{(1)}=-p_3. \tag{3.19}$$

Burada $c_1^{(1)}$ dış katman malzemesinin boyuna dalga yayılım hızı, $c_2^{(1)}$ enine dalga yayılım hızıdır ve aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$c_1^{(1)}=\sqrt{\frac{c_{11}^{(1)}}{\rho^{(1)}}},\ \ c_2^{(1)}=\sqrt{\frac{c_{44}^{(1)}+\left(e_{15}^{(1)}\right)^2/\varepsilon_{11}^{(1)}}{\rho^{(1)}}},\ \ i=\sqrt{-1},\ \ p_1>0,\ \ p_2>0,\ \ p_3>0 \tag{3.20}$$

Bu durumda, önceki bölümdeki işlemler yapılarak (3.17)'deki dış katmandaki mekanik yer değiştirmeler ve elektrik potansiyeline ait genel çözüm aşağıdaki gibi elde edilir:

$$u_1^{(1)} = \left(\begin{array}{l} X_1^{(1)} \sin\left(p_1 k x_2\right) + X_2^{(1)} \cos\left(p_1 k x_2\right) + X_3^{(1)} e^{p_2 k x_2} \\ \qquad + X_4^{(1)} e^{-p_2 k x_2} + X_5^{(1)} e^{p_3 k x_2} + X_6^{(1)} e^{-p_3 k x_2} \end{array} \right) \sin(k x_1 - \omega t),$$

$$u_2^{(1)} = \left(\begin{array}{l} X_1^{(1)} \alpha_1 \cos\left(p_1 k x_2\right) + X_2^{(1)} \alpha_2 \sin\left(p_1 k x_2\right) + X_3^{(1)} \alpha_3 e^{p_2 k x_2} \\ \qquad + X_4^{(1)} \alpha_4 e^{-p_2 k x_2} + X_5^{(1)} \alpha_5 e^{p_3 k x_2} + X_6^{(1)} \alpha_6 e^{-p_3 k x_2} \end{array} \right) \cos\left(k x_1 - \omega t\right),$$

$$\varphi^{(1)} = \left(\begin{array}{l} X_1^{(1)} \beta_1 \cos\left(p_1 k x_2\right) + X_2^{(1)} \beta_2 \sin\left(p_1 k x_2\right) + X_3^{(1)} \beta_3 e^{p_2 k x_2} \\ \qquad + X_4^{(1)} \beta_4 e^{-p_2 k x_2} + X_5^{(1)} \beta_5 e^{p_3 k x_2} + X_6^{(1)} \beta_6 e^{-p_3 k x_2} \end{array} \right) \cos\left(k x_1 - \omega t\right). \qquad (3.21)$$

(2.34) yardımıyla α_1, β_1, α_2 ve β_2'nin bulunması için gereken $[K1]$ ve $[K2]$ matrislerinin elemanları aşağıdaki gibidir:

$$K1_{11} = \left(-c_{11}^{(1)} - \sigma_{11}^{(1),0} - c_{44}^{(1)} p_1^{\,2} + \rho^{(1)} \left(\omega^2 / k^2\right)\right),$$

$$K1_{12} = \left(c_{13}^{(1)} + c_{44}^{(1)}\right) p_1,$$

$$K1_{13} = \left(e_{15}^{(1)} + e_{31}^{(1)}\right) p_1,$$

$$K1_{21} = \left(c_{13}^{(1)} + c_{44}^{(1)}\right) p_1,$$

$$K1_{22} = -\left(c_{44}^{(1)} + \sigma_{11}^{(1),0} + c_{33}^{(1)} p_1^{\,2} - \rho^{(1)} \left(\omega^2 / k^2\right)\right),$$

$$K1_{23} = -\left(e_{15}^{(1)} + e_{33}^{(1)} p_1^{\,2}\right),$$

$$K1_{31} = \left(e_{15}^{(1)} + e_{31}^{(1)}\right) p_1,$$

$$K1_{32} = -\left(e_{15}^{(1)} + e_{33}^{(1)} p_1^{\,2}\right),$$

$$K1_{33} = \left(\varepsilon_{33}^{(1)} p_1^{\,2} + \varepsilon_{11}^{(1)}\right),$$

$$K2_{11} = -\left(-c_{11}^{(1)} - \sigma_{11}^{(1),0} - c_{44}^{(1)} p_1^{\,2} + \rho^{(1)} \left(\omega^2 / k^2\right)\right),$$

$$K2_{12} = \left(c_{13}^{(1)} + c_{44}^{(1)}\right) p_1,$$

$$K2_{13} = \left(e_{15}^{(1)} + e_{31}^{(1)}\right) p_1,$$

$$K2_{21} = -\left(c_{13}^{(1)} + c_{44}^{(1)}\right) p_1,$$

$$K2_{22} = -\left(c_{44}^{(1)} + \sigma_{11}^{(1),0} + c_{33}^{(1)} {p_1}^2 - \rho^{(1)}\left(\omega^2/k^2\right)\right),$$

$$K2_{23} = -\left(e_{15}^{(1)} + e_{33}^{(1)} {p_1}^2\right),$$

$$K2_{31} = -\left(e_{15}^{(1)} + e_{31}^{(1)}\right) p_1,$$

$$K2_{32} = -\left(e_{15}^{(1)} + e_{33}^{(1)} {p_1}^2\right),$$

$$K2_{33} = \left(\varepsilon_{33}^{(1)} {p_1}^2 + \varepsilon_{11}^{(1)}\right). \tag{3.22}$$

(3.18)'de $R^{(1)}$ yerine p_2 yazılarak ve bu matris elemanları kullanılarak (2.23)'ten α_3 ve β_3, $-p_2$ yazılarak α_4 ve β_4, p_3 yazılarak α_5 ve β_5, $-p_3$ yazılarak α_6 ve β_6 elde edilir. Bulunan bu değerlere bağlı olarak (3.7)'deki gerilme ve elektrik yer değiştirme ifadeleri (2.35)'deki gibi elde edilir.

Dalga hızı $c < c_2^{(1)}$ olduğu durumda $R^{(1)}$ parametresine ait kökler aşağıdaki gibi olmaktadır (altı reel kök):

$$R_1^{(1)} = p_1,\ \ R_2^{(1)} = -p_1,\ \ R_3^{(1)} = p_2,\ \ R_4^{(1)} = -p_2,\ \ R_5^{(1)} = p_3,\ \ R_6^{(1)} = -p_3. \tag{3.23}$$

Bu durumda dış katmandaki mekanik yer değiştirmeler ve elektrik potansiyeline ait genel çözüm aşağıdaki gibi elde edilir:

$$u_1^{(1)} = \left(\begin{array}{r} X_1^{(1)} e^{p_1 k x_2} + X_2^{(1)} e^{-p_1 k x_2} + X_3^{(1)} e^{p_2 k x_2} + X_4^{(1)} e^{-p_2 k x_2} \\ + X_5^{(1)} e^{p_3 k x_2} + X_6^{(1)} e^{-p_3 k x_2} \end{array} \right) \sin(k x_1 - \omega t),$$

$$u_2^{(1)} = \left(\begin{array}{r} X_1^{(1)} \alpha_1 e^{p_1 k x_2} + X_2^{(1)} \alpha_2 e^{-p_1 k x_2} + X_3^{(1)} \alpha_3 e^{p_2 k x_2} + X_4^{(1)} \alpha_4 e^{-p_2 k x_2} \\ + X_5^{(1)} \alpha_5 e^{p_3 k x_2} + X_6^{(1)} \alpha_6 e^{-p_3 k x_2} \end{array} \right) \cos\left(k x_1 - \omega t\right),$$

$$\varphi^{(1)} = \left(\begin{array}{r} X_1^{(1)} \beta_1 e^{p_1 k x_2} + X_2^{(1)} \beta_2 e^{-p_1 k x_2} + X_3^{(1)} \beta_3 e^{p_2 k x_2} + X_4^{(1)} \beta_4 e^{-p_2 k x_2} \\ + X_5^{(1)} \beta_5 e^{p_3 k x_2} + X_6^{(1)} \beta_6 e^{-p_3 k x_2} \end{array} \right) \cos\left(k x_1 - \omega t\right). \tag{3.24}$$

(3.18)'de $R^{(1)}$ yerine p_1 yazarak ve böylece elde edilen (2.23)'ten α_1 ve β_1, $-p_1$ yazarak α_2 ve β_2, p_2 yazarak α_3 ve β_3, $-p_2$ yazarak α_4 ve β_4 elde edilir, p_3 yazarak α_5 ve β_5, $-p_3$ yazarak α_6 ve β_6 (3.24) için elde edilir. Bulunan bu değerlere

bağlı olarak (3.7)'deki gerilme ve elektrik yer değiştirme ifadeleri (3.24) kullanılarak (2.38)'deki gibi elde edilir.

Dalga hızı $c > c_1^{(1)}$ olduğu durumda $R^{(1)}$ parametresine ait kökler aşağıdaki gibi olmaktadır (dört sanal, iki reel kök):

$$R_1^{(1)} = ip_1,\ \ R_2^{(1)} = -ip_1,\ \ R_3^{(1)} = ip_2,\ \ R_4^{(1)} = -ip_2,\ \ R_5^{(1)} = p_3,\ \ R_6^{(1)} = -p_3. \tag{3.25}$$

Bu durumda dış katmandaki mekanik yer değiştirmeler ve elektrik potansiyeline ait genel çözüm aşağıdaki gibi elde edilir:

$$u_1^{(1)} = \left(\begin{array}{r} X_1^{(1)} \sin\left(p_1 k x_2\right) + X_2^{(1)} \cos\left(p_1 k x_2\right) + X_1^{(1)} \sin\left(p_2 k x_2\right) \\ + X_2^{(1)} \cos\left(p_2 k x_2\right) + X_5^{(1)} e^{p_3 k x_2} + X_6^{(1)} e^{-p_3 k x_2} \end{array} \right) \sin(k x_1 - \omega t),$$

$$u_2^{(1)} = \left(\begin{array}{r} X_1^{(1)} \alpha_1 \cos\left(p_1 k x_2\right) + X_2^{(1)} \alpha_2 \sin\left(p_1 k x_2\right) + X_3^{(1)} \alpha_3 \cos\left(p_2 k x_2\right) \\ + X_4^{(1)} \alpha_4 \sin\left(p_2 k x_2\right) + X_5^{(1)} \alpha_5 e^{p_3 k x_2} + X_6^{(1)} \alpha_6 e^{-p_3 k x_2} \end{array} \right) \cos\left(k x_1 - \omega t\right),$$

$$\varphi^{(1)} = \left(\begin{array}{r} X_1^{(1)} \beta_1 \cos\left(p_1 k x_2\right) + X_2^{(1)} \beta_2 \sin\left(p_1 k x_2\right) + X_3^{(1)} \beta_3 \cos\left(p_2 k x_2\right) \\ + X_4^{(1)} \beta_4 \sin\left(p_2 k x_2\right) + X_5^{(1)} \beta_5 e^{p_3 k x_2} + X_6^{(1)} \beta_6 e^{-p_3 k x_2} \end{array} \right) \cos\left(k x_1 - \omega t\right). \tag{3.26}$$

(2.34) yardımıyla α_1, β_1, α_2 ve β_2 (3.22)'deki $\left[K1\right]$ ve $\left[K2\right]$ matrisleri kullanılarak elde edilir. α_3, β_3, α_4 ve β_4 ise (3.22)'deki $\left[K1\right]$ ve $\left[K2\right]$ matrislerinde p_1 yerine p_2 yazılarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\alpha_3 = \frac{K1_{13} K1_{21} - K1_{11} K1_{23}}{K1_{12} K1_{23} - K1_{13} K1_{22}},\ \ \beta_3 = \frac{K1_{12} K1_{21} - K1_{11} K1_{22}}{K1_{13} K1_{22} - K1_{12} K1_{23}},$$

$$\alpha_4 = \frac{K2_{13} K2_{21} - K2_{11} K2_{23}}{K2_{12} K2_{23} - K2_{13} K2_{22}},\ \ \beta_4 = \frac{K2_{12} K2_{21} - K2_{11} K2_{22}}{K2_{13} K2_{22} - K2_{12} K2_{23}}. \tag{3.27}$$

Bulunan bu değerlere bağlı olarak (3.7)'deki gerilme ve elektrik yer değiştirme ifadeleri (3.26) kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\sigma_{12}^{(1)}=\begin{pmatrix} X_1^{(1)}\left(c_{44}^{(1)}p_1-\alpha_1c_{44}^{(1)}-\beta_1e_{15}^{(1)}\right)\cos\left(p_1kx_2\right)\\ +X_2^{(1)}\left(-c_{44}^{(1)}p_1-\alpha_2c_{44}^{(1)}-\beta_2e_{15}^{(1)}\right)\sin\left(p_1kx_2\right)\\ +X_3^{(1)}\left(c_{44}^{(1)}p_2-\alpha_3c_{44}^{(1)}-\beta_3e_{15}^{(1)}\right)\cos\left(p_2kx_2\right)\\ +X_4^{(1)}\left(-c_{44}^{(1)}p_2-\alpha_4c_{44}^{(1)}-\beta_4e_{15}^{(1)}\right)\sin\left(p_2kx_2\right)\\ +X_5^{(1)}\left(c_{44}^{(1)}p_3-\alpha_5c_{44}^{(1)}-\beta_5e_{15}^{(1)}\right)e^{p_3kx_2}\\ +X_6^{(1)}\left(-c_{44}^{(1)}p_3-\alpha_6c_{44}^{(1)}-\beta_6e_{15}^{(1)}\right)e^{-p_3kx_2} \end{pmatrix}k\sin(kx_1-\omega t),$$

$$\sigma_{22}^{(1)}=\begin{pmatrix} X_1^{(1)}\left(c_{13}^{(1)}-\alpha_1c_{33}^{(1)}p_1-\beta_1e_{33}^{(1)}p_1\right)\sin(p_1kx_2)\\ +X_2^{(1)}\left(c_{13}^{(1)}+\alpha_2c_{33}^{(1)}p_1+\beta_2e_{33}^{(1)}p_1\right)\cos(p_1kx_2)\\ +X_3^{(1)}\left(c_{13}^{(1)}-\alpha_3c_{33}^{(1)}p_2-\beta_3e_{33}^{(1)}p_2\right)\sin(p_2kx_2)\\ +X_4^{(1)}\left(c_{13}^{(1)}+\alpha_4c_{33}^{(1)}p_2+\beta_4e_{33}^{(1)}p_2\right)\cos(p_2kx_2)\\ +X_5^{(1)}\left(c_{13}^{(1)}+\alpha_5c_{33}^{(1)}p_3+\beta_5e_{33}^{(1)}p_3\right)e^{p_3kx_2}\\ +X_6^{(1)}\left(c_{13}^{(1)}-\alpha_6c_{33}^{(1)}p_3-\beta_6e_{33}^{(1)}p_3\right)e^{-p_3kx_2} \end{pmatrix}k\cos(kx_1-\omega t),$$

$$D_2^{(1)}=\begin{pmatrix} X_1^{(1)}\left(e_{31}^{(1)}-\alpha_1e_{33}^{(1)}p_1+\beta_1\varepsilon_{33}^{(1)}p_1\right)\sin(p_1kx_2)\\ +X_2^{(1)}\left(e_{31}^{(1)}+\alpha_2e_{33}^{(1)}p_1-\beta_2\varepsilon_{33}^{(1)}p_1\right)\cos(p_1kx_2)\\ +X_3^{(1)}\left(e_{31}^{(1)}-\alpha_3e_{33}^{(1)}p_2+\beta_3\varepsilon_{33}^{(1)}p_2\right)\sin(p_2kx_2)\\ +X_4^{(1)}\left(e_{31}^{(1)}+\alpha_4e_{33}^{(1)}p_2-\beta_4\varepsilon_{33}^{(1)}p_2\right)\cos(p_2kx_2)\\ +X_5^{(1)}\left(e_{31}^{(1)}+\alpha_5e_{33}^{(1)}p_3-\beta_5\varepsilon_{33}^{(1)}p_3\right)e^{p_3kx_2}\\ +X_6^{(1)}\left(e_{31}^{(1)}-\alpha_6e_{33}^{(1)}p_3+\beta_6\varepsilon_{33}^{(1)}p_3\right)e^{-p_3kx_2} \end{pmatrix}k\cos(kx_1-\omega t). \qquad (3.28)$$

3.2.2 İç Katmanda Gerilme İfadelerinin Bulunması

(3.8)'deki ifadeler (3.5)'te yerlerine yazıldığında iç katmanda mekanik yer değiştirmeler cinsinden hareket denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\left(A_{11}^{(2)}+\sigma_{11}^{(2),0}\right)\frac{\partial^2u_1^{(2)}}{\partial x_1^2}+\mu_{12}^{(2)}\frac{\partial^2u_1^{(2)}}{\partial x_2^2}+\left(A_{12}^{(2)}+\mu_{12}^{(2)}\right)\frac{\partial^2u_2^{(1)}}{\partial x_1\partial x_2}=\rho^{(2)}\frac{\partial^2u_1^{(2)}}{\partial t^2},$$

$$\left(A_{12}^{(2)}+\mu_{12}^{(2)}\right)\frac{\partial^2u_1^{(2)}}{\partial x_1\partial x_2}+\left(\mu_{12}^{(2)}+\sigma_{11}^{(2),0}\right)\frac{\partial^2u_2^{(2)}}{\partial x_1^2}+A_{22}^{(2)}\frac{\partial^2u_2^{(2)}}{\partial x_2^2}=\rho^{(2)}\frac{\partial^2u_2^{(2)}}{\partial t^2}. \qquad (3.29)$$

(3.17)'ye benzer şekilde iç katman için mekanik yer değiştirmeler aşağıdaki gibi temsil edilebilir:

$$u_1^{(2)} = X^{(2)} e^{R^{(2)} k x_2} \sin(k x_1 - \omega t),$$

$$u_2^{(2)} = Y^{(2)} e^{R^{(2)} k x_2} \cos(k x_1 - \omega t). \tag{3.30}$$

(3.30)'daki ifadeler (3.29)'da yerlerine yazıldığında aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\left(-A_{11}^{(2)} - \sigma_{11}^{(2),0} + \mu_{12}^{(2)} \left(R^{(2)}\right)^2 + \rho^{(2)} \left(\omega^2 / k^2\right)\right) X^{(2)} - \left(A_{12}^{(2)} + \mu_{12}^{(2)}\right) R^{(2)} Y^{(2)} = 0,$$

$$\left(A_{12}^{(2)} + \mu_{12}^{(2)}\right) R^{(2)} X^{(2)} + \left(-\mu_{12}^{(2)} - \sigma_{11}^{(2),0} + A_{22}^{(2)} \left(R^{(2)}\right)^2 + \rho^{(2)} \left(\omega^2 / k^2\right)\right) Y^{(2)} = 0, \tag{3.31}$$

veya

$$\begin{bmatrix} \left(k_{11} + \left(R^{(2)}\right)^2\right) & k_{12} R^{(2)} \\ k_{21} R^{(2)} & \left(k_{22} + \left(R^{(2)}\right)^2\right) \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} X^{(2)} \\ Y^{(2)} \end{Bmatrix} = \left[K^{(2)}\right] . X^{(2)} \begin{Bmatrix} 1 \\ \gamma \end{Bmatrix} = 0. \tag{3.32}$$

Burada

$$k_{11} = \frac{\left(-A_{11}^{(2)} - \sigma_{11}^{(2),0} + \rho^{(2)} \left(\omega^2 / k^2\right)\right)}{\mu_{12}^{(2)}}, \quad k_{12} = -\frac{\left(A_{12}^{(2)} + \mu_{12}^{(2)}\right)}{\mu_{12}^{(2)}},$$

$$k_{21} = \frac{\left(A_{12}^{(2)} + \mu_{12}^{(2)}\right)}{A_{22}^{(2)}}, \quad k_{22} = \frac{-\mu_{12}^{(2)} - \sigma_{11}^{(2),0} + \rho^{(2)} \left(\omega^2 / k^2\right)}{A_{22}^{(2)}}. \tag{3.33}$$

$X^{(2)}$ ve $Y^{(2)}$'nin sıfırdan farklı çözümlerini elde etmek için (3.31)'deki denklem takımının katsayılar matrisinin ($\left[K^{(2)}\right]$) determinantı sıfır olmalıdır. Bu eşitlik aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\left(R^{(2)}\right)^4 + \left(k_{11} + k_{22} - k_{12} k_{21}\right) \left(R^{(2)}\right)^2 + \left(k_{11} k_{22}\right) = 0 \tag{3.34}$$

(3.34)'ten her bir $c = \omega / k$ değerine karşılık $R^{(2)}$ parametresine ait dört kök elde edilir. Bu köklerin her biri iç katmandaki dalga yayılımının farklı mod bileşenlerini temsil etmektedir ve birer özel çözüm verir. Dalga hızı $c_2^{(2)} > c$ olduğu durumda $R^{(2)}$ parametresine ait kökler

$$R_1^{(2)}, \ -R_1^{(2)}, \ R_2^{(2)}, \ -R_2^{(2)}, \tag{3.35}$$

şeklinde (dört reel kök), dalga hızı $c_1^{(2)} > c > c_2^{(2)}$ olduğu durumda $R^{(2)}$ parametresine ait kökler

$$R_1^{(2)}i,\ -R_1^{(2)}i,\ R_2^{(2)},\ -R_2^{(2)}, \tag{3.36}$$

şeklinde (iki sanal, iki reel kök), dalga hızı $c > c_1^{(2)}$ olduğu durumda $R^{(2)}$ parametresine ait kökler

$$R_1^{(2)}i,\ -R_1^{(2)}i,\ R_2^{(2)}i,\ -R_2^{(2)}i, \tag{3.37}$$

şeklinde (dört sanal kök) olmaktadır. Burada $c_1^{(2)}$ iç katman malzemesinin boyuna dalga yayılım hızı, $c_2^{(2)}$ enine dalga yayılım hızıdır ve aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$c_1^{(2)} = \sqrt{\frac{\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}\right)}{\rho^{(2)}}},\ c_2^{(2)} = \sqrt{\frac{\mu^{(2)}}{\rho^{(2)}}},\ i = \sqrt{-1},\ R_1^{(2)} > 0,\ R_2^{(2)} > 0, \tag{3.38}$$

$R^{(2)}$ parametresine ait kökler (3.35)'deki gibi olduğu durumda (3.30)'daki ifadeler aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$u_1^{(2)} = \left(A_1^{(2)}e^{R_1^{(2)}kx_2} + A_2^{(2)}e^{-R_1^{(2)}kx_2} + A_3^{(2)}e^{R_2^{(2)}kx_2} + A_4^{(2)}e^{-R_2^{(2)}kx_2}\right)\sin(kx_1 - \omega t),$$

$$u_2^{(2)} = \left(B_1^{(2)}e^{R_1^{(2)}kx_2} + B_2^{(2)}e^{-R_1^{(2)}kx_2} + B_3^{(2)}e^{R_2^{(2)}kx_2} + B_4^{(2)}e^{-R_2^{(2)}kx_2}\right)\cos(kx_1 - \omega t). \tag{3.39}$$

İşlemlerde kolaylık sağlanması için üstel karmaşık sayılar hiperbolik fonksiyonlarla gösterilirse (3.39)'daki ifadeler aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$u_1^{(2)} = \left(\begin{array}{r} X_1^{(2)}\sinh\left(R_1^{(2)}kx_2\right) + X_2^{(2)}\cosh\left(R_1^{(2)}kx_2\right) + X_3^{(2)}\sinh\left(R_2^{(2)}kx_2\right) \\ + X_4^{(2)}\cosh\left(R_2^{(2)}kx_2\right) \end{array}\right)\sin(kx_1 - \omega t),$$

$$u_2^{(2)} = \left(\begin{array}{r} Y_1^{(2)}\cosh\left(R_1^{(2)}kx_2\right) + Y_2^{(2)}\sinh\left(R_1^{(2)}kx_2\right) + Y_3^{(2)}\cosh\left(R_2^{(2)}kx_2\right) \\ + Y_4^{(2)}\sinh\left(R_2^{(2)}kx_2\right) \end{array}\right)\cos(kx_1 - \omega t). \tag{3.40}$$

(3.40)'daki ifadeler (3.29)'da yerlerine yazılarak iç katmandaki mekanik yer değiştirmelere ait genel çözüm aşağıdaki gibi elde edilir:

$$u_1^{(2)} = \left(\begin{array}{l} X_1^{(2)}\sinh\left(R_1^{(2)}kx_2\right) + X_2^{(2)}\cosh\left(R_1^{(2)}kx_2\right) \\ + X_3^{(2)}\sinh\left(R_2^{(2)}kx_2\right) + X_4^{(2)}\cosh\left(R_2^{(2)}kx_2\right) \end{array}\right)\sin(kx_1 - \omega t),$$

$$u_2^{(2)} = \begin{pmatrix} X_1^{(2)}\gamma_1 \cosh\left(R_1^{(2)}kx_2\right) + X_2^{(2)}\gamma_2 \sinh\left(R_1^{(2)}kx_2\right) \\ +X_3^{(2)}\gamma_3 \cosh\left(R_2^{(2)}kx_2\right) + X_4^{(2)}\gamma_4 \sinh\left(R_2^{(2)}kx_2\right) \end{pmatrix} \cos(kx_1 - \omega t). \tag{3.41}$$

Burada

$$\gamma_1 = \gamma_2 = -\frac{k_{21}R_1^{(2)}}{k_{22} + \left(R_1^{(2)}\right)^2}, \quad \gamma_3 = \gamma_4 = -\frac{k_{21}R_2^{(2)}}{k_{22} + \left(R_2^{(2)}\right)^2}. \tag{3.42}$$

(3.8)'deki gerilme ifadeleri (3.41) kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\sigma_{12}^{(2)} = \begin{pmatrix} X_1^{(2)}\mu_{12}^{(2)}\left(R_1^{(2)} - \gamma_1\right)\cosh\left(R_1^{(2)}kx_2\right) \\ +X_2^{(2)}\mu_{12}^{(2)}\left(R_1^{(2)} - \gamma_2\right)\sinh\left(R_1^{(2)}kx_2\right) \\ +X_3^{(2)}\mu_{12}^{(2)}\left(R_2^{(2)} - \gamma_3\right)\cosh\left(R_2^{(2)}kx_2\right) \\ +X_4^{(2)}\mu_{12}^{(2)}\left(R_2^{(2)} - \gamma_4\right)\sinh\left(R_2^{(2)}kx_2\right) \end{pmatrix} \mathrm{k}\sin(kx_1 - \omega t),$$

$$\sigma_{22}^{(2)} = \begin{pmatrix} X_1^{(2)}\left(A_{12}^{(2)} + \gamma_1 A_{22}^{(2)}R_1^{(2)}\right)\sinh\left(R_1^{(2)}kx_2\right) \\ +X_2^{(2)}\left(A_{12}^{(2)} + \gamma_2 A_{22}^{(2)}R_1^{(2)}\right)\cosh\left(R_1^{(2)}kx_2\right) \\ +X_3^{(2)}\left(A_{12}^{(2)} + \gamma_3 A_{22}^{(2)}R_2^{(2)}\right)\sinh\left(R_2^{(2)}kx_2\right) \\ +X_4^{(2)}\left(A_{12}^{(2)} + \gamma_4 A_{22}^{(2)}R_2^{(2)}\right)\cosh\left(R_2^{(2)}kx_2\right) \end{pmatrix} \mathrm{k}\cos(kx_1 - \omega t). \tag{3.43}$$

$R^{(2)}$ parametresine ait kökler (3.36)'daki gibi olduğu durumda (3.39)'daki ifadeler aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$u_1^{(2)} = \begin{pmatrix} X_1^{(2)}\sin\left(R_1^{(2)}kx_2\right) + X_2^{(2)}\cos\left(R_1^{(2)}kx_2\right) + X_3^{(2)}\sinh\left(R_2^{(2)}kx_2\right) \\ +X_4^{(2)}\cosh\left(R_2^{(2)}kx_2\right) \end{pmatrix} \sin(kx_1 - \omega t),$$

$$u_2^{(2)} = \begin{pmatrix} Y_1^{(2)}\cos\left(R_1^{(2)}kx_2\right) + Y_2^{(2)}\sin\left(R_1^{(2)}kx_2\right) + Y_3^{(2)}\cosh\left(R_2^{(2)}kx_2\right) \\ +Y_4^{(2)}\sinh\left(R_2^{(2)}kx_2\right) \end{pmatrix} \cos(kx_1 - \omega t). \tag{3.44}$$

(3.44)'deki ifadeler (3.29)'da yerlerine yazılarak iç katmandaki mekanik yer değiştirmelere ait genel çözüm aşağıdaki gibi elde edilir:

$$u_1^{(2)} = \begin{pmatrix} X_1^{(2)}\sin\left(R_1^{(2)}kx_2\right) + X_2^{(2)}\cos\left(R_1^{(2)}kx_2\right) \\ +X_3^{(2)}\sinh\left(R_2^{(2)}kx_2\right) + X_4^{(2)}\cosh\left(R_2^{(2)}kx_2\right) \end{pmatrix} \sin(kx_1 - \omega t),$$

$$u_2^{(2)} = \begin{pmatrix} X_1^{(2)}\gamma_1 \cos\left(R_1^{(2)}kx_2\right) + X_2^{(2)}\gamma_2 \sin\left(R_1^{(2)}kx_2\right) \\ +X_3^{(2)}\gamma_3 \cosh\left(R_2^{(2)}kx_2\right) + X_4^{(2)}\gamma_4 \sinh\left(R_2^{(2)}kx_2\right) \end{pmatrix} \cos(kx_1 - \omega t). \tag{3.45}$$

Burada

$$\gamma_1 = \frac{k_{21}R_1^{(2)}}{-k_{22} + \left(R_1^{(2)}\right)^2}, \quad \gamma_2 = \frac{k_{21}R_1^{(2)}}{k_{22} - \left(R_1^{(2)}\right)^2}, \quad \gamma_3 = \gamma_4 = -\frac{k_{21}R_2^{(2)}}{k_{22} + \left(R_2^{(2)}\right)^2}. \tag{3.46}$$

(3.8)'deki gerilme ifadeleri (3.45) kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\sigma_{12}^{(2)} = \begin{pmatrix} X_1^{(2)}\mu_{12}^{(2)}\left(R_1^{(2)} - \gamma_1\right)\cos\left(R_1^{(2)}kx_2\right) \\ +X_2^{(2)}\mu_{12}^{(2)}\left(-R_1^{(2)} - \gamma_2\right)\sin\left(R_1^{(2)}kx_2\right) \\ +X_3^{(2)}\mu_{12}^{(2)}\left(R_2^{(2)} - \gamma_3\right)\cosh\left(R_2^{(2)}kx_2\right) \\ +X_4^{(2)}\mu_{12}^{(2)}\left(R_2^{(2)} - \gamma_4\right)\sinh\left(R_2^{(2)}kx_2\right) \end{pmatrix} k\sin(kx_1 - \omega t),$$

$$\sigma_{22}^{(2)} = \begin{pmatrix} X_1^{(2)}\left(A_{12}^{(2)} - \gamma_1 A_{22}^{(2)}R_1^{(2)}\right)\sin\left(R_1^{(2)}kx_2\right) \\ +X_2^{(2)}\left(A_{12}^{(2)} + \gamma_2 A_{22}^{(2)}R_1^{(2)}\right)\cos\left(R_1^{(2)}kx_2\right) \\ +X_3^{(2)}\left(A_{12}^{(2)} + \gamma_3 A_{22}^{(2)}R_2^{(2)}\right)\sinh\left(R_2^{(2)}kx_2\right) \\ +X_4^{(2)}\left(A_{12}^{(2)} + \gamma_4 A_{22}^{(2)}R_2^{(2)}\right)\cosh\left(R_2^{(2)}kx_2\right) \end{pmatrix} k\cos(kx_1 - \omega t). \tag{3.47}$$

$R^{(2)}$ parametresine ait kökler (3.37)'deki gibi olduğu durumda (3.39)'daki ifadeler aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$u_1^{(2)} = \begin{pmatrix} X_1^{(2)}\sin\left(R_1^{(2)}kx_2\right) + X_2^{(2)}\cos\left(R_1^{(2)}kx_2\right) + X_3^{(2)}\sinh\left(R_2^{(2)}kx_2\right) \\ +X_4^{(2)}\cosh\left(R_2^{(2)}kx_2\right) \end{pmatrix} \sin(kx_1 - \omega t),$$

$$u_2^{(2)} = \begin{pmatrix} Y_1^{(2)}\cos\left(R_1^{(2)}kx_2\right) + Y_2^{(2)}\sin\left(R_1^{(2)}kx_2\right) + Y_3^{(2)}\cosh\left(R_2^{(2)}kx_2\right) \\ +Y_4^{(2)}\sinh\left(R_2^{(2)}kx_2\right) \end{pmatrix} \cos(kx_1 - \omega t). \tag{3.48}$$

(3.48)'deki ifadeler (3.29)'da yerlerine yazılarak iç katmandaki mekanik yer değiştirmelere ait genel çözüm aşağıdaki gibi elde edilir:

$$u_1^{(2)} = \begin{pmatrix} X_1^{(2)}\sin\left(R_1^{(2)}kx_2\right) + X_2^{(2)}\cos\left(R_1^{(2)}kx_2\right) \\ +X_3^{(2)}\sin\left(R_2^{(2)}kx_2\right) + X_4^{(2)}\cos\left(R_2^{(2)}kx_2\right) \end{pmatrix} \sin(kx_1 - \omega t),$$

$$u_2^{(2)} = \begin{pmatrix} X_1^{(2)}\gamma_1 \cos\left(R_1^{(2)} k x_2\right) + X_2^{(2)}\gamma_2 \sin\left(R_1^{(2)} k x_2\right) \\ + X_3^{(2)}\gamma_3 \cos\left(R_2^{(2)} k x_2\right) + X_4^{(2)}\gamma_4 \sin\left(R_2^{(2)} k x_2\right) \end{pmatrix} \cos(k x_1 - \omega t). \tag{3.49}$$

Burada

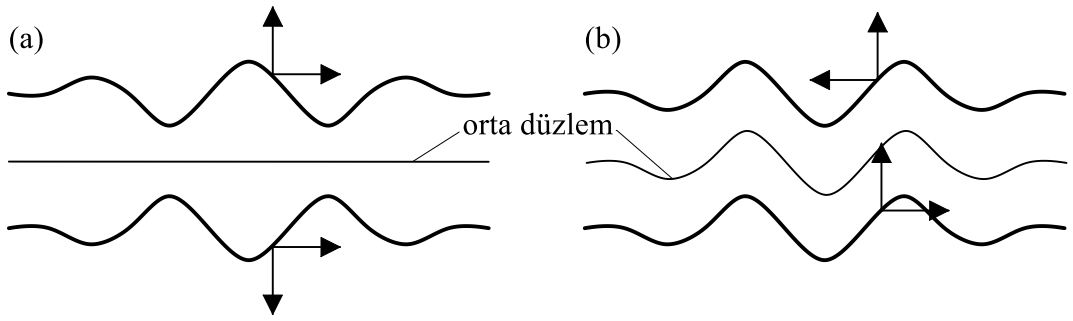
$$\gamma_1 = \frac{k_{21} R_1^{(2)}}{-k_{22} + \left(R_1^{(2)}\right)^2}, \quad \gamma_2 = \frac{k_{21} R_1^{(2)}}{k_{22} - \left(R_1^{(2)}\right)^2},$$

$$\gamma_3 = \frac{k_{21} R_2^{(2)}}{-k_{22} + \left(R_2^{(2)}\right)^2}, \quad \gamma_4 = \frac{k_{21} R_2^{(2)}}{k_{22} - \left(R_2^{(2)}\right)^2}. \tag{3.50}$$

(3.8)'deki gerilme ifadeleri (3.49) kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\sigma_{12}^{(2)} = \begin{pmatrix} X_1^{(2)}\mu_{12}^{(2)}\left(R_1^{(2)} - \gamma_1\right)\cos\left(R_1^{(2)} k x_2\right) \\ + X_2^{(2)}\mu_{12}^{(2)}\left(-R_1^{(2)} - \gamma_2\right)\sin\left(R_1^{(2)} k x_2\right) \\ + X_3^{(2)}\mu_{12}^{(2)}\left(R_2^{(2)} - \gamma_3\right)\cos\left(R_2^{(2)} k x_2\right) \\ + X_4^{(2)}\mu_{12}^{(2)}\left(-R_2^{(2)} - \gamma_4\right)\sin\left(R_2^{(2)} k x_2\right) \end{pmatrix} k \sin(k x_1 - \omega t),$$

$$\sigma_{22}^{(2)} = \begin{pmatrix} X_1^{(2)}\left(A_{12}^{(2)} - \gamma_1 A_{22}^{(2)} R_1^{(2)}\right)\sin\left(R_1^{(2)} k x_2\right) \\ + X_2^{(2)}\left(A_{12}^{(2)} + \gamma_2 A_{22}^{(2)} R_1^{(2)}\right)\cos\left(R_1^{(2)} k x_2\right) \\ + X_3^{(2)}\left(A_{12}^{(2)} - \gamma_3 A_{22}^{(2)} R_2^{(2)}\right)\sin\left(R_2^{(2)} k x_2\right) \\ + X_4^{(2)}\left(A_{12}^{(2)} + \gamma_4 A_{22}^{(2)} R_2^{(2)}\right)\cos\left(R_2^{(2)} k x_2\right) \end{pmatrix} k \cos(k x_1 - \omega t). \tag{3.51}$$



Şekil 3.2 Simetrik (a), asimetrik (b) mod Lamb dalgalarının yayılımında katman yüzeyi şekil değiştirmeleri

Katmanlarda Lamb dalgalarının yayılımı simetrik ve asimetrik modlarda olmaktadır. Şekil 3.2'de katman yüzeyindeki parçacık hareketleri bu iki modda temsili olarak

gösterilmiştir. Simetrik mod Lamb dalgaları için sandviç plakta aşağıdaki şartlar sağlanmalıdır:

$$u_1^{(2)}(x_1,x_2)=u_1^{(2)}(x_1,-x_2),\quad u_2^{(2)}(x_1,x_2)=-u_2^{(2)}(x_1,-x_2),$$

$$u_1^{(1)}(x_1,x_2)=u_1^{(3)}(x_1,-x_2),\quad u_2^{(1)}(x_1,x_2)=-u_2^{(3)}(x_1,-x_2),$$

$$\varphi^{(1)}(x_1,x_2)=-\varphi^{(3)}(x_1,-x_2). \tag{3.52}$$

Asimetrik mod Lamb dalgaları için ise sandviç plakta aşağıdaki şartlar sağlanmalıdır:

$$u_1^{(2)}(x_1,x_2)=-u_1^{(2)}(x_1,-x_2),\quad u_2^{(2)}(x_1,x_2)=u_2^{(2)}(x_1,-x_2),$$

$$u_1^{(1)}(x_1,x_2)=-u_1^{(3)}(x_1,-x_2),\quad u_2^{(1)}(x_1,x_2)=u_2^{(3)}(x_1,-x_2),$$

$$\varphi^{(1)}(x_1,x_2)=\varphi^{(3)}(x_1,-x_2). \tag{3.53}$$

(3.52) ve (3.53)'deki şartların sağlanması için sandviç plaktaki temas şartları ve sınır şartları orta düzleme göre ($x_2=0$) simetrik olmalıdır. Bu sebeple (3.11)'deki mekanik yer değiştirmelere ait temas koşullarında aşağıdaki eşitlikler sağlanmalıdır:

$$F_1'=F_1''=F_1,\quad F_2'=F_2''=F_2. \tag{3.54}$$

Aynı zamanda (3.52) ve (3.53)'deki şartların sağlanması için her iki dış katmanın alt ve üst yüzeylerinde aynı elektrik potansiyeli ve elektrik yer değiştirme koşulları sağlanmalıdır.

3.2.3 Simetrik Mod Lamb Dalgaları İçin Dispersiyon Denkleminin Bulunması

Dalga hızı $c<c_2^{(1)}$ olduğu durumda $R^{(1)}$ parametresine ait kökler (3.23)'teki gibi, $R^{(2)}$ parametresine ait kökler ise (3.35)'teki gibi olmaktadır. (3.52) dikkate alındığında (3.10), (3.11), (3.13) ve (3.14)'teki temas ve sınır şartları bilinmeyen sekiz $X_1^{(1)}$, $X_2^{(1)}$, $X_3^{(1)}$, $X_4^{(1)}$, $X_5^{(1)}$, $X_6^{(1)}$, $X_2^{(2)}$ ve $X_4^{(2)}$ sabitlerinin çözümü için cebirsel sekiz denklem oluşturur. Bu denklemlerde dış katmana ait; (3.24)'teki mekanik yer değiştirmeler ve elektrik potansiyeli, (2.38)'deki gerilmeler ve elektrik yer değiştirme, iç katmana ait; (3.41)'deki mekanik yer değiştirmeler, (3.43)'teki gerilmeler kullanılmıştır. Bu denklem takımının sıfırdan farklı çözümü için katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır.

$$\det\left\|\alpha_{nm}(c/c_2^{(2)},kH)\right\|=0,\quad (n,m=1,2,...,8) \tag{3.55}$$

(3.55), dalga hızı $c < c_2^{(1)}$ olduğu durumda sandviç plaktaki simetrik mod Lamb dalgalarının dispersiyon denklemidir ve aşağıdaki cebirsel sekiz denklemden bulunur:

$u_1^{(1)}\Big|_{x_2=h_1} - u_1^{(2)}\Big|_{x_2=h_1} = F_1 \dfrac{2h_1}{\mu^{(2)}} \sigma_{12}^{(2)}\Big|_{x_2=h_1}$ için birinci denklem:

$$
\begin{aligned}
&X_1^{(1)} e^{p_1 k h_1} + X_2^{(1)} e^{-p_1 k h_1} + X_3^{(1)} e^{p_2 k h_1} + X_4^{(1)} e^{-p_2 k h_1} + X_5^{(1)} e^{p_3 k h_1} + X_6^{(1)} e^{-p_3 k h_1} \\
&- X_2^{(2)} \left(\cosh\left(R_1^{(2)} k h_1\right) + F_1 \frac{2kh_1}{\mu^{(2)}} \mu_{12}^{(2)} \left(R_1^{(2)} - \gamma_2\right) \sinh\left(R_1^{(2)} k h_1\right) \right) \\
&- X_4^{(2)} \left(\cosh\left(R_2^{(2)} k h_1\right) + F_1 \frac{2kh_1}{\mu^{(2)}} \mu_{12}^{(2)} \left(R_2^{(2)} - \gamma_4\right) \sinh\left(R_2^{(2)} k h_1\right) \right) = 0,
\end{aligned}
$$

$u_2^{(1)}\Big|_{x_2=h_1} - u_2^{(2)}\Big|_{x_2=h_1} = F_2 \dfrac{2h_1}{\mu^{(2)}} \sigma_{22}^{(2)}\Big|_{x_2=h_1}$ için ikinci denklem:

$$
\begin{aligned}
&X_1^{(1)} \alpha_1 e^{p_1 k h_1} + X_2^{(1)} \alpha_2 e^{-p_1 k h_1} + X_3^{(1)} \alpha_3 e^{p_2 k h_1} + X_4^{(1)} \alpha_4 e^{-p_2 k h_1} + X_5^{(1)} \alpha_5 e^{p_3 k h_1} + X_6^{(1)} \alpha_6 e^{-p_3 k h_1} \\
&- X_2^{(2)} \left(\gamma_2 \sinh\left(R_1^{(2)} k x_2\right) + F_2 \frac{2kh_1}{\mu^{(2)}} \left(A_{12}^{(2)} + \gamma_2 A_{22}^{(2)} R_1^{(2)}\right) \cosh\left(R_1^{(2)} k h_1\right) \right) \\
&- X_4^{(2)} \left(\gamma_4 \sinh\left(R_2^{(2)} k x_2\right) + F_2 \frac{2kh_1}{\mu^{(2)}} \left(A_{12}^{(2)} + \gamma_2 A_{22}^{(2)} R_2^{(2)}\right) \cosh\left(R_2^{(2)} k h_1\right) \right) = 0,
\end{aligned}
$$

$\sigma_{12}^{(1)}\Big|_{x_2=h_1} = \sigma_{12}^{(2)}\Big|_{x_2=h_1}$ için üçüncü denklem:

$$
\begin{aligned}
&X_1^{(1)} \left(c_{44}^{(1)} p_1 - \alpha_1 c_{44}^{(1)} - \beta_1 e_{15}^{(1)}\right) e^{p_1 k h_1} + X_2^{(1)} \left(-c_{44}^{(1)} p_1 - \alpha_2 c_{44}^{(1)} - \beta_2 e_{15}^{(1)}\right) e^{-p_1 k h_1} \\
&+ X_3^{(1)} \left(c_{44}^{(1)} p_2 - \alpha_3 c_{44}^{(1)} - \beta_3 e_{15}^{(1)}\right) e^{p_2 k h_1} + X_4^{(1)} \left(-c_{44}^{(1)} p_2 - \alpha_4 c_{44}^{(1)} - \beta_4 e_{15}^{(1)}\right) e^{-p_2 k h_1} \\
&+ X_5^{(1)} \left(c_{44}^{(1)} p_3 - \alpha_5 c_{44}^{(1)} - \beta_5 e_{15}^{(1)}\right) e^{p_3 k h_1} + X_6^{(1)} \left(-c_{44}^{(1)} p_3 - \alpha_6 c_{44}^{(1)} - \beta_6 e_{15}^{(1)}\right) e^{-p_3 k h_1} \\
&- X_2^{(2)} \mu_{12}^{(2)} \left(R_1^{(2)} - \gamma_2\right) \sinh\left(R_1^{(2)} k h_1\right) - X_4^{(2)} \mu_{12}^{(2)} \left(R_2^{(2)} - \gamma_4\right) \sinh\left(R_2^{(2)} k h_1\right) = 0,
\end{aligned}
$$

$\sigma_{22}^{(1)}\Big|_{x_2=h_1} = \sigma_{22}^{(2)}\Big|_{x_2=h_1}$ için dördüncü denklem:

$$
\begin{aligned}
&X_1^{(1)} \left(c_{13}^{(1)} + \alpha_1 c_{33}^{(1)} p_1 + \beta_1 e_{33}^{(1)} p_1\right) e^{p_1 k h_1} + X_2^{(1)} \left(c_{13}^{(1)} - \alpha_2 c_{33}^{(1)} p_1 - \beta_2 e_{33}^{(1)} p_1\right) e^{-p_1 k h_1} \\
&+ X_3^{(1)} \left(c_{13}^{(1)} + \alpha_3 c_{33}^{(1)} p_2 + \beta_3 e_{33}^{(1)} p_2\right) e^{p_2 k h_1} + X_4^{(1)} \left(c_{13}^{(1)} - \alpha_4 c_{33}^{(1)} p_2 - \beta_4 e_{33}^{(1)} p_2\right) e^{-p_2 k h_1} \\
&+ X_5^{(1)} \left(c_{13}^{(1)} + \alpha_5 c_{33}^{(1)} p_3 + \beta_5 e_{33}^{(1)} p_3\right) e^{p_3 k h_1} + X_6^{(1)} \left(c_{13}^{(1)} - \alpha_6 c_{33}^{(1)} p_3 - \beta_6 e_{33}^{(1)} p_3\right) e^{-p_3 k h_1} \\
&- X_2^{(2)} \left(A_{12}^{(2)} + \gamma_2 A_{22}^{(2)} R_1^{(2)}\right) \cosh\left(R_1^{(2)} k h_1\right) - X_4^{(2)} \left(A_{12}^{(2)} + \gamma_2 A_{22}^{(2)} R_2^{(2)}\right) \cosh\left(R_2^{(2)} k h_1\right) = 0,
\end{aligned}
$$

$\sigma_{12}^{(1)}\Big|_{x_2=h_2} = 0$ için beşinci denklem:

$$X_1^{(1)}\left(c_{44}^{(1)}p_1-\alpha_1 c_{44}^{(1)}-\beta_1 e_{15}^{(1)}\right)e^{p_1 kh_2}+X_2^{(1)}\left(-c_{44}^{(1)}p_1-\alpha_2 c_{44}^{(1)}-\beta_2 e_{15}^{(1)}\right)e^{-p_1 kh_2}$$
$$+X_3^{(1)}\left(c_{44}^{(1)}p_2-\alpha_3 c_{44}^{(1)}-\beta_3 e_{15}^{(1)}\right)e^{p_2 kh_2}+X_4^{(1)}\left(-c_{44}^{(1)}p_2-\alpha_4 c_{44}^{(1)}-\beta_4 e_{15}^{(1)}\right)e^{-p_2 kh_2}$$
$$+X_5^{(1)}\left(c_{44}^{(1)}p_3-\alpha_5 c_{44}^{(1)}-\beta_5 e_{15}^{(1)}\right)e^{p_3 kh_2}+X_6^{(1)}\left(-c_{44}^{(1)}p_3-\alpha_6 c_{44}^{(1)}-\beta_6 e_{15}^{(1)}\right)e^{-p_3 kh_2}=0,$$

$\sigma_{22}^{(1)}\Big|_{x_2=h_2}=0$ için altıncı denklem:

$$X_1^{(1)}\left(c_{13}^{(1)}+\alpha_1 c_{33}^{(1)}p_1+\beta_1 e_{33}^{(1)}p_1\right)e^{p_1 kh_2}+X_2^{(1)}\left(c_{13}^{(1)}-\alpha_2 c_{33}^{(1)}p_1-\beta_2 e_{33}^{(1)}p_1\right)e^{-p_1 kh_2}$$
$$+X_3^{(1)}\left(c_{13}^{(1)}+\alpha_3 c_{33}^{(1)}p_2+\beta_3 e_{33}^{(1)}p_2\right)e^{p_2 kh_2}+X_4^{(1)}\left(c_{13}^{(1)}-\alpha_4 c_{33}^{(1)}p_2-\beta_4 e_{33}^{(1)}p_2\right)e^{-p_2 kh_2}$$
$$+X_5^{(1)}\left(c_{13}^{(1)}+\alpha_5 c_{33}^{(1)}p_3+\beta_5 e_{33}^{(1)}p_3\right)e^{p_3 kh_2}+X_6^{(1)}\left(c_{13}^{(1)}-\alpha_6 c_{33}^{(1)}p_3-\beta_6 e_{33}^{(1)}p_3\right)e^{-p_3 kh_2}=0,$$

$\varphi^{(1)}\Big|_{x_2=h_1}=0$ için yedinci denklem:

$$X_1^{(1)}\beta_1 e^{p_1 kh_1}+X_2^{(1)}\beta_2 e^{-p_1 kh_1}+X_3^{(1)}\beta_3 e^{p_2 kh_1}+X_4^{(1)}\beta_4 e^{-p_2 kh_1}+X_5^{(1)}\beta_5 e^{p_3 kh_1}+X_6^{(1)}\beta_6 e^{-p_3 kh_1}=0,$$

$\varphi^{(1)}\Big|_{x_2=h_2}=0$ için sekizinci denklem:

$$X_1^{(1)}\beta_1 e^{p_1 kh_2}+X_2^{(1)}\beta_2 e^{-p_1 kh_2}+X_3^{(1)}\beta_3 e^{p_2 kh_2}$$
$$+X_4^{(1)}\beta_4 e^{-p_2 kh_2}+X_5^{(1)}\beta_5 e^{p_3 kh_2}+X_6^{(1)}\beta_6 e^{-p_3 kh_2}=0, \qquad (3.56)$$

Piezoelektrik katmanların üst ve alt yüzey elektrotları elektriksel kısa devre olduğu durumda (3.56)'daki denklemler geçerliyken, piezoelektrik katmanların üst ve alt yüzey elektrotları elektriksel açık devre olduğu durumda (3.56)'daki yedinci ve sekizinci denklem yerine aşağıdaki iki denklem kullanılır:

$D_2^{(1)}\Big|_{x_2=h_1}=0$ için yedinci denklem:

$$X_1^{(1)}\left(e_{31}^{(1)}+\alpha_1 e_{33}^{(1)}p_1-\beta_1\varepsilon_{33}^{(1)}p_1\right)e^{p_1 kh_1}+X_2^{(1)}\left(e_{31}^{(1)}-\alpha_2 e_{33}^{(1)}p_1+\beta_2\varepsilon_{33}^{(1)}p_1\right)e^{-p_1 kh_1}$$
$$+X_3^{(1)}\left(e_{31}^{(1)}+\alpha_3 e_{33}^{(1)}p_2-\beta_3\varepsilon_{33}^{(1)}p_2\right)e^{p_2 kh_1}+X_4^{(1)}\left(e_{31}^{(1)}-\alpha_4 e_{33}^{(1)}p_2+\beta_4\varepsilon_{33}^{(1)}p_2\right)e^{-p_2 kh_1}$$
$$+X_5^{(1)}\left(e_{31}^{(1)}+\alpha_5 e_{33}^{(1)}p_3-\beta_5\varepsilon_{33}^{(1)}p_3\right)e^{p_3 kh_1}+X_6^{(1)}\left(e_{31}^{(1)}-\alpha_6 e_{33}^{(1)}p_3+\beta_6\varepsilon_{33}^{(1)}p_3\right)e^{-p_3 kh_1}=0,$$

$D_2^{(1)}\Big|_{x_2=h_2}=0$ için sekizinci denklem:

$$X_1^{(1)}\left(e_{31}^{(1)}+\alpha_1 e_{33}^{(1)}p_1-\beta_1\varepsilon_{33}^{(1)}p_1\right)e^{p_1 kh_2}+X_2^{(1)}\left(e_{31}^{(1)}-\alpha_2 e_{33}^{(1)}p_1+\beta_2\varepsilon_{33}^{(1)}p_1\right)e^{-p_1 kh_2}$$
$$+X_3^{(1)}\left(e_{31}^{(1)}+\alpha_3 e_{33}^{(1)}p_2-\beta_3\varepsilon_{33}^{(1)}p_2\right)e^{p_2 kh_2}+X_4^{(1)}\left(e_{31}^{(1)}-\alpha_4 e_{33}^{(1)}p_2+\beta_4\varepsilon_{33}^{(1)}p_2\right)e^{-p_2 kh_2}$$
$$+X_5^{(1)}\left(e_{31}^{(1)}+\alpha_5 e_{33}^{(1)}p_3-\beta_5\varepsilon_{33}^{(1)}p_3\right)e^{p_3 kh_2}+X_6^{(1)}\left(e_{31}^{(1)}-\alpha_6 e_{33}^{(1)}p_3+\beta_6\varepsilon_{33}^{(1)}p_3\right)e^{-p_3 kh_2}=0. \qquad (3.57)$$

Dalga hızı $c_2^{(1)} < c < c_2^{(2)}$ olduğu durumda $R^{(1)}$ parametresine ait kökler (3.19)'daki gibi, $R^{(2)}$ parametresine ait kökler ise (3.35)'teki gibi olmaktadır. Temas ve sınır şartlarında dış katmana ait; (3.21)'deki mekanik yer değiştirmeler ve elektrik potansiyeli, (2.35)'deki gerilmeler ve elektrik yer değiştirme, iç katmana ait; (3.41)'deki mekanik yer değiştirmeler, (3.43)'teki gerilmeler kullanılarak (3.55)'e benzer dispersiyon denklemi kolaylıkla bulunabilir.

Dalga hızı $c_2^{(2)} < c < c_1^{(1)}$ olduğu durumda $R^{(1)}$ parametresine ait kökler (3.19)'daki gibi, $R^{(2)}$ parametresine ait kökler ise (3.36)'daki gibi olmaktadır. Temas ve sınır şartlarında dış katmana ait; (3.21)'deki mekanik yer değiştirmeler ve elektrik potansiyeli, (2.35)'deki gerilmeler ve elektrik yer değiştirme, iç katmana ait; (3.45)'teki mekanik yer değiştirmeler, (3.47)'deki gerilmeler kullanılarak (3.55)'e benzer dispersiyon denklemi kolaylıkla bulunabilir.

Dalga hızı $c_1^{(1)} < c < c_1^{(2)}$ olduğu durumda $R^{(1)}$ parametresine ait kökler (3.25)'teki gibi, $R^{(2)}$ parametresine ait kökler ise (3.36)'daki gibi olmaktadır. Temas ve sınır şartlarında dış katmana ait; (3.26)'daki mekanik yer değiştirmeler ve elektrik potansiyeli, (3.28)'deki gerilmeler ve elektrik yer değiştirme, iç katmana ait; (3.45)'teki mekanik yer değiştirmeler, (3.47)'deki gerilmeler kullanılarak (3.55)'e benzer dispersiyon denklemi kolaylıkla bulunabilir.

Dalga hızı $c_1^{(2)} < c$ olduğu durumda $R^{(1)}$ parametresine ait kökler (3.25)'teki gibi, $R^{(2)}$ parametresine ait kökler ise (3.37)'deki gibi olmaktadır. Temas ve sınır şartlarında dış katmana ait; (3.26)'daki mekanik yer değiştirmeler ve elektrik potansiyeli, (3.28)'deki gerilmeler ve elektrik yer değiştirme, iç katmana ait; (3.49)'daki mekanik yer değiştirmeler, (3.51)'deki gerilmeler kullanılarak (3.55)'e benzer dispersiyon denklemi kolaylıkla bulunabilir.

3.2.4 Asimetrik Mod Lamb Dalgaları İçin Dispersiyon Denkleminin Bulunması

Dalga hızı $c < c_2^{(1)}$ olduğu durumda $R^{(1)}$ parametresine ait kökler (3.23)'teki gibi, $R^{(2)}$ parametresine ait kökler ise (3.35)'teki gibi olmaktadır. Asimetrik mod Lamb dalgaları için (3.53) dikkate alındığında (3.10), (3.11), (3.13) ve (3.14)'teki temas ve sınır şartları bilinmeyen sekiz $X_1^{(1)}$, $X_2^{(1)}$, $X_3^{(1)}$, $X_4^{(1)}$, $X_5^{(1)}$, $X_6^{(1)}$, $X_1^{(2)}$ ve $X_3^{(2)}$ sabitlerinin çözümü

için cebirsel sekiz denklem oluşturur. Bu denklemlerde dış katmana ait; (3.24)'teki mekanik yer değiştirmeler ve elektrik potansiyeli, (2.38)'deki gerilmeler ve elektrik yer değiştirme, iç katmana ait; (3.41)'deki mekanik yer değiştirmeler, (3.43)'teki gerilmeler kullanılmıştır. Bu denklem takımının sıfırdan farklı çözümü için katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır.

$$\det\left\|\beta_{nm}(c/c_2^{(2)}, kH)\right\| = 0, \quad (n,m = 1,2,...,8) \tag{3.58}$$

(3.58), dalga hızı $c < c_2^{(1)}$ olduğu durumda sandviç plaktaki asimetrik mod Lamb dalgalarının dispersiyon denklemidir ve (3.56)'daki ilk dört denklem aşağıdaki denklemler ile değiştirilerek elde edilen denklem takımından bulunur:

$u_1^{(1)}\Big|_{x_2=h_1} - u_1^{(2)}\Big|_{x_2=h_1} = F_1 \dfrac{2h_1}{\mu^{(2)}} \sigma_{12}^{(2)}\Big|_{x_2=h_1}$ için birinci denklem:

$$X_1^{(1)} e^{p_1 kh_1} + X_2^{(1)} e^{-p_1 kh_1} + X_3^{(1)} e^{p_2 kh_1} + X_4^{(1)} e^{-p_2 kh_1} + X_5^{(1)} e^{p_3 kh_1} + X_6^{(1)} e^{-p_3 kh_1}$$
$$-X_1^{(2)} \left(\sinh\left(R_1^{(2)} kh_1\right) + F_1 \frac{2kh_1}{\mu^{(2)}} \mu_{12}^{(2)} \left(R_1^{(2)} - \gamma_1\right) \cosh\left(R_1^{(2)} kh_1\right) \right)$$
$$-X_3^{(2)} \left(\sinh\left(R_2^{(2)} kh_1\right) + F_1 \frac{2kh_1}{\mu^{(2)}} \mu_{12}^{(2)} \left(R_2^{(2)} - \gamma_3\right) \cosh\left(R_2^{(2)} kh_1\right) \right) = 0,$$

$u_2^{(1)}\Big|_{x_2=h_1} - u_2^{(2)}\Big|_{x_2=h_1} = F_2 \dfrac{2h_1}{\mu^{(2)}} \sigma_{22}^{(2)}\Big|_{x_2=h_1}$ için ikinci denklem:

$$X_1^{(1)} \alpha_1 e^{p_1 kh_1} + X_2^{(1)} \alpha_2 e^{-p_1 kh_1} + X_3^{(1)} \alpha_3 e^{p_2 kh_1} + X_4^{(1)} \alpha_4 e^{-p_2 kh_1} + X_5^{(1)} \alpha_5 e^{p_3 kh_1} + X_6^{(1)} \alpha_6 e^{-p_3 kh_1}$$
$$-X_1^{(2)} \left(\gamma_1 \cosh\left(R_1^{(2)} kx_2\right) + F_2 \frac{2kh_1}{\mu^{(2)}} \left(A_{12}^{(2)} + \gamma_1 A_{22}^{(2)} R_1^{(2)}\right) \sinh\left(R_1^{(2)} kh_1\right) \right)$$
$$-X_3^{(2)} \left(\gamma_3 \cosh\left(R_2^{(2)} kx_2\right) + F_2 \frac{2kh_1}{\mu^{(2)}} \left(A_{12}^{(2)} + \gamma_3 A_{22}^{(2)} R_2^{(2)}\right) \sinh\left(R_2^{(2)} kh_1\right) \right) = 0,$$

$\sigma_{12}^{(1)}\Big|_{x_2=h_1} = \sigma_{12}^{(2)}\Big|_{x_2=h_1}$ için üçüncü denklem:

$$X_1^{(1)} \left(c_{44}^{(1)} p_1 - \alpha_1 c_{44}^{(1)} - \beta_1 e_{15}^{(1)}\right) e^{p_1 kh_1} + X_2^{(1)} \left(-c_{44}^{(1)} p_1 - \alpha_2 c_{44}^{(1)} - \beta_2 e_{15}^{(1)}\right) e^{-p_1 kh_1}$$
$$+X_3^{(1)} \left(c_{44}^{(1)} p_2 - \alpha_3 c_{44}^{(1)} - \beta_3 e_{15}^{(1)}\right) e^{p_2 kh_1} + X_4^{(1)} \left(-c_{44}^{(1)} p_2 - \alpha_4 c_{44}^{(1)} - \beta_4 e_{15}^{(1)}\right) e^{-p_2 kh_1}$$
$$+X_5^{(1)} \left(c_{44}^{(1)} p_3 - \alpha_5 c_{44}^{(1)} - \beta_5 e_{15}^{(1)}\right) e^{p_3 kh_1} + X_6^{(1)} \left(-c_{44}^{(1)} p_3 - \alpha_6 c_{44}^{(1)} - \beta_6 e_{15}^{(1)}\right) e^{-p_3 kh_1}$$
$$-X_1^{(2)} \mu_{12}^{(2)} \left(R_1^{(2)} - \gamma_1\right) \cosh\left(R_1^{(2)} kh_1\right) - X_3^{(2)} \mu_{12}^{(2)} \left(R_2^{(2)} - \gamma_3\right) \cosh\left(R_2^{(2)} kh_1\right) = 0,$$

$\sigma_{22}^{(1)}\Big|_{x_2=h_1} = \sigma_{22}^{(2)}\Big|_{x_2=h_1}$ için dördüncü denklem:

$$X_1^{(1)}\left(c_{13}^{(1)}+\alpha_1 c_{33}^{(1)}p_1+\beta_1 e_{33}^{(1)}p_1\right)e^{p_1 kh_1}+X_2^{(1)}\left(c_{13}^{(1)}-\alpha_2 c_{33}^{(1)}p_1-\beta_2 e_{33}^{(1)}p_1\right)e^{-p_1 kh_1}$$
$$+X_3^{(1)}\left(c_{13}^{(1)}+\alpha_3 c_{33}^{(1)}p_2+\beta_3 e_{33}^{(1)}p_2\right)e^{p_2 kh_1}+X_4^{(1)}\left(c_{13}^{(1)}-\alpha_4 c_{33}^{(1)}p_2-\beta_4 e_{33}^{(1)}p_2\right)e^{-p_2 kh_1}$$
$$+X_5^{(1)}\left(c_{13}^{(1)}+\alpha_5 c_{33}^{(1)}p_3+\beta_5 e_{33}^{(1)}p_3\right)e^{p_3 kh_1}+X_6^{(1)}\left(c_{13}^{(1)}-\alpha_6 c_{33}^{(1)}p_3-\beta_6 e_{33}^{(1)}p_3\right)e^{-p_3 kh_1}$$
$$-X_1^{(2)}\left(A_{12}^{(2)}+\gamma_1 A_{22}^{(2)}R_1^{(2)}\right)\sinh\left(R_1^{(2)}kh_1\right)-X_3^{(2)}\left(A_{12}^{(2)}+\gamma_3 A_{22}^{(2)}R_2^{(2)}\right)\sinh\left(R_2^{(2)}kh_1\right)=0. \quad (3.59)$$

Dalga hızının $c_2^{(1)}<c<c_2^{(2)}$, $c_2^{(2)}<c<c_1^{(1)}$, $c_1^{(1)}<c<c_1^{(2)}$ ve $c_1^{(2)}<c$ olduğu durumda ise (3.53) dikkate alınarak sandviç plaktaki asimetrik mod Lamb dalgalarının dispersiyon denklemleri Bölüm 3.2.3'deki gibi kolaylıkla bulunabilir.

3.3 Dispersiyon Eğrilerinin Elde Edilmesi ve Yorumlanması

Dispersiyon eğrileri, $c/c_2^{(2)}$ (boyutsuz dalga yayılım hızı) ve kH (boyutsuz dalga sayısı, $H=2H_{PZT}+2H_{metal}$) arasındaki ilişki bulunarak gösterilecektir. $c_2^{(2)}$ iç katman malzemesinin enine dalga yayılım hızı olup (3.38) ile elde edilmektedir. Dispersiyon eğrileri, Bölüm 2.3'teki gibi dispersiyon denklemlerinin yarılama (bisection) yöntemi kullanarak yapılan çözümünden MATLAB bilgisayar yazılım programı yardımıyla elde edilmektedir. (3.55)'teki dispersiyon denklemi Bölüm 3.2.3'te verilen beş farklı hız aralığı için çözülerek simetrik mod Lamb dalgalarının dispersiyon eğrileri, (3.58)'deki dispersiyon denklemi Bölüm 3.2.4'te verilen beş farklı hız aralığı için çözülerek asimetrik mod Lamb dalgalarının dispersiyon eğrileri elde edilmektedir.

Sayısal çözümlemede elastik, piezoelektrik ve dielektrik özellikleri Çizelge 2.1'de verilen malzemeler kullanılmıştır. Piezoelektrik dış katmanlar için PZT-2 ve PZT-6B malzemeleri, metal iç katman için ise çelik ve alüminyum malzemeleri kullanılmıştır.

Şekil 3.1'deki öngerilmelerin şiddetini katmanlarda ayrı ayrı belirlemek için aşağıdaki değişkenler tanımlanmıştır:

$$\psi^{(1)}=\sigma_{11}^{(1),0}/c_{44}^{(1)},\quad \psi^{(2)}=\sigma_{11}^{(2),0}/\mu^{(2)},\quad \psi^{(3)}=\sigma_{11}^{(3),0}/c_{44}^{(1)}. \quad (3.60)$$

(3.60)'ta $\sigma_{11}^{(1),0}$ ve $\sigma_{11}^{(3),0}$ eşit alınacağından $\psi^{(1)}=\psi^{(3)}$ olacaktır. Öngerilmelerin simetrik mod ve asimetrik mod Lamb dalgalarının yayılım hızına etkisi (2.68)'de tanımlanan η değişkeni ve kH arasındaki ilişki $\psi^{(1)}=\psi^{(3)}$ veya $\psi^{(2)}$'nin 0.001, 0.002 ve 0.003 değerleri için bulunarak gösterilecektir. Piezoelektrik dış katmanlardaki öngerilmelerin ($\psi^{(1)}=\psi^{(3)}$), üçüncü derece elastik sabitler hesaba katıldığında ($a^{(2)}\neq 0$, $b^{(2)}\neq 0$,

$c^{(2)} \neq 0$) ve katılmadığında ($a^{(2)} = 0$, $b^{(2)} = 0$, $c^{(2)} = 0$) iç katmandaki öngerilmelerin ($\psi^{(2)}$) Lamb dalgalarının yayılım hızına etkileri ayrı ayrı incelenecektir.

Piezoelektrik dış katmanın kalınlığı ile metal iç katmanın yarı kalınlığının oranları (H_{PZT}/H_{metal}) 0.5, 1, 2 ve 4 gibi dört farklı değer alınarak, farklı katman kalınlıklarının Lamb dalgalarının yayılım hızına etkisi incelenecektir.

İç katman ile dış katmanlar arasında ideal ve ideal olmayan temas koşullarının Lamb dalgalarının yayılım hızına etkileri gösterilecektir. Temas koşullarındaki idealsizlik derecesi 0, 0.5, 1, 5, 25 ve ∞ gibi değerler alınarak katmanlar arasındaki tam temas (ideal temas) durumundan tam serbestlik durumuna kadar farklı durumlar incelenecektir. Bir durumda yanal ideal olmayan temas koşulları ile düşey ideal olmayan temas koşulları birlikte bulunduğu varsayılacak ve idealsizlik dereceleri eşit alınacaktır ($F_1 = F_2 \geq 0$). İkinci durumda ise yalnızca yanal ideal olmayan temas koşulunun bulunduğu varsayılacak ve düşey idealsizlik derecesi sıfır alınacaktır ($F_1 \geq 0$, $F_2 = 0$).

Bu bölümde sonuçlar piezoelektrik katmanların üst ve alt yüzey elektrotları elektriksel kısa devre olduğu durum ve dış katmanlarda piezoelektrik malzeme polarizasyon doğrultusunun Ox_2 ekseni ile çakıştığı durum (kalınlık doğrultusunda polarizasyon) için elde edilmiştir. Ayrıca incelemeler Lamb dalgalarının ilk iki simetrik ve asimetrik modları olmak üzere toplam dört mod için yapılacaktır.

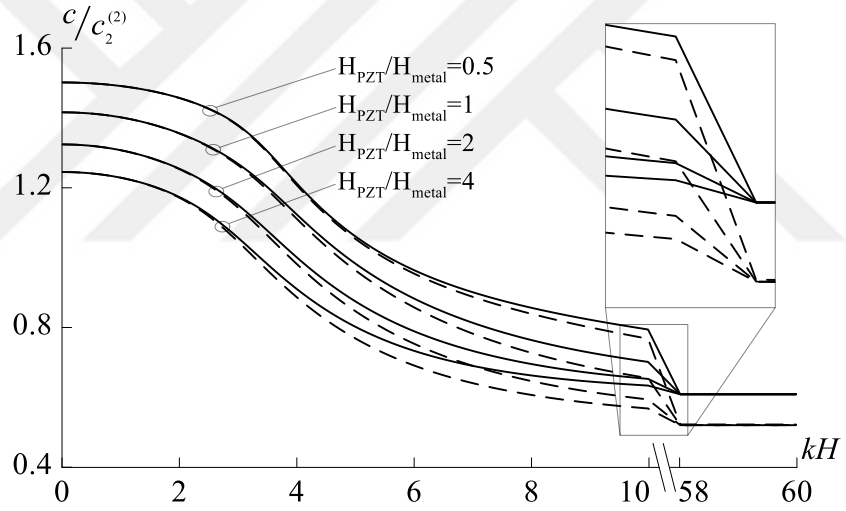
Bu bölümdeki şekillerde kesikli çizgi ile gösterilen eğriler dış katmanlara ait piezoelektrik ve dielektrik sabitler sıfır alınarak elde edilen sonuçları, düz çizgi ile gösterilen eğriler ise katmana ait piezoelektrik ve dielektrik sabitlerin Çizelge 2.1'deki gibi alındığında elde edilen sonuçları göstermektedir.

3.3.1 Öngerilmesiz Sandviç Plakta Piezoelektriklik Özelliğinin Dispersiyon Eğrilerine Etkisi

Bu bölümde sonuçlar katmanlarda herhangi bir öngerilmenin bulunmadığı durum için elde edilmiştir ($\sigma_{11}^{(1),0} = 0$, $\sigma_{11}^{(2),0} = 0$, $\sigma_{11}^{(3),0} = 0$).

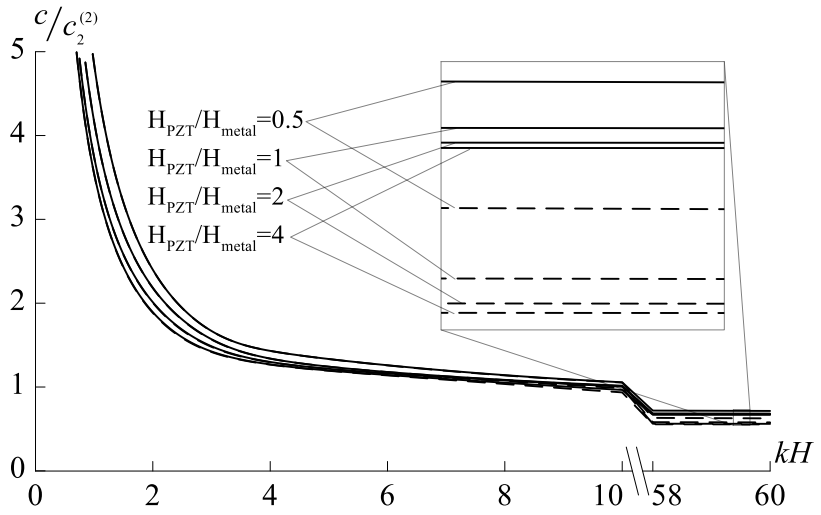
Şekil 3.3-3.6'da PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için dış katmanlara ait piezoelektriklik özelliğinin ve H_{PZT}/H_{metal} oranının simetrik ve asimetrik mod Lamb dalgalarının birinci ve ikinci mod için yayılım hızlarına etkileri gösterilmiştir. Bu şekillerde boyutsuz dalga

sayısı kH ekseni için dispersiyon eğrilerinde önemli değişimlerin görüldüğü (0,10] aralığı ve yüksek kH değerlerinde Lamb dalgalarının yayılım hızlarını göstermek için [58,60] aralığı seçilmiştir. Bu şekillere göre öngerilmenin bulunmadığı durumda sandviç plaklarda dış katmanlara ait piezoelektriklik özelliği simetrik ve asimetrik mod için hem birinci hem de ikinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızını arttırmaktadır. Fakat piezoelektriklik özelliğinin ikinci mod Lamb dalgalarına etkisi birinci mod Lamb dalgalarına etkisine kıyasla daha azdır. Piezoelektriklik özelliğinin dispersiyon eğrilerine etkisi artan kH değeri ile birlikte artmaktadır. Bu şekillerde yüksek H_{PZT}/H_{metal} oranına sahip sandviç plaklarda incelenen tüm modlardaki Lamb dalgalarının yayılım hızı daha düşüktür. Fakat (0,10] aralığındaki kH değerlerinde H_{PZT}/H_{metal} oranı arttıkça ya da diğer bir ifadeyle piezoelektrik dış katmanların kalınlıkları iç katman kalınlığına göre arttıkça piezoelektriklik özelliğinin dispersiyon eğrilerine etkisi de artmaktadır.



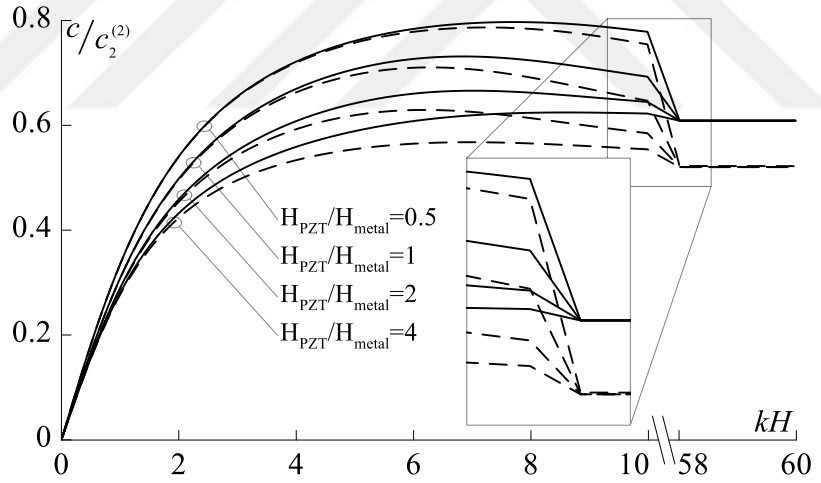
Şekil 3.3 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için piezoelektriklik özelliğinin simetrik birinci mod dispersiyon eğrilerine etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)

Şekil 3.3 ve Şekil 3.5 simetrik ve asimetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızının H_{PZT}/H_{metal} oranından bağımsız olarak yüksek kH değerlerinde piezoelektrik ve dielektrik sabitler hesaba katıldığı ve katılmadığı durumlar için iki farklı hız değerine yaklaştığını göstermektedir. Bu iki hız arasındaki fark, boyutsuz dalga sayısının sıfırdan sonsuza kadar değişen değerleri için piezoelektriklik özelliğinin dispersiyon eğrileri üzerindeki olabilecek en büyük etkisini göstermektedir.

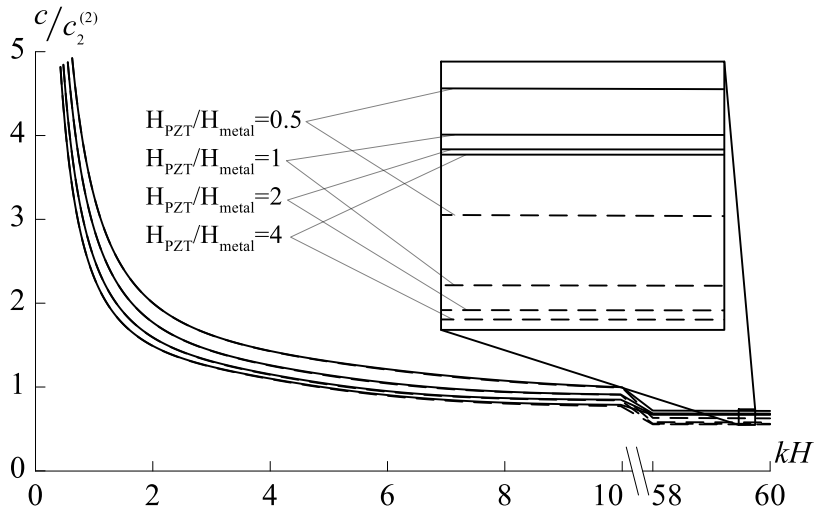


Şekil 3.4 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için piezoelektriklik özelliğinin simetrik ikinci mod dispersiyon eğrilerine etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)

Şekil 3.4 ve Şekil 3.6 karşılaştırıldığında H_{PZT}/H_{metal} oranının dispersiyon eğrilerine etkisi simetrik ikinci mod Lamb dalgalarında, asimetrik ikinci mod Lamb dalgalarına göre daha azdır.



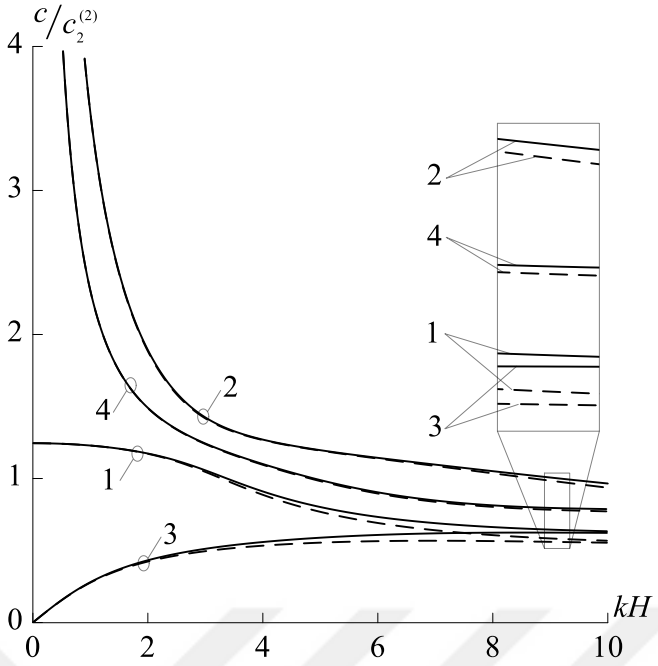
Şekil 3.5 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için piezoelektriklik özelliğinin asimetrik birinci mod dispersiyon eğrilerine etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)



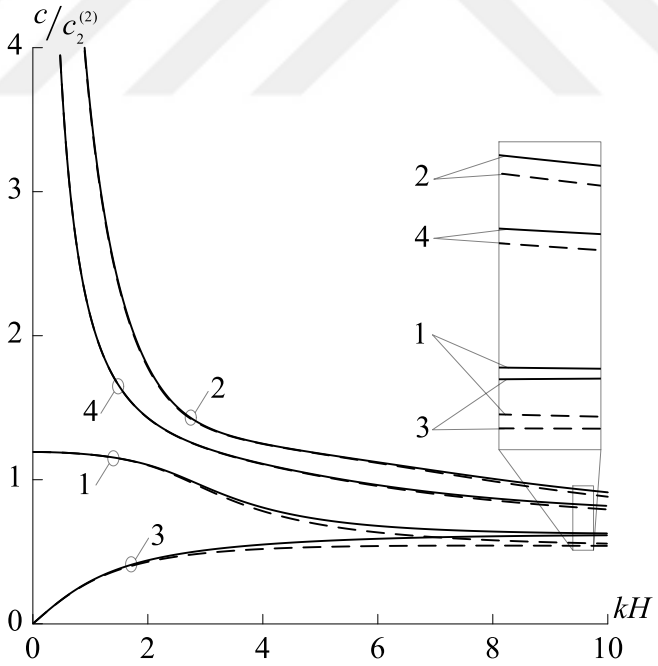
Şekil 3.6 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için piezoelektriklik özelliğinin asimetrik ikinci mod dispersiyon eğrilerine etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)

Şekil 3.7-3.10'da PZT-2/Çelik/PZT-2, PZT-2/Alüminyum/PZT-2, PZT-6B/Çelik/PZT-6B, PZT-6B/Alüminyum/PZT-6B olmak üzere dört farklı şekilde malzeme seçimi yapılarak sandviç plaklar için sonuçlar elde edilmiştir. Burada H_{PZT}/H_{metal} oranı 4 alınarak farklı malzemelerin simetrik ve asimetrik Lamb dalgalarının yayılım hızına etkileri gösterilmiştir. Piezoelektriklik özelliğinin dispersiyon eğrilerine etkisi dış katman malzemesi PZT-2 olan sandviç plakta PZT-6B olduğu duruma göre daha fazladır.

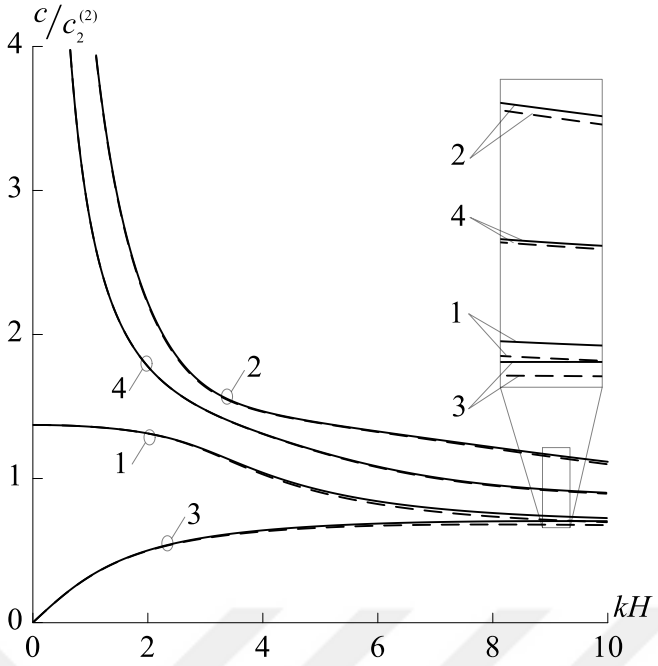
Asimetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızı boyutsuz dalga sayısı sıfıra yaklaşırken sandviç plak malzemesinden bağımsız olarak sıfıra yaklaşmaktadır. Simetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızı ise dalga sayısı sıfıra yaklaşırken iç katman malzemesinin enine dalga yayılım hızından büyük ve belirli bir hız değerine yaklaşmaktadır. Bu hız değeri hem iç katman hem de dış katmanların malzemesine bağlı olup iç katman malzemesi alüminyum, dış katmanların malzemesi ise PZT-6B olduğunda daha yüksek olmaktadır.



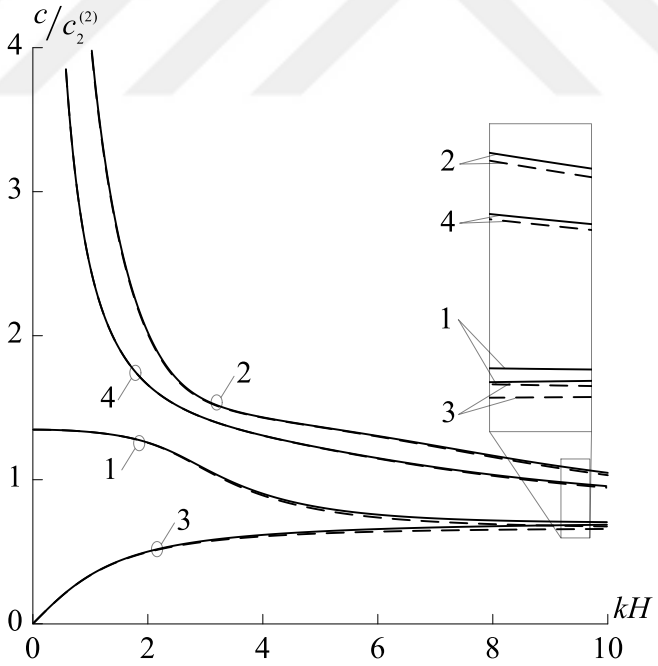
Şekil 3.7 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için H_{PZT}/H_{metal}=4 durumunda piezoelektriklik özelliğinin dispersiyon eğrilerine etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) (1- Simetrik birinci mod, 2- Simetrik ikinci mod, 3- Asimetrik birinci mod, 4- Asimetrik ikinci mod)



Şekil 3.8 PZT-2/Alüminyum/PZT-2 sistemi için H_{PZT}/H_{metal}=4 durumunda piezoelektriklik özelliğinin dispersiyon eğrilerine etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) (1- Simetrik birinci mod, 2- Simetrik ikinci mod, 3- Asimetrik birinci mod, 4- Asimetrik ikinci mod)



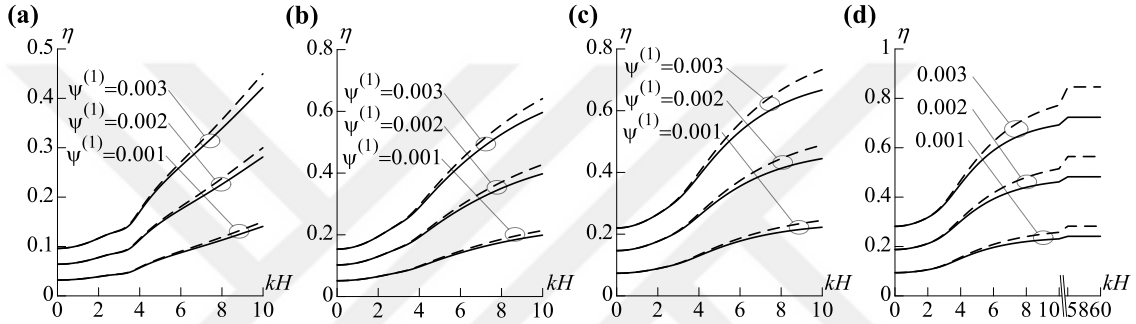
Şekil 3.9 PZT-6B/Çelik/PZT-6B sistemi için $H_{PZT}/H_{metal}=4$ durumunda piezoelektriklik özelliğinin dispersiyon eğrilerine etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) (1- Simetrik birinci mod, 2- Simetrik ikinci mod, 3- Asimetrik birinci mod, 4- Asimetrik ikinci mod)



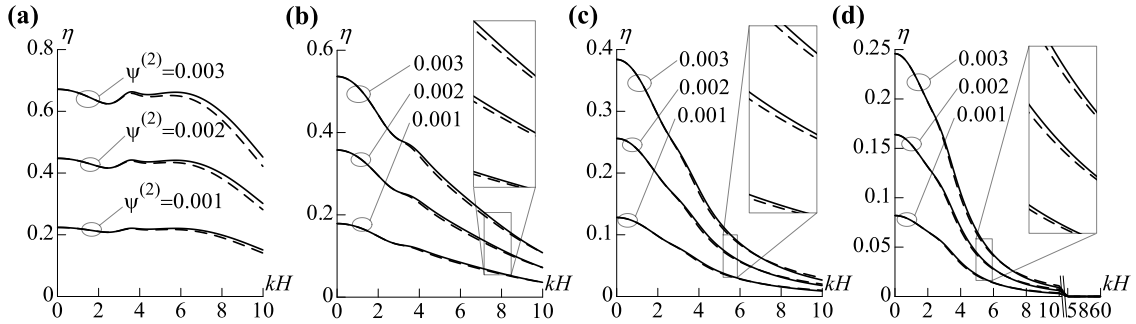
Şekil 3.10 PZT-6B/Alüminyum/PZT-6B sistemi için $H_{PZT}/H_{metal}=4$ durumunda piezoelektriklik özelliğinin dispersiyon eğrilerine etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok) (1- Simetrik birinci mod, 2- Simetrik ikinci mod, 3- Asimetrik birinci mod, 4- Asimetrik ikinci mod)

3.3.2 Öngerilmeli Sandviç Plakta Piezoelektriklik Özelliğinin Dispersiyon Eğrilerine Etkisi

Bu bölümde sonuçlar η (2.68) ve kH arasındaki ilişki ile farklı öngerilmelerin simetrik ve asimetrik Lamb dalgalarının yayılım hızına etkisini göstermektedir. Her bir şekilde (a), (b), (c) ve (d) ile dört faklı H_{PZT}/H_{metal} oranı için sonuçlar alınmıştır. Ayrıca düz ve kesikli çizgiler ile gösterilen dispersiyon eğrileri arasındaki fark piezoelektriklik özelliğinin öngerilme altındaki sandviç plakta Lamb dalgalarının yayılım hızına etkisini göstermektedir. Her bir şekilde (d) ile yüksek kH değerlerinde η değişkeninin ulaşacağı değerler de gösterilmektedir.



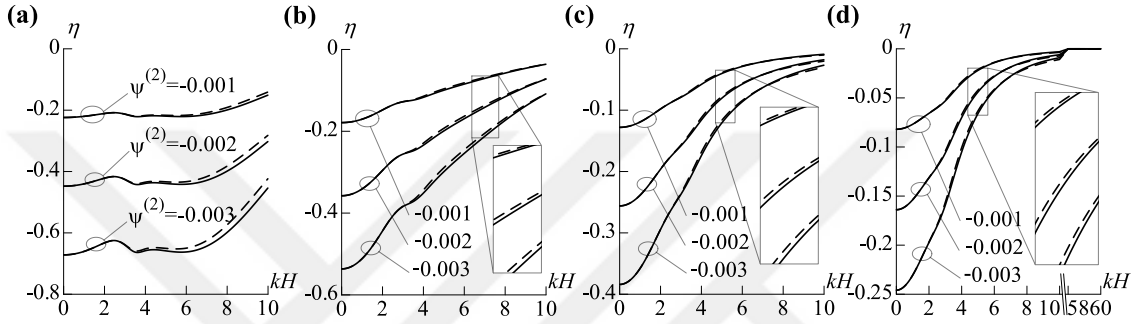
Şekil 3.11 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için dış katmanlardaki çekme öngerilmesinin simetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)



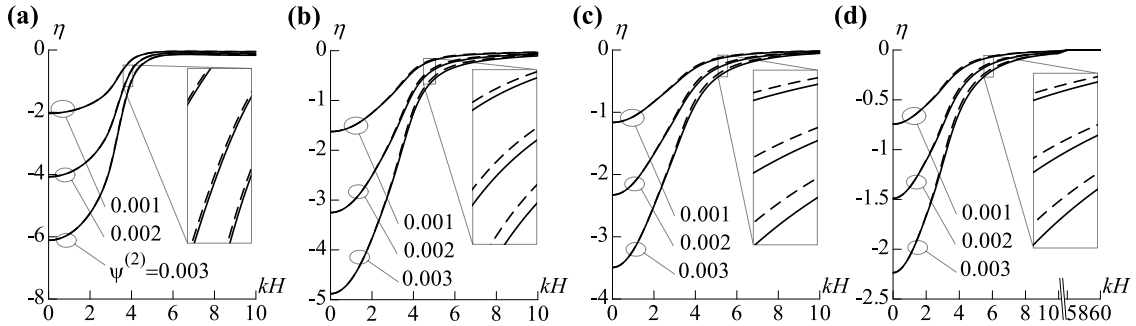
Şekil 3.12 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için üçüncü derece elastik sabitler hesaba katılmadığında iç katmandaki çekme öngerilmesinin simetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)

PZT-2/Çelik/PZT-2 sandviç plakta farklı öngerilmelerin simetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına etkileri Şekil 3.11-3.14'te, asimetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına etkileri Şekil 3.15-3.18'de verilmiştir.

Şekil 3.11 ve Şekil 3.15'te yalnızca dış katmanlarda çekme öngerilmesinin olduğu varsayılmıştır ($\sigma_{11}^{(1),0} = \sigma_{11}^{(3),0} > 0$, $\sigma_{11}^{(2),0} = 0$). Bu şekillerde öngerilme etkisinde sandviç plakta simetrik ve asimetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızının arttığı görülmektedir. Bu artış miktarı simetrik mod Lamb dalgaları için kH ile birlikte sürekli bir artış gösteriyorken asimetrik mod Lamb dalgaları için belirli bir kH değerine kadar azaldıktan sonra sürekli bir artış göstermektedir. Piezoelektriklik özelliği öngerilmenin sebep olduğu artış miktarını her iki mod için azaltmaktadır ve piezoelektriklik özelliğinin etkisi yüksek kh değerlerinde daha fazladır.



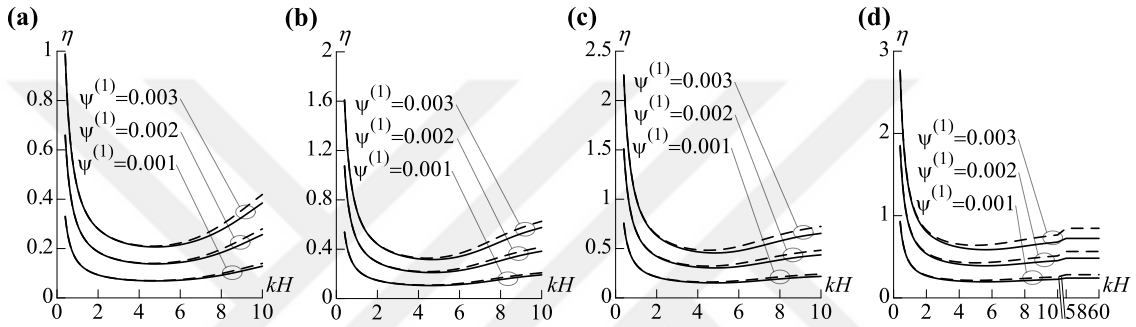
Şekil 3.13 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için üçüncü derece elastik sabitler hesaba katılmadığında iç katmandaki basma öngerilmesinin simetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)



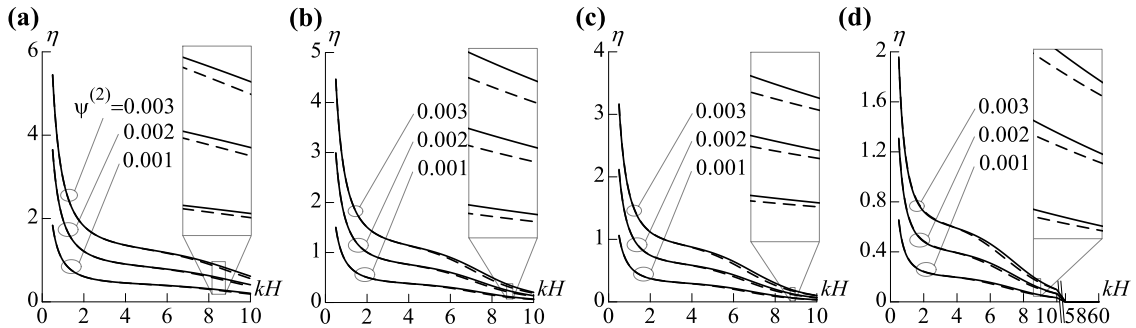
Şekil 3.14 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için üçüncü derece elastik sabitler hesaba katıldığında iç katmandaki çekme öngerilmesinin simetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)

Şekil 3.12 ve Şekil 3.16'da yalnızca iç katmanda çekme öngerilmesinin olduğu varsayılmış ve üçüncü derece elastik sabitler hesaba katılmamıştır ($\sigma_{11}^{(1),0} = \sigma_{11}^{(3),0} = 0$, $\sigma_{11}^{(2),0} > 0$, $a^{(2)} = 0$, $b^{(2)} = 0$, $c^{(2)} = 0$). Şekil 3.13 ve Şekil 3.17'de ise yalnızca iç

katmanda basma öngerilmesinin olduğu varsayılmış ve üçüncü derece elastik sabitler hesaba katılmamıştır ($\sigma_{11}^{(1),0}=\sigma_{11}^{(3),0}=0$, $\sigma_{11}^{(2),0}<0$, $a^{(2)}=0$, $b^{(2)}=0$, $c^{(2)}=0$). Bu şekillerde sandviç plakta simetrik ve asimetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızı çekme öngerilmesinin etkisinde arttığı basma öngerilmesinin etkisinde ise azaldığı görülmektedir. Fakat bu öngerilmelerin Lamb dalgalarının yayılım hızına etkisi artan kH ile azalırken, yüksek kH değerlerinde sıfıra yaklaşmaktadır. İç katmanda öngerilmenin bulunduğu durumda, dış katmanlarda öngerilmenin bulunduğu durumun aksine, piezoelektriklik özelliği öngerilmenin simetrik ve asimetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına etkisini arttırmaktadır.



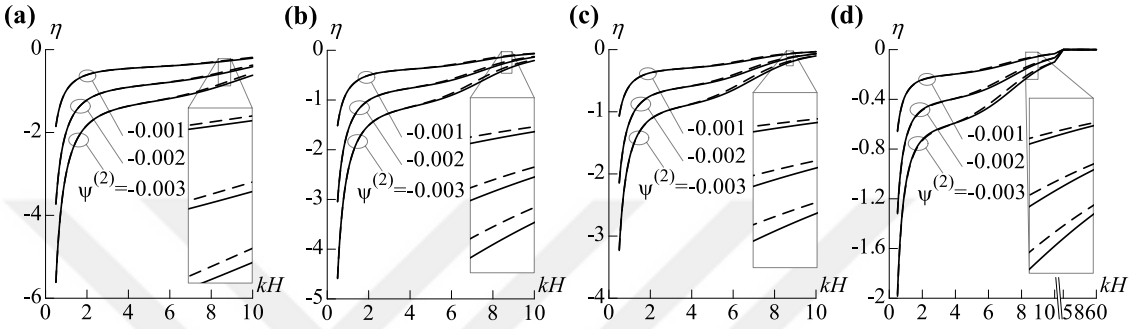
Şekil 3.15 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için dış katmanlardaki çekme öngerilmesinin asimetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)



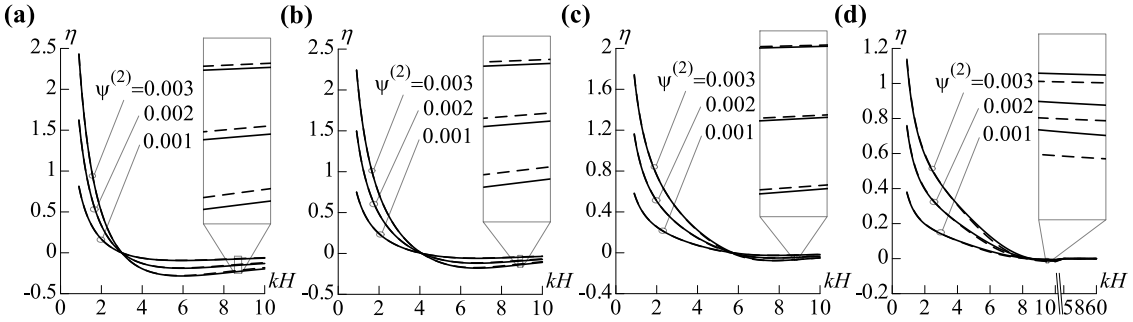
Şekil 3.16 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için üçüncü derece elastik sabitler hesaba katılmadığında iç katmandaki çekme öngerilmesinin asimetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)

Şekil 3.14 ve Şekil 3.18'de yalnızca iç katmanda çekme öngerilmesinin olduğu varsayılmış ve üçüncü derece elastik sabitler de hesaba katılmıştır ($\sigma_{11}^{(1),0}=\sigma_{11}^{(3),0}=0$, $\sigma_{11}^{(2),0}>0$, $a^{(2)}\neq 0$, $b^{(2)}\neq 0$, $c^{(2)}\neq 0$). Şekil 3.12'deki durumun aksine Şekil 3.14'teki

durumda öngerilme etkisinde sandviç plaktaki simetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızı azalmaktadır. Şekil 3.18'de ise belirli bir kH değerlerine kadar asimetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızı artmaktayken bu kH değerinden sonra azalmaktadır. Şekil 3.14 ve Şekil 3.18'de öngerilmenin dispersiyon eğrilerine etkisi Şekil 3.12 ve Şekil 3.16'dakine benzer olarak yüksek kH değerlerinde sıfıra yaklaşmaktadır. Bu şekillerde piezoelektriklik özelliğinin etkisi farklı kH değerlerinde farklı özellik göstermektedir.



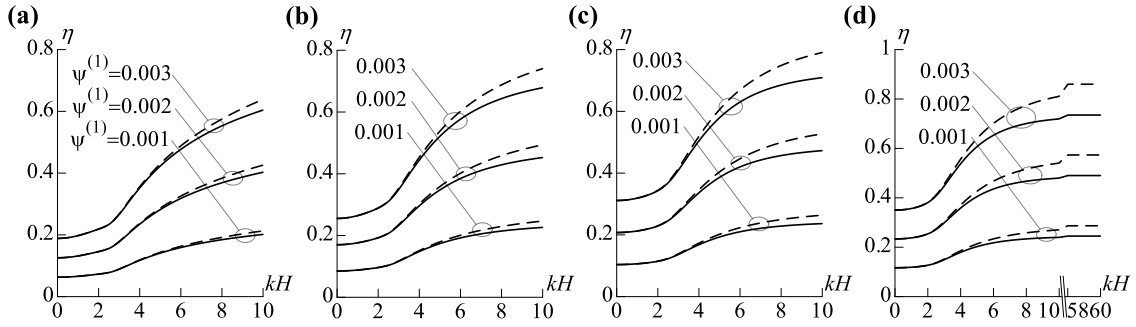
Şekil 3.17 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için üçüncü derece elastik sabitler hesaba katılmadığında iç katmandaki basma öngerilmesinin asimetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)



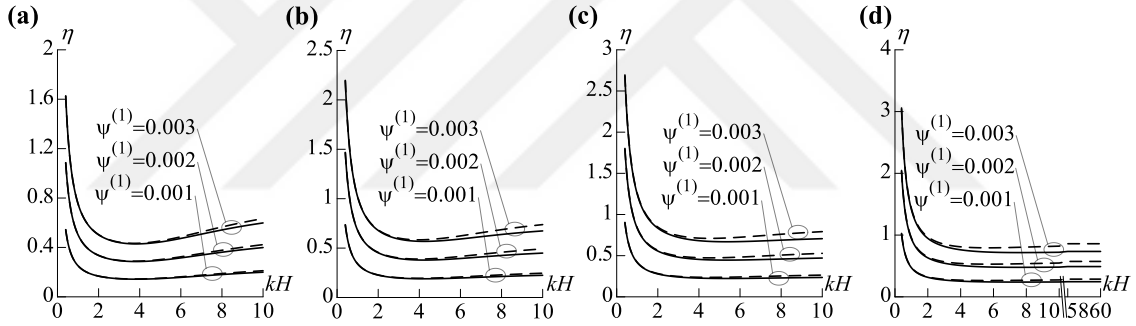
Şekil 3.18 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için üçüncü derece elastik sabitler hesaba katıldığında iç katmandaki çekme öngerilmesinin asimetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)

Şekil 3.19-3.24'te farklı sandviç plak malzemeleri için yalnızca dış katmanlarda çekme öngerilmesinin olduğu durumda sonuçlar elde edilmiştir. İncelenen tüm malzeme çeşitlerinde çekme öngerilmeleri simetrik ve asimetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızını arttırmaktadır. Piezoelektriklik özelliği tüm malzeme çeşitlerinde öngerilmelerin dispersiyon eğrilerine etkisini azaltmaktadır. İç katman malzemesi için

çelik yerine alüminyum kullanıldığında, dış katmanların malzemesi için de PZT-2 yerine PZT-6B kullanıldığında öngerilmelerin dispersiyon eğrilerine etkisi daha fazla olmaktadır. Fakat piezoelektriklik özelliğinin η değişkenine etkisi iç katman malzemesi çelik, dış katmanların malzemesi ise PZT-2 olduğunda daha fazla olmaktadır.



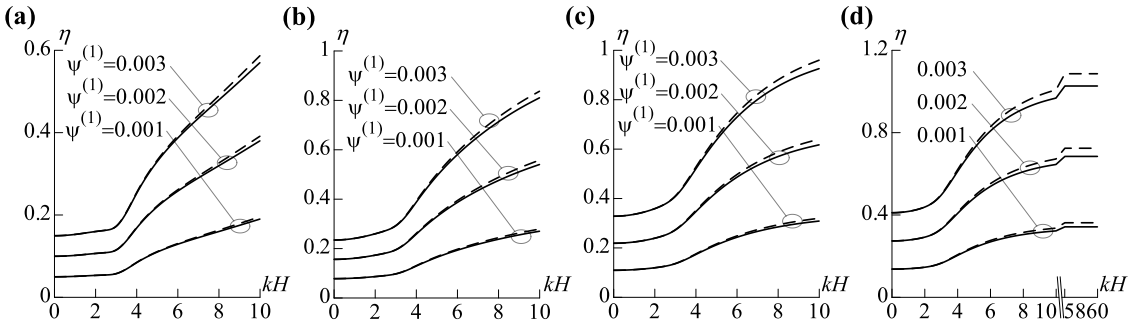
Şekil 3.19 PZT-2/Alüminyum/PZT-2 sistemi için dış katmanlardaki çekme öngerilmesinin simetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)



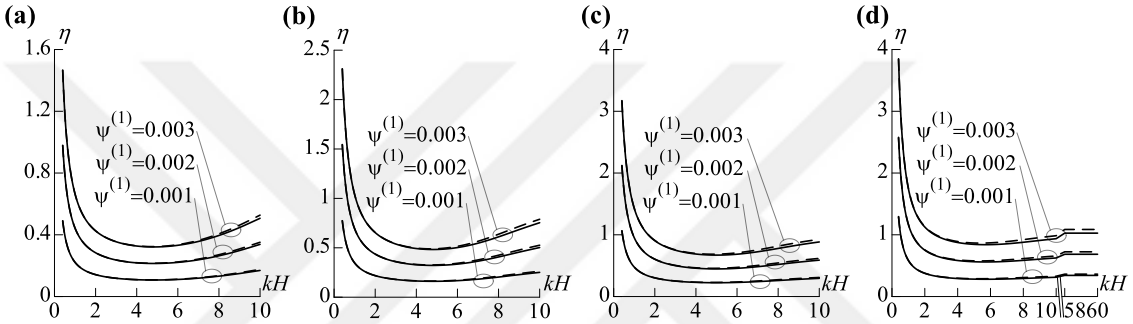
Şekil 3.20 PZT-2/Alüminyum/PZT-2 sistemi için dış katmanlardaki çekme öngerilmesinin asimetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)

Şekil 3.25-3.30'da sandviç plak malzemesinin PZT-2/Çelik/PZT-2 olduğu durumda öngerilmelerin simetrik ve asimetrik ikinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına etkisi incelenmiştir.

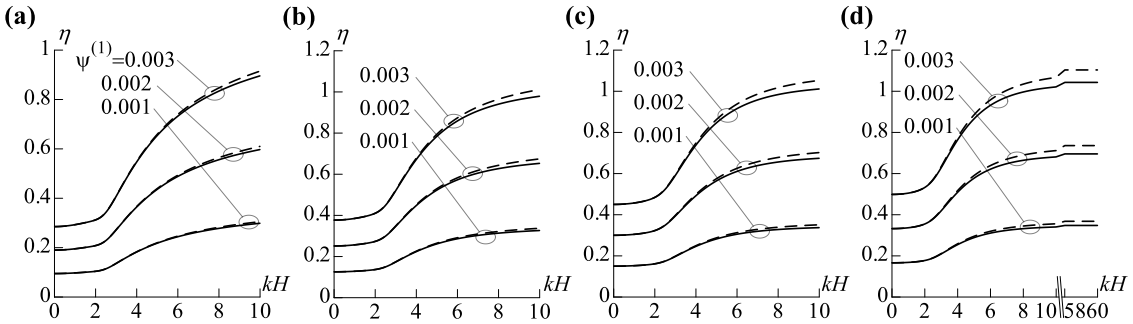
Şekil 3.25 ve Şekil 3.28, dış katmanlardaki çekme öngerilmesinin simetrik ve asimetrik ikinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızını birinci modda olduğu gibi (Şekil 3.11 ve Şekil 3.15) arttırdığını göstermektedir. Piezoelektriklik özelliği farklı kH değerlerinde dispersiyon eğrilerinin artmasına veya azalmasına sebep olmaktadır.



Şekil 3.21 PZT-6B/Çelik/PZT-6B sistemi için dış katmanlardaki çekme öngerilmesinin simetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)



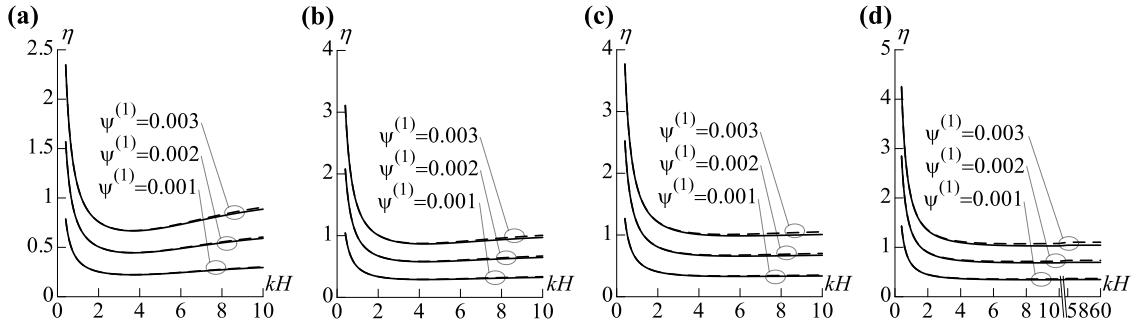
Şekil 3.22 PZT-6B/Çelik/PZT-6B sistemi için dış katmanlardaki çekme öngerilmesinin asimetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)



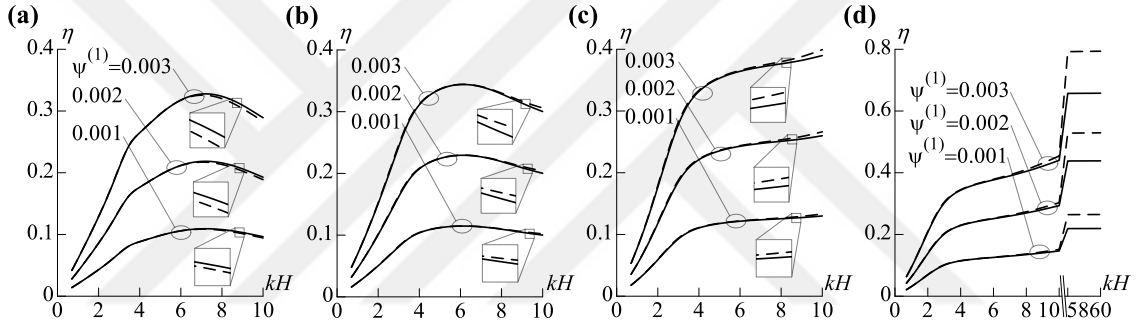
Şekil 3.23 PZT-6B/Alüminyum/PZT-6B sistemi için dış katmanlardaki çekme öngerilmesinin simetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)

Şekil 3.26 ve Şekil 3.29 üçüncü derece elastik sabitler hesaba katılmadığında iç katmandaki çekme öngerilmesinin simetrik ve asimetrik ikinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızını arttırdığını ve yüksek kH değerlerinde bu etkinin sıfıra düştüğünü göstermektedir. Şekil 3.26'da belirli bir kH değerleri civarında öngerilmelerin

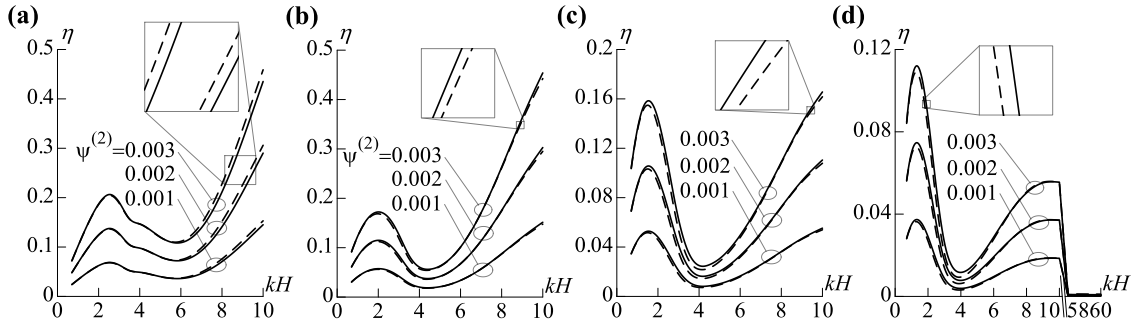
dispersiyon eğrilerine etkisi azalmaktadır. Benzer olarak Şekil 3.29'da yaklaşık bu *kh* değerine kadar öngerilmelerin dispersiyon eğrileri üzerindeki etkisi azdır.



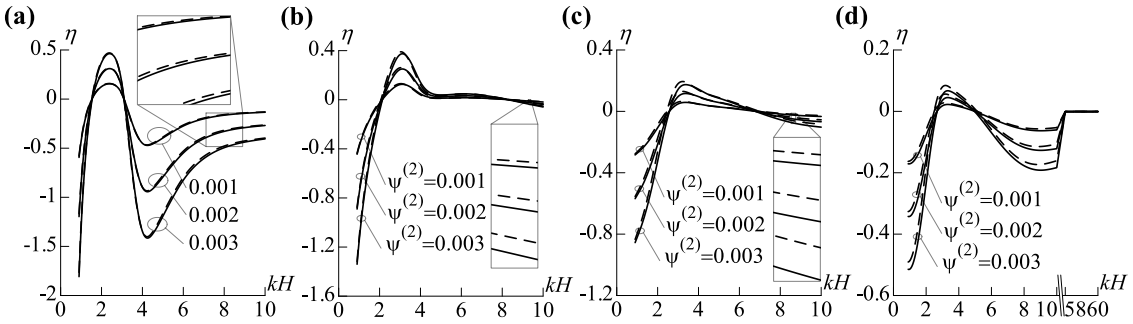
Şekil 3.24 PZT-6B/Alüminyum/PZT-6B sistemi için dış katmanlardaki çekme öngerilmesinin asimetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)



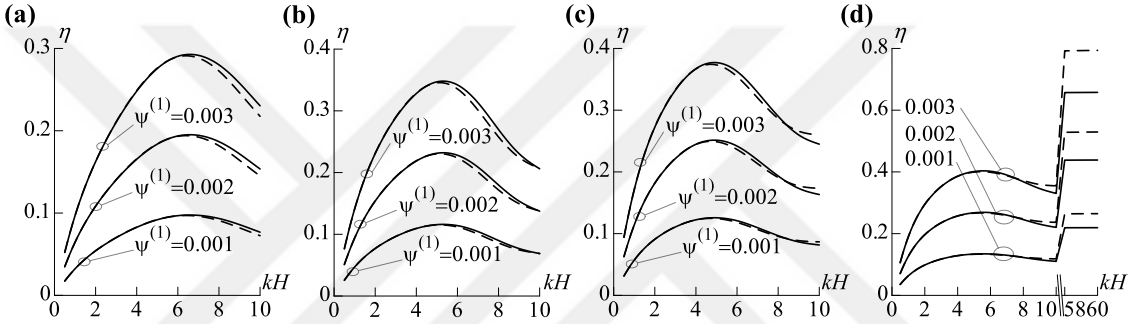
Şekil 3.25 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için dış katmanlardaki çekme öngerilmesinin simetrik ikinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)



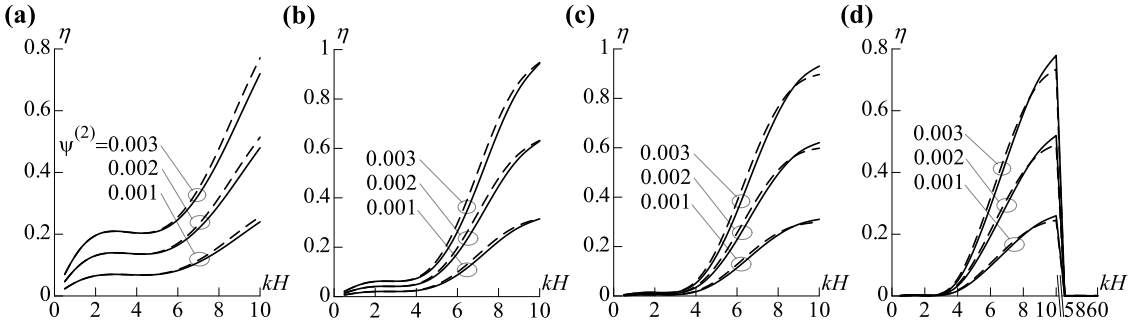
Şekil 3.26 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için üçüncü derece elastik sabitler hesaba katılmadığında iç katmandaki çekme öngerilmesinin simetrik ikinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)



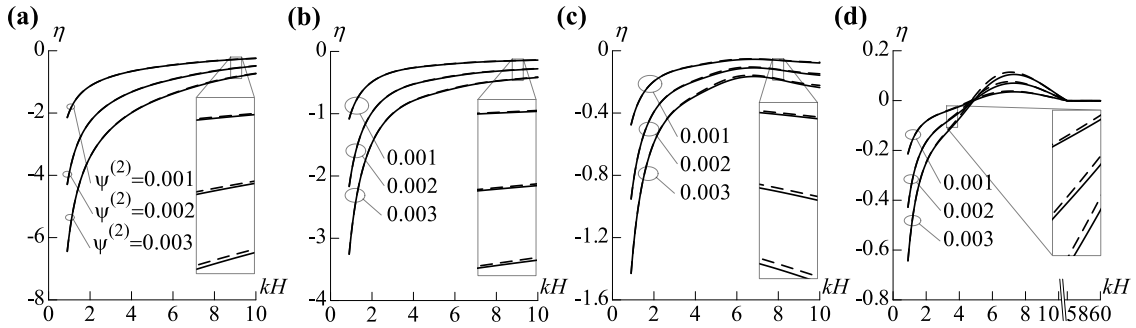
Şekil 3.27 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için üçüncü derece elastik sabitler hesaba katıldığında iç katmandaki çekme öngerilmesinin simetrik ikinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)



Şekil 3.28 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için dış katmanlardaki çekme öngerilmesinin asimetrik ikinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)



Şekil 3.29 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için üçüncü derece elastik sabitler hesaba katılmadığında iç katmandaki çekme öngerilmesinin asimetrik ikinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)



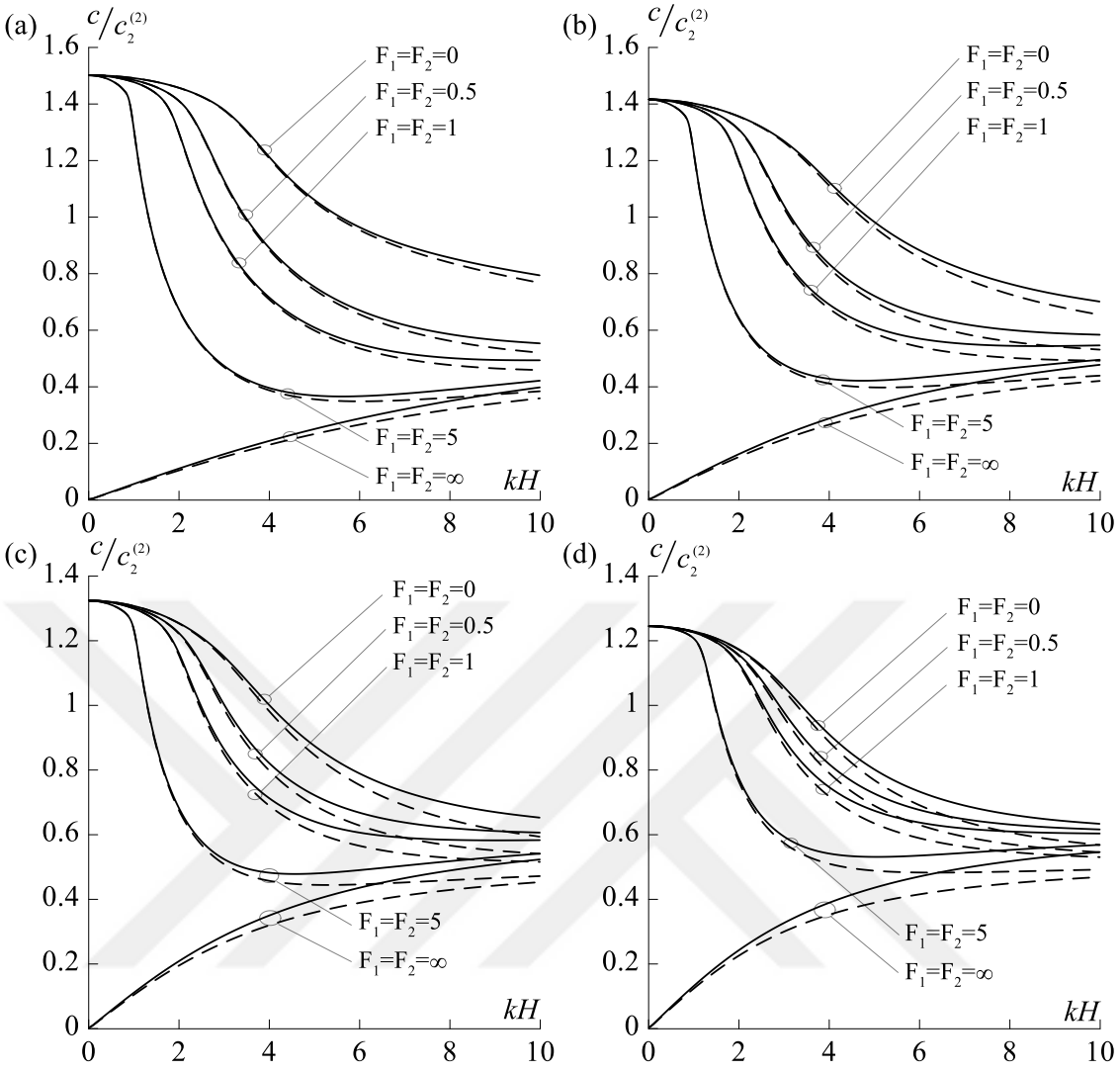
Şekil 3.30 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için üçüncü derece elastik sabitler hesaba katıldığında iç katmandaki çekme öngerilmesinin asimetrik ikinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)

Şekil 3.27 ve Şekil 3.30 üçüncü derece elastik sabitler hesaba katıldığında sonuçların Şekil 3.26 ve Şekil 3.29'dan farklı olarak önemli derecede değiştiğini göstermektedir. Fakat simetrik ve asimetrik birinci mod Lamb dalgalarında olduğu gibi (Şekil 3.14 ve Şekil 3.18) ve üçüncü derece elastik sabitler hesaba katılmadığı durumda olduğu gibi (Şekil 3.26 ve Şekil 3.29) öngerilmelerin dispersiyon eğrilerine etkisi yüksek kH değerlerinde sıfıra gitmektedir.

3.3.3 İdeal Olmayan Temas Koşullarının Dispersiyon Eğrilerine Etkisi

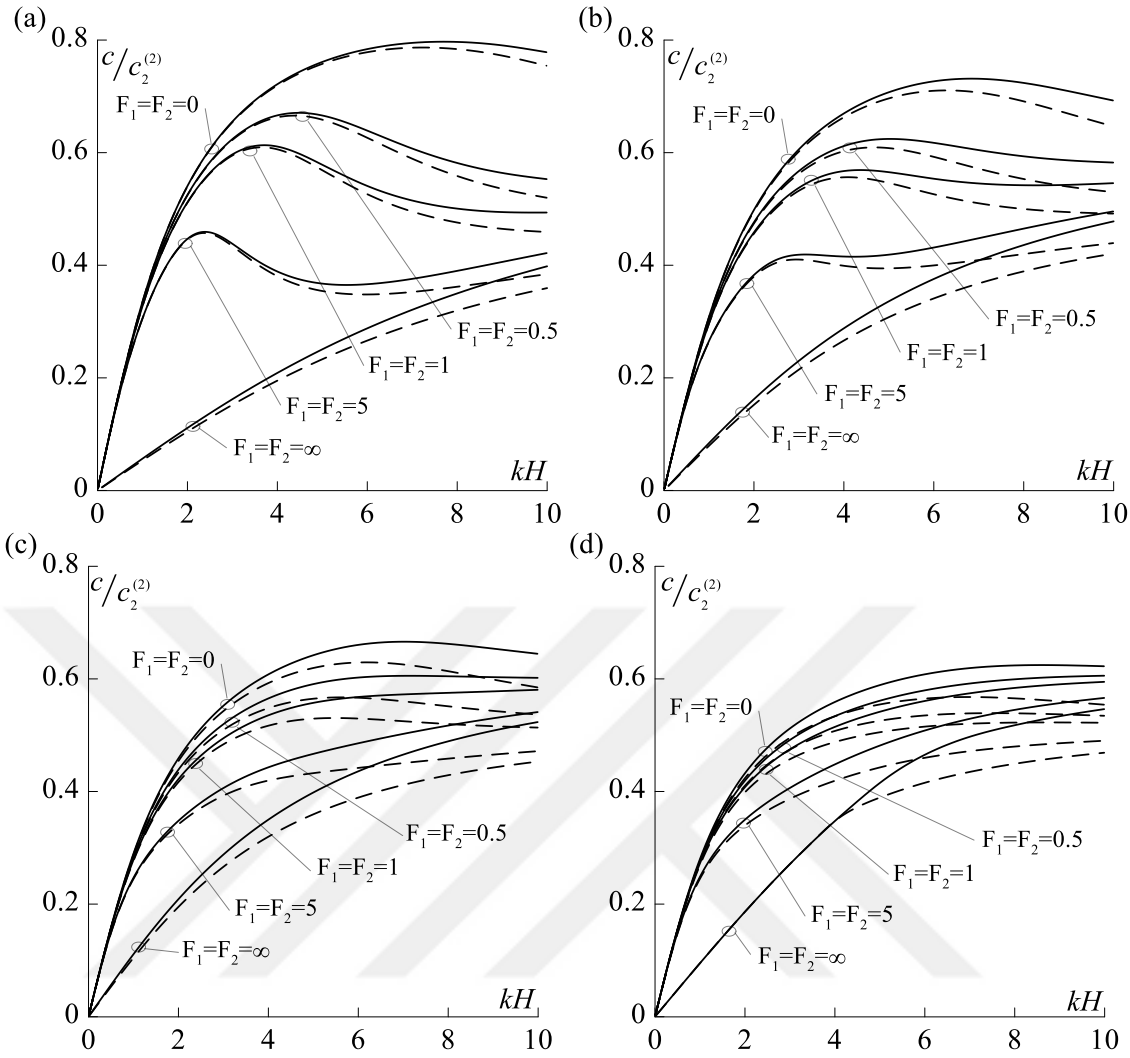
Bu bölümdeki sonuçlar katmanlarda herhangi bir öngerilmenin bulunmadığı durumda PZT-2/Çelik/PZT-2 sandviç plak için elde edilmiştir ($\sigma_{11}^{(1),0}=0$, $\sigma_{11}^{(2),0}=0$, $\sigma_{11}^{(3),0}=0$). İç katman ile dış katmanlar arasındaki ideal temas koşulu durumu ile farklı derecelerde ideal olmayan temas koşulu durumlarının simetrik ve asimetrik, birinci ve ikinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızlarına etkileri farklı H_{PZT}/H_{metal} oranları için incelenmiştir.

Bu bölümdeki tüm şekiller temas koşullarındaki idealsizlik derecesi sıfırdan sonsuza doğru arttıkça Lamb dalgalarının tüm modlardaki yayılım hızının azaldığını göstermektedir. Piezoelektriklik özelliği tüm durumlarda Lamb dalgalarının yayılım hızını arttırmakta ve bu artış artan kH değerleri ve H_{PZT}/H_{metal} oranı ile birlikte artmaktadır. Ayrıca yüksek kH değerlerinde birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızı piezoelektriklik özelliğinin olduğu ve olmadığı durumlara karşılık belirli iki değere yaklaşmaktadır.



Şekil 3.31 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için $F_1 = F_2 \geq 0$ şeklindeki ideal olmayan temas koşullarının simetrik birinci mod dispersiyon eğrilerine H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)

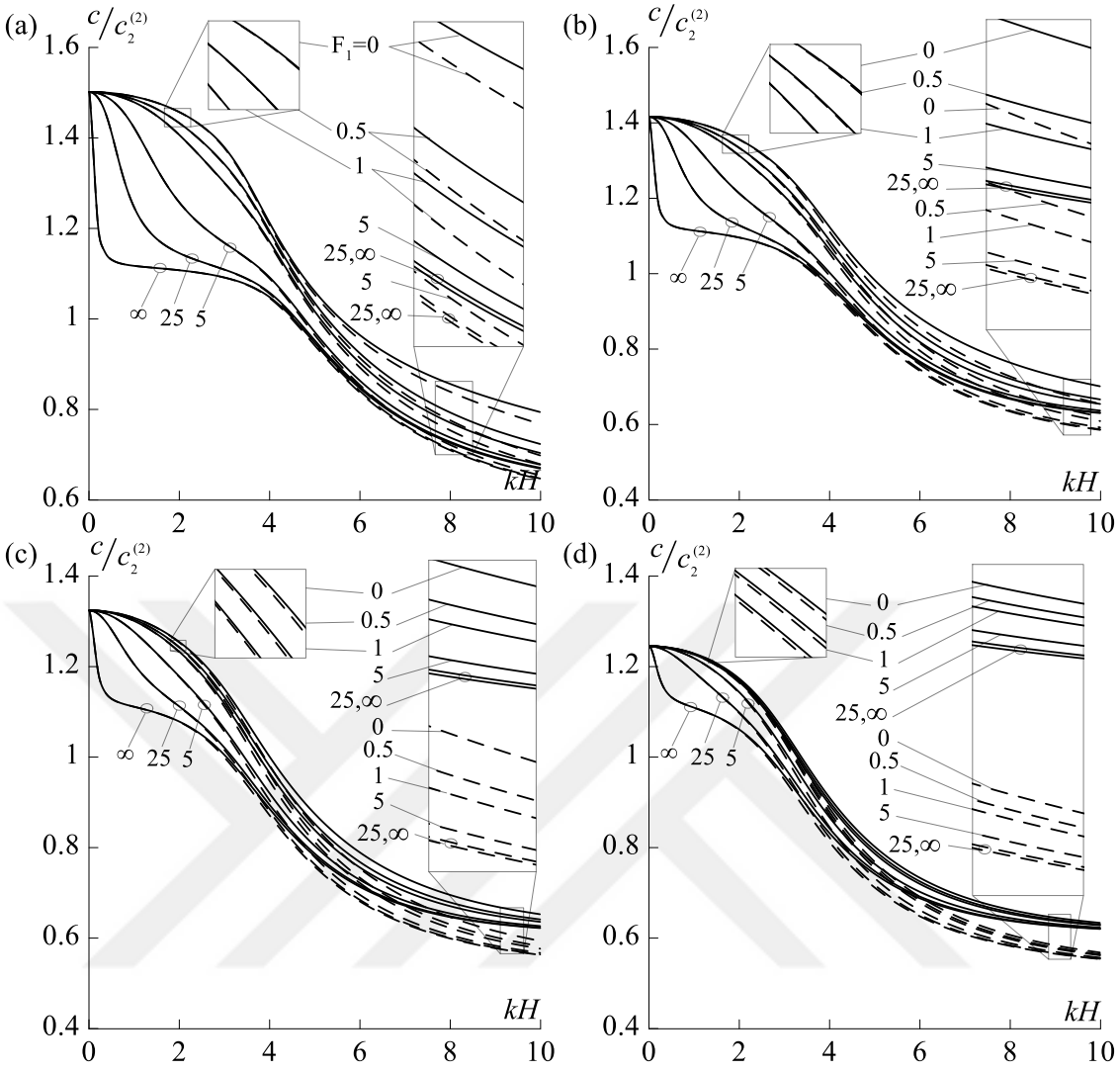
Şekil 3.31 ve Şekil 3.33'te temas koşullarındaki idealsizlik derecesinden bağımsız olarak kH sıfıra yaklaşırken simetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızı belirli bir hız değerine yaklaşmaktadır ve bu hız değeri H_{PZT}/H_{metal} oranı arttıkça azalmaktadır. Ayrıca, $F_1 = F_2 \geq 0$ şeklindeki ideal olmayan temas koşullarının bulunduğu durum için de $F_1 \geq 0$, $F_2 = 0$ şeklindeki ideal olmayan temas koşullarının bulunduğu durum için de bu hız değeri aynıdır. Fakat yanal ve düşey ideal olmayan temas koşullarının birlikte bulunduğu durumda (Şekil 3.31) idealsizlik derecesi sonsuza eşit olduğunda ($F_1 = F_2 = \infty$) birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızı sıfıra yaklaşmaktadır.



Şekil 3.32 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için $F_1 = F_2 \geq 0$ şeklindeki ideal olmayan temas koşullarının asimetrik birinci mod dispersiyon eğrilerine H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)

Şekil 3.32 ve Şekil 3.34, temas koşullarındaki idealsizlik derecesinden bağımsız olarak kH sıfıra yaklaşırken asimetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızının sıfıra yaklaştığını göstermektedir. Lamb dalgalarının yayılım hızı H_{PZT}/H_{metal} oranı arttıkça azalmaktadır.

Şekil 3.31-3.34, yanal ve düşey ideal olmayan temas koşullarının birlikte bulunduğu durumda idealsizlik derecesinin dispersiyon eğrileri üzerinde etkisinin daha fazla olduğunu göstermektedir.



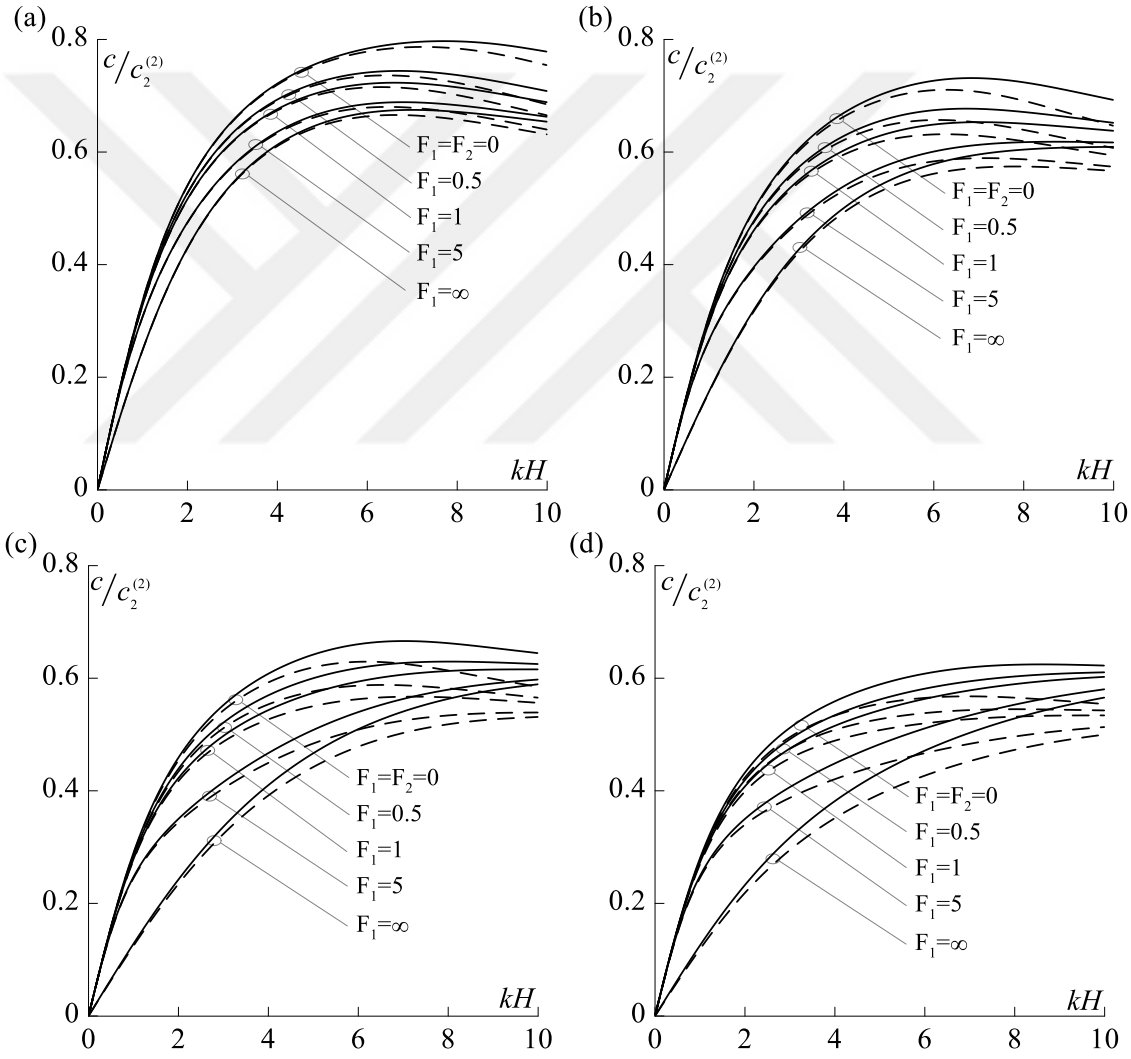
Şekil 3.33 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için $F_1 \geq 0$, $F_2 = 0$ şeklindeki ideal olmayan temas koşullarının simetrik birinci mod dispersiyon eğrilerine H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)

Şekil 3.35-3.38, katmanlar arasındaki ideal olmayan temas koşullarının ikinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına etkilerini göstermektedir. Farklı idealsizlik derecelerinde piezoelektriklik özelliğinin ikinci mod Lamb dalgalarına etkisinin birinci moda göre daha az olduğu görülmektedir. H_{PZT}/H_{metal} oranı arttıkça ikinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızı azalmaktadır.

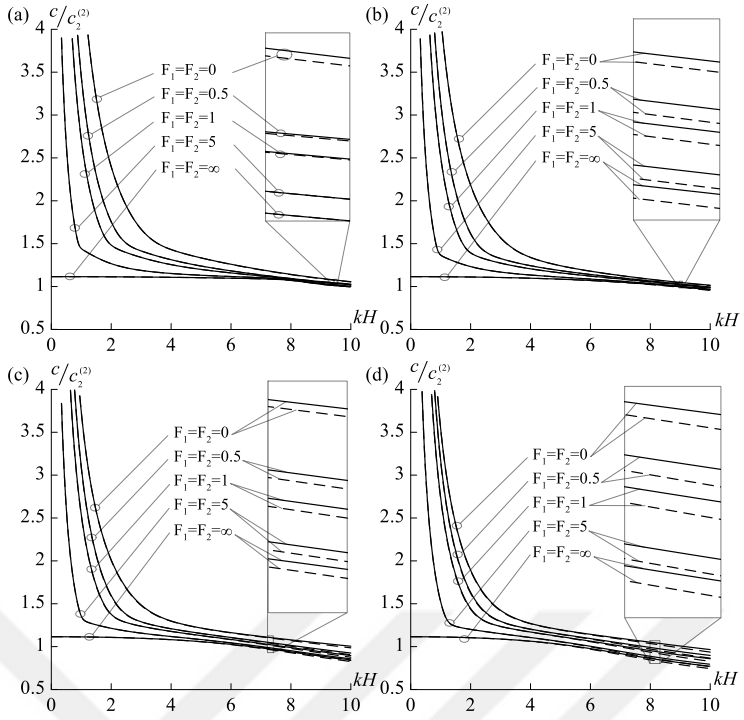
İdealsizlik derecesi sonsuz olduğunda ikinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızı kH sıfıra yaklaşırken belirli bir hız değerine yaklaşmaktadır. Fakat katmanlar arasında yanal ve düşey ideal olmayan temas koşulları bulunduğunda ve idealsizlik derecesi sonsuz

olduğunda ($F_1 = F_2 = \infty$) kH sıfıra yaklaşırken asimetrik ikinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızı sıfıra gitmektedir (Şekil 3.36).

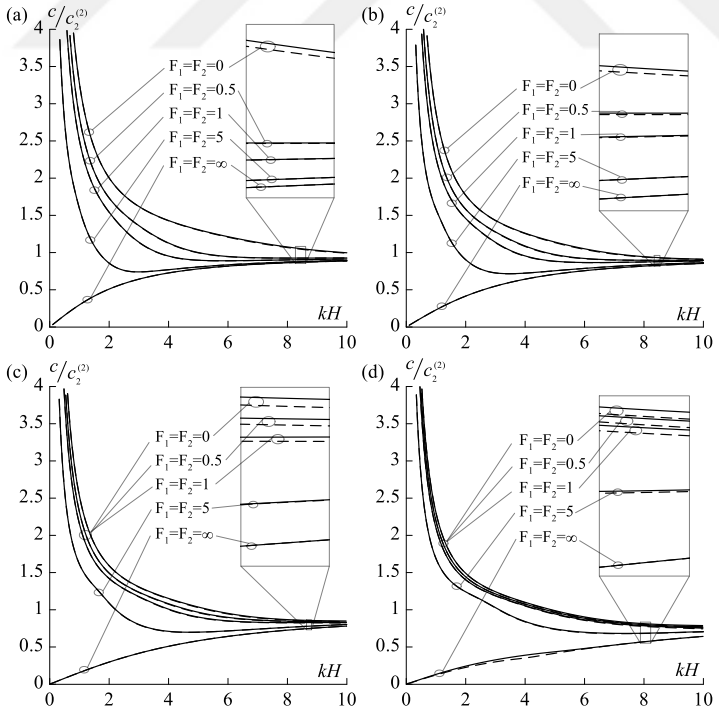
Şekil 3.39 ve Şekil 3.40'ta simetrik ve asimetrik, birinci ve ikinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızı (10,80) aralığındaki kH değerleri için elde edilmiştir. Böylelikle yüksek kH değerlerinde Lamb dalgalarının dispersiyon eğrilerine ait değişimi görülebilmektedir. Bu şekillerde birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızının temas koşullarındaki idealsizlik derecesinden bağımsız olarak belirli bir değere yaklaştığı görülmektedir. Ayrıca piezoelektriklik özelliği yüksek kH değerlerinde yaklaşılan bu hız değerini yükseltmektedir.



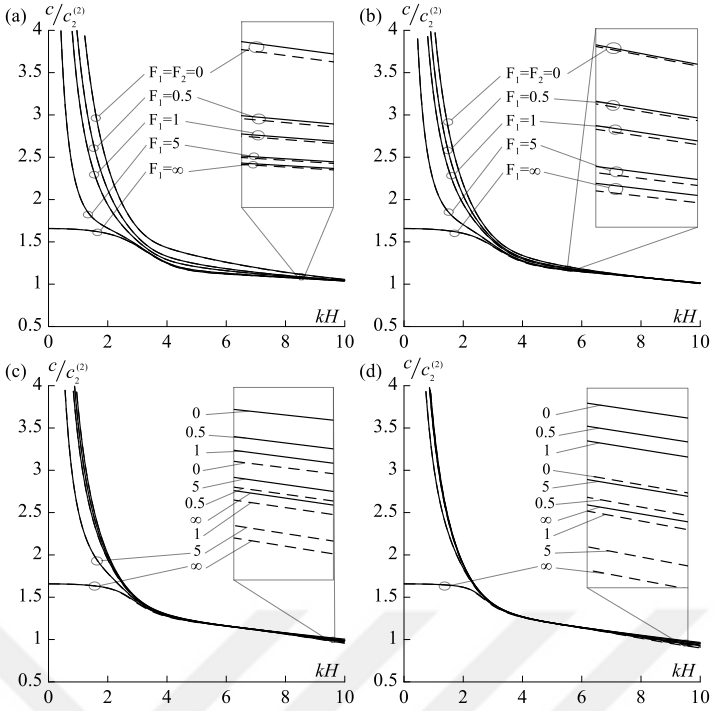
Şekil 3.34 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için $F_1 \geq 0$, $F_2 = 0$ şeklindeki ideal olmayan temas koşullarının asimetrik birinci mod dispersiyon eğrilerine H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)



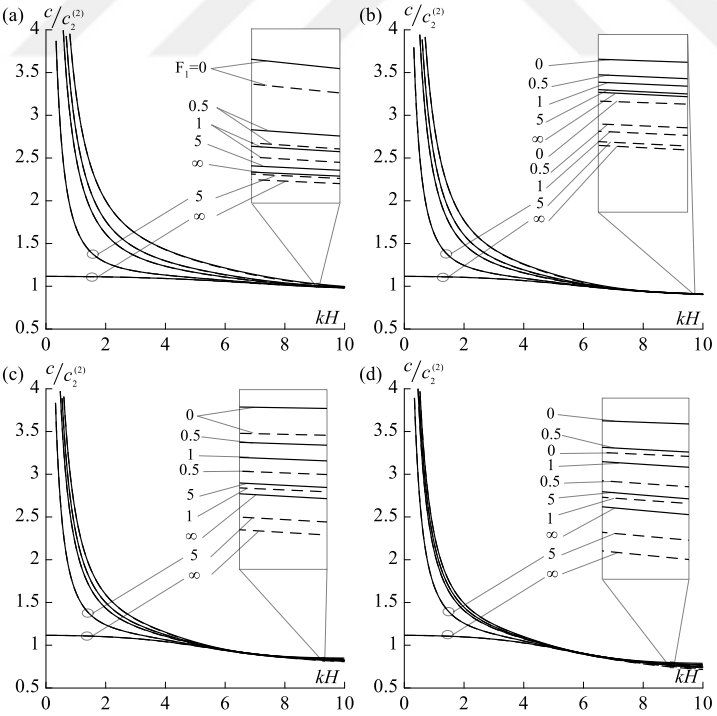
Şekil 3.35 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için $F_1 = F_2 \geq 0$ şeklindeki ideal olmayan temas koşullarının simetrik ikinci mod dispersiyon eğrilerine H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)



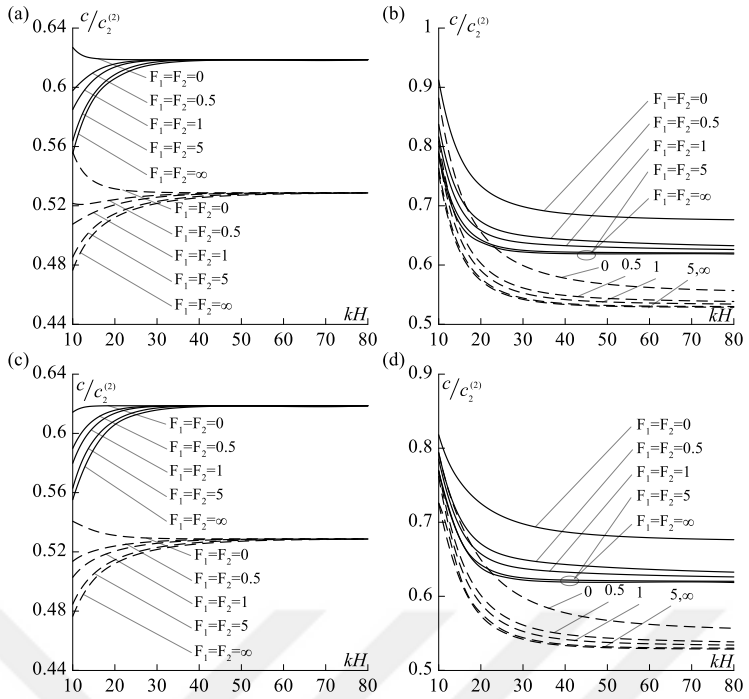
Şekil 3.36 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için $F_1 = F_2 \geq 0$ şeklindeki ideal olmayan temas koşullarının asimetrik ikinci mod dispersiyon eğrilerine H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)



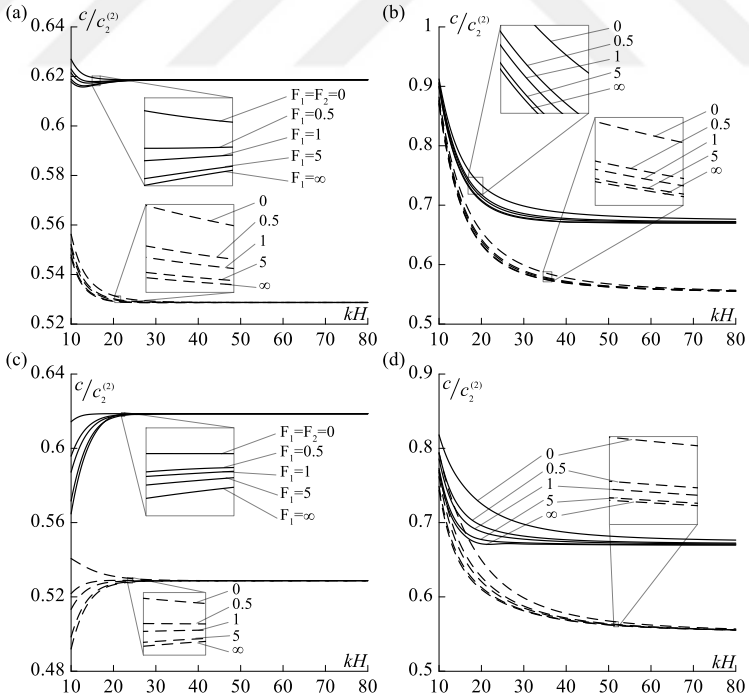
Şekil 3.37 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için $F_1 \geq 0$, $F_2 = 0$ şeklindeki ideal olmayan temas koşullarının simetrik ikinci mod dispersiyon eğrilerine H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)



Şekil 3.38 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için $F_1 \geq 0$, $F_2 = 0$ şeklindeki ideal olmayan temas koşullarının asimetrik ikinci mod dispersiyon eğrilerine H_{PZT}/H_{metal}=0.5 (a), H_{PZT}/H_{metal}=1 (b), H_{PZT}/H_{metal}=2 (c), H_{PZT}/H_{metal}=4 (d) durumlarında etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)



Şekil 3.39 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için $F_1 = F_2 \geq 0$ şeklindeki ideal olmayan temas koşullarının yüksek *kH* değerlerinde simetrik birinci mod (a), simetrik ikinci mod (b), asimetrik birinci mod (c), asimetrik ikinci mod (d) dispersiyon eğrilerine H_{PZT}/H_{metal}=4 durumunda etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)



Şekil 3.40 PZT-2/Çelik/PZT-2 sistemi için $F_1 \geq 0$, $F_2 = 0$ şeklindeki ideal olmayan temas koşullarının yüksek *kH* değerlerinde simetrik birinci mod (a), simetrik ikinci mod (b), asimetrik birinci mod (c), asimetrik ikinci mod (d) dispersiyon eğrilerine H_{PZT}/H_{metal}=4 durumunda etkisi (—— piezoelektriklik özelliği var, - - - - piezoelektriklik özelliği yok)

BÖLÜM 4

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, piezoelektrik katman bulunduran öngerilmeli sistemlerde mekanik dalgaların dispersiyon eğrileri elde edilmiş;

- katmanın piezoelektriklik özelliğinin,
- sistem bileşenlerindeki farklı şiddetlerdeki öngerilmelerin,
- üçüncü derece elastik sabitlerin hesaba katılması ve katılmaması durumlarının,
- piezoelektrik katmanın üst ve alt yüzey elektrotlarının elektriksel açık veya kısa devre olması durumlarının,
- piezoelektrik malzemenin polarizasyon doğrultusunun,
- öngerilmelerin yatay veya düşey yönlü olmasının,
- sistem bileşenlerinin farklı malzemelerden oluşması durumunun,
- sistem bileşenleri arasındaki ideal olmayan temas koşullarının sağlanmasının,
- boyutsuz dalga sayısı, katman kalınlık oranı, temas koşullarındaki idealsizlik derecesi gibi değişkenlerin

dalgaların yayılım hızına etkileri incelenmiştir. Bu incelemeler özel olarak iki farklı sistem üzerinde yapılmıştır.

Birinci sistem piezoelektrik katman ve metal yarıdüzlemden oluşmaktadır. Bu sistemde ilk dört moda ait yüzey dalgalarının dispersiyon eğrileri ve farklı durumlar altında bu eğrilerdeki değişimler elde edilmiştir. Bu sistem için elde edilen sonuçlar özet olarak aşağıdaki gibidir:

- Piezoelektriklik özelliği öngerilmenin olmadığı durumda dalga yayılım hızını arttırmaktadır. Bu artış, artan boyutsuz dalga sayısı *kh* ile artmaktadır. Piezoelektrik katman malzemesi değiştiğinde piezoelektriklik özelliğinin dalga yayılım hızına etkisi de miktar olarak değişmektedir.
- Katmandaki çekme öngerilmesi dalga yayılım hızını arttırmaktadır. Yüksek *kh* değerlerinde bu etki daha fazladır. Yarıdüzlemdeki çekme öngerilmesi de dalga yayılım hızını arttırmakta, basma öngerilmesi ise azaltmaktadır. Yüksek *kh* değerlerinde bu etki sıfıra doğru düşmektedir.
- Üçüncü derece elastik sabitler hesaba katıldığında yarıdüzlemdeki çekme öngerilmesinin dalga yayılım hızını azalttığı görülmektedir.
- Piezoelektriklik özelliği, katmandaki öngerilmenin dalga yayılım hızına etkisini azaltıyorken yarıdüzlemdeki öngerilmenin dalga yayılım hızına etkisini arttırmaktadır.
- Yüzey dalgalarının yayılım hızı katmanın üst ve alt yüzey elektrotlarının elektriksel açık devre olması durumunda, kısa devre olması durumuna göre daha yüksek olmaktadır. Bu iki durumun dalga yayılım hızına etkisi arasındaki fark, artan boyutsuz dalga sayısı *kh* ile azalmaktadır.
- Piezoelektrik katmanın polarizasyon doğrultusunun Ox_2 ekseni ile çakıştığı durumda, Ox_1 ekseni ile çakıştığı duruma göre yüzey dalgalarının yayılım hızı daha yüksektir. Bu iki durumun dalga yayılım hızına etkisi arasındaki fark, artan boyutsuz dalga sayısı *kh* ile artmaktadır. Katman malzemesi türü polarizasyon doğrultusunun dispersiyon eğrilerine etkisini oldukça fazla etkilemektedir.
- Polarizasyon doğrultusunun Ox_1 ekseni ile çakıştığı durumda, Ox_2 ekseni ile çakıştığı duruma göre, katmandaki çekme öngerilmesinin dalga yayılım hızına etkisi daha fazladır. Diğer taraftan bu iki durumun yarıdüzlemdeki çekme öngerilmesinin dalga yayılım hızına etkisi arasındaki fark daha azdır.
- Düşey tek eksenli çekme öngerilmesi etkisinde sistemde yüzey dalgalarının yayılım hızı artmakta, basma öngerilmesi etkisinde yüzey dalgalarının yayılım hızı azalmaktadır. Yüksek *kh* değerlerinde öngerilmelerin etkisi azalmaktadır. Piezoelektriklik özelliği de bu öngerilmelerin etkisini azaltmaktadır.

- Üçüncü derece elastik sabitler hesaba katıldığında düşey tek eksenli çekme öngerilmelerinin dalga yayılım hızına etkisi yüzey dalgalarının moduna ve *kh* değerlerine bağlı olarak artma veya azalma yönünde olabilmektedir.

İncelenen ikinci sistem piezoelektrik dış katmanlar ve metal iç katmandan oluşan sandviç plaktır. Bu sistemde ilk iki moda ait simetrik ve asimetrik Lamb dalgalarının dispersiyon eğrileri ve farklı durumlar altında bu eğrilerdeki değişimler elde edilmiştir. Bu sistem için elde edilen sonuçlar özet olarak aşağıdaki gibidir:

- Dış katmanlardaki piezoelektriklik özelliği öngerilmesiz sandviç plakta tüm modlardaki Lamb dalgalarının yayılım hızını arttırmaktadır. Piezoelektriklik özelliğinin dispersiyon eğrilerine etkisi artan *kH* değeri ile birlikte artmaktadır.
- Sandviç plakta piezoelektrik dış katmanların kalınlıkları iç katmana oranla (H_{PZT}/H_{metal}) arttığında tüm modlardaki Lamb dalgalarının yayılım hızı düşmekte ve küçük *kH* değerlerinde piezoelektriklik özelliğinin dispersiyon eğrilerine etkisi artmaktadır.
- Piezoelektriklik özelliğinin dispersiyon eğrilerine etkisi dış katman malzemesi PZT-2 olan sandviç plakta PZT-6B olduğu duruma göre daha fazladır.
- Simetrik ve asimetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızı H_{PZT}/H_{metal} oranından bağımsız olarak yüksek *kH* değerlerinde belirli bir değere yaklaşmaktadır.
- Asimetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızı boyutsuz dalga sayısı sıfıra yaklaşırken sandviç plak malzemesinden bağımsız olarak sıfıra yaklaşırken simetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızı katmanların malzeme türüne göre değişen belirli bir değere yaklaşmaktadır.
- Dış katmanlardaki çekme öngerilmesi simetrik ve asimetrik mod Lamb dalgalarının yayılım hızını incelenen tüm malzeme türü için arttırmaktadır. Yüksek *kH* değerlerinde bu etki daha fazladır. İç katmandaki çekme öngerilmesi de dalga yayılım hızını arttırmakta, basma öngerilmesi ise azaltmaktadır. Yüksek *kH* değerlerinde bu etki azalmaktadır.
- Üçüncü derece elastik sabitler hesaba katıldığında iç katmandaki çekme öngerilmesi simetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızını azaltmakta,

asimetrik birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızını belirli bir *kH* değerine kadar arttırmakta sonra azaltmaktadır. İkinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızını ise iki farklı *kH* değerinin öncesinde ve sonrasında arttırmakta veya azaltmaktadır.

- Öngerilmelerin ve katmanlar arası ideal olmayan temas koşullarının birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızına etkisi ikinci moda göre daha fazladır.
- Katmanlar arası temas koşullarındaki idealsizlik derecesi arttıkça Lamb dalgalarının tüm modlarındaki yayılım hızı azalmaktadır. Yanal ve düşey ideal olmayan temas koşulları birlikte bulunduğunda idealsizlik derecesinin Lamb dalgalarının yayılım hızına etkisi daha fazladır.
- Birinci mod Lamb dalgalarının yayılım hızı temas koşullarındaki idealsizlik derecesinden bağımsız olarak yüksek *kH* değerlerinde belirli bir değere yaklaşmaktadır.

Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar akustik yüzey dalga cihazları, transduser, sensör gibi cihazların tasarımında, ultrasonik tahribatsız muayenelerdeki hasar tespiti gibi uygulamalarda yardımcı olarak kullanılabilir. Ayrıca burada ele alınan sistemlerdeki piezoelektrik katmanların alt ve üst yüzeylerinde metal film ile elektrotlandığı durumlarda yüzey ve Lamb dalgalarının yayılımı incelenerek buradaki çalışmalar ilerletilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Rao, S.S. ve Sunar, M., (1994). "Piezoelectricity and its use in disturbance sensing and control of flexible structures: a survey", Applied mechanics reviews, 47(4):113-123.

[2] Cortes, D.H. ve Mukdadi, O.M., (2011). "Resonance frequencies of piezoelectric plates surrounded by solid and fluid half-spaces", Journal of Sound and Vibration, 330(23):5558-5568.

[3] Shen, J., Wang, J., Du, J. ve Huang, D., (2010). "The propagation of Rayleigh waves in layered piezoelectric structures with viscosity", International Frequency Control Symposium, Haziran 2010, 388-391.

[4] Rogers, W.P., (1995). "Elastic property measurement using Rayleigh-Lamb waves", Research in Nondestructive Evaluation, 6(4):185-208.

[5] Kundu, T., Potel, C. ve Belleval, D.J.F., (2001). "Importance of the near Lamb mode imaging of multilayered composite plates", Ultrasonics, 39(4):283-290.

[6] Pant, S., Laliberte, J., Martinez, M. ve Rocha, B., (2014). "Derivation and experimental validation of Lamb wave equations for an n-layered anisotropic composite laminate", Composite Structures, 111:566-579.

[7] Tolstoy, I. ve Usdin, E., (1953). "Dispersive properties of stratified elastic and liquid media: A ray theory", Geophysics, 18(4):844-870.

[8] Achenbach, J.D. ve Epstein, H.I., (1967). "Dynamic interaction of a layer and a half-space", Journal of Engineering Mechanics, 5:27-42.

[9] Eringen, A.C. ve Suhubi, E.S., (1975). Elastodynamics, Volume II, Linear Theory, Academic Press.

[10] Wu, T.T. ve Chang, M.P., (2002). "Surface acoustic waves in layered piezoelectric medium loaded with viscous liquid", Japanese Journal of Applied Physics, 41(8):5451.

[11] Cao, X., Jin, F. ve Kishimoto, K., (2012). "Transverse shear surface wave in a functionally graded material infinite half space", Philosophical Magazine Letters, 92(5):245-253.

[12] Salah, I.B. ve Njeh, A., (2012). "A Theoretical study of Propagation of Rayleigh surface waves in functionally graded piezoelectric (FGPM) half-space", Materials Science and Engineering, 28(1):012047.

[13] Qian, Z.H., Jin, F., Lu, T. ve Kishimoto, K., (2008). "Transverse surface waves in functionally graded piezoelectric materials with exponential variation", Smart Materials and Structures, 17(6):065005.

[14] Jin, F., Qian, Z.H. ve Kishimoto, K., (2008). "Transverse Surface Waves in a Functionally Graded Piezoelectric Half-Space with a Hard Dielectric Layer", China-Japan Joint Microwave Conference, Eylül 2008, 679-683.

[15] Qian, Z., Jin, F., Wang, Z. ve Kishimoto, K., (2007). "Transverse surface waves on a piezoelectric material carrying a functionally graded layer of finite thickness", International Journal of Engineering Science, 45(2):455-466.

[16] Wu, T.T. ve Chen, Y.Y., (2002). "Exact analysis of dispersive SAW devices on ZnO/diamond/Si-layered structures", IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, 49(1):142-149.

[17] Akbarov, S.D. ve Ilhan, N., (2013). "Time-harmonic Lamb's problem for a system comprising a piezoelectric layer and piezoelectric half-plane", Journal of Sound and Vibration, 332(21):5375-5392.

[18] Li, P., Jin, F., Chen, W. ve Yang, J., (2013). "Effects of interface bonding on acoustic wave generation in an elastic body by surface-mounted piezoelectric transducers", IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, 60(9):1957-1963.

[19] Liu, J., Wang, Y. ve Wang, B., (2010). "Propagation of shear horizontal surface waves in a layered piezoelectric half-space with an imperfect interface", IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control, 57(8):1875-1879.

[20] Danoyan, Z., Ghazaryan, K. ve Piliposian, G., (2009). "Surface gap wave propagation in layered electro-magneto-elastic structures", Waves in Random and Complex Media, 19(3):521-534.

[21] Chen, Z.G., Hu, Y.T. ve Yang, J.S., (2008). "Shear horizontal piezoelectric waves in a piezoceramic plate imperfectly bonded to two piezoceramic half-spaces", Journal of Mechanics, 24(03):229-239.

[22] Liu, J.X., Fang, D.N., Wei, W.Y. ve Zhao, X.F., (2008). "Love waves in layered piezoelectric/piezomagnetic structures", Journal of Sound and Vibration, 315(1):146-156.

[23] Sharma, J.N., Sharma, K.K. ve Kumar, A., (2010). "Surface waves in a piezoelectric–semiconductor composite structure", International Journal of Solids and Structures, 47(6):816-826.

[24] Fan, H., Yang, J. ve Xu, L., (2006). "Antiplane piezoelectric surface waves over a ceramic half-space with an imperfectly bonded layer", IEEE Transactions on Ultrasonics Ferroelectrics and Frequency Control, 53(9):1695.

[25] Moroney, R.M., White, R.M. ve Howe, R.T., (1991). "Microtransport induced by ultrasonic Lamb waves", Applied Physics Letters, 59(7):774-776.

[26] Darinskii, A.N. ve Weihnacht, M., (2008). "Acoustic waves guided by a fluid layer on a piezoelectric substrate", Journal of Applied Physics, 104(5):054904.

[27] Pang, Y., Liu, J.X., Wang, Y.S. ve Zhao, X.F., (2008). "Propagation of Rayleigh-type surface waves in a transversely isotropic piezoelectric layer on a piezomagnetic half-space", Journal of Applied Physics, 103(7):074901.

[28] Ezzin, H., Amor, M.B. ve Ghozlen, M.H.B., (2016). "Love waves propagation in a transversely isotropic piezoelectric layer on a piezomagnetic half-space", Ultrasonics, 69:83-89.

[29] Wei, W., Liu, J. ve Fang, D., (2009). "Shear horizontal surface waves in a piezoelectric-piezomagnetic coupled layered half-space", International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 10(6):767-778.

[30] Liu, J.X., Zhao, X.F. ve Soh, A.K., (2007, March). "Shear horizontal waves in a piezoelectric-piezomagnetic tri-material", Engineering Materials, 334:1097-1100.

[31] Gaur, A.M. ve Rana, D.S., (2014). "Shear wave propagation in piezoelectric-piezoelectric composite layered structure", Latin American Journal of Solids and Structures, 11(13):2483-2496.

[32] Zhang, S., Gu, B., Zhang, H., Feng, X. Q., Pan, R. ve Hu, N., (2016). "Propagation of Love waves with surface effects in an electrically-shorted piezoelectric nanofilm on a half-space elastic substrate", Ultrasonics, 66:65-71.

[33] Manna, S., Kundu, S. ve Gupta, S., (2015). "Love wave propagation in a piezoelectric layer overlying in an inhomogeneous elastic half-space", Journal of Vibration and Control, 21(13):2553-2568.

[34] Kong, Y., Liu, J. ve Nie, G., (2015). "Propagation characteristics of SH wave in an mm2 piezoelectric layer on an elastic substrate", AIP Advances, 5(9):097135.

[35] Singh, A.K., Kumar, S. ve Chattopadhyay, A., (2015). "Love-type wave propagation in a piezoelectric structure with irregularity", International Journal of Engineering Science, 89:35-60.

[36] Li, P., Jin, F. ve Lu, T.J., (2012). "A three-layer structure model for the effect of a soft middle layer on Love waves propagating in layered piezoelectric systems", Acta Mechanica Sinica, 28(4):1087-1097.

[37] Piliposian, G.T. ve Danoyan, Z.N., (2009). "Surface electro-elastic Love waves in a layered structure with a piezoelectric substrate and two isotropic layers", International Journal of Solids and Structures, 46(6):1345-1353.

[38] Qian, Z., Jin, F. ve Hirose, S., (2010). "A novel type of transverse surface wave propagating in a layered structure consisting of a piezoelectric layer attached to an elastic half-space", Acta Mechanica Sinica, 26(3):417-423.

[39] Jin, J., Wang, Q. ve Quek, S.T., (2002). "Lamb wave propagation in a metallic semi-infinite medium covered with piezoelectric layer", International journal of solids and structures, 39(9):2547-2556.

[40] Akbarov, S.D. ve Ozisik, M., (2003). "The influence of the third order elastic constants to the generalized Rayleigh wave dispersion in a pre-stressed stratified half-plane", International Journal of Engineering Science, 41(17):2047-2061.

[41] Simionescu P., O. ve Ana, I., (2016). "Propagation of TH-waves in a pre-stressed layered formation", Mechanics of Advanced Materials and Structures, 23(6):624-630.

[42] Qian, Z. H., Jin, F., Kishimoto, K. ve Lu, T., (2009). "Propagation behavior of Love waves in a functionally graded half-space with initial stress", International Journal of Solids and Structures, 46(6):1354-1361.

[43] Qian, Z.H., Jin, F., Lu, T., Kishimoto, K. ve Hirose, S., (2010). "Effect of initial stress on Love waves in a piezoelectric structure carrying a functionally graded material layer", Ultrasonics, 50(1):84-90.

[44] Akbarov, S.D., Ilhan, N. ve Koc, N., (2015). "Time-Harmonic Lamb Problem for a System Consisting of a Prestressed Piezoelectric Covering Layer and a Prestressed Half-Plane", Mechanics of Composite Materials, 51(4):427-436.

[45] Wang, Y.Z., Li, F.M. ve Kishimoto, K., (2011). "Effects of the initial stress on the propagation and localization properties of Rayleigh waves in randomly disordered layered piezoelectric phononic crystals", Acta Mechanica, 216:291-300.

[46] Singh, B., (2010). "Wave propagation in a prestressed piezoelectric half-space", Acta Mechanica, 211:337-344.

[47] Gupta, S., Kundu, S. ve Vishwakarma, S.K., (2015). "Propagation of torsional surface waves in an inhomogeneous layer over an initially stressed inhomogeneous half-space", Journal of Vibration and Control, 21(7):1286-1298.

[48] Kundu, S., Gupta, S., Vaishnav, P.K. ve Manna, S., (2016). "Propagation of Love waves in a heterogeneous medium over an inhomogeneous half-space under the effect of point source", Journal of Vibration and Control, 22(5):1380-1391.

[49] Singh, A.K., Das, A., Parween, Z. ve Chattopadhyay, A., (2015). "Influence of initial stress, irregularity and heterogeneity on Love-type wave propagation in double pre-stressed irregular layers lying over a pre-stressed half-space", Journal of Earth System Science, 124(7):1457-1474.

[50] Chatterjee, M., Dhua, S., Chattopadhyay, A. ve Sahu, S.A., (2016). "Seismic waves in heterogeneous crust-mantle layers under initial stresses", Journal of Earthquake Engineering, 20(1):39-61.

[51] Gupta, S., Majhi, D.K., Kundu, S. ve Vishwakarma, S.K., (2013). "Propagation of Love waves in non-homogeneous substratum over initially stressed heterogeneous half-space", Applied Mathematics and Mechanics, 34(2):249-258.

[52] Shekhar, S. ve Parvez, I.A., (2016). "Propagation of Torsional surface waves in an inhomogeneous anisotropic fluid saturated porous layered half space under initial stress with varying properties", Applied Mathematical Modelling, 40(2):1300-1314.

[53] Kundu, S., Gupta, S. ve Manna, S., (2014). "Propagation of Love wave in fiber-reinforced medium lying over an initially stressed orthotropic

half-space", International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 38(11):1172-1182.

[54] Kakar, R. ve Kakar, S., (2016). "SH-wave in a piezomagnetic layer overlying an initially stressed orthotropic half-space", Smart Structures and Systems, 17(2):327-345.

[55] Singh, A. K., Kumar, S. ve Chattopadhyay, A., (2015). "Propagation of torsional waves in a fiber composite layer lying over an initially stressed viscoelastic half-space", International Journal of Geomechanics, 16(1):04015014.

[56] Chattaraj, R., Samal, S.K. ve Debasis, S., (2014). "Dispersion of torsional surface waves in anisotropic layer over porous half space under gravity", Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 94(12):1017-1025.

[57] Pal, J. ve Ghorai, A.P., (2015). "Propagation of love wave in sandy layer under initial stress above anisotropic porous half-space under gravity", Transport in Porous Media, 109(2):297-316.

[58] Chattaraj, R., Samal, S.K. ve Debasis, S., (2015). "On torsional surface wave in dry sandy crust laid over an inhomogeneous half space", Meccanica, 50(7):1807-1816.

[59] Negin, M., Akbarov, S.D. ve Erguven, M.E., (2014). "Generalized Rayleigh wave dispersion analysis in a pre-stressed elastic stratified half-space with imperfectly bonded interfaces", Computers Materials & Continua, 42(1):25-61.

[60] Orellana, J.M. ve Collet, B., (2000). "Propagation of guided waves in stratified piezoelectric structures", Mechanics of Electromagnetic Materials and Structures, 19:124-137.

[61] Yang, J.S. ve Zhou, H.G., (2005). "Wave propagation in a piezoelectric ceramic plate sandwiched between two semiconductor layers", International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics, 22:97-109.

[62] Zinchuk, L.P. ve Levchenko, V.V., (2008). "Acoustoelectric shear body waves in periodically layered metallized piezodielectric media", International Applied Mechanics, 44(7):769-774.

[63] Pan, E. ve Heyliger, P.R., (2002). "Free vibrations of simply supported and multilayered magneto-electro-elastic plates", Journal of Sound and Vibration, 252(3):429-442.

[64] Hladky, H.A.C., Vasseur, J., Dubus, B., Morvan, B., Wilkie, C.N. ve Martinez, L., (2013). "Analysis of signals propagating in a phononic crystal PZT layer deposited on a silicon substrate", IEEE transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, 60(12):2607-2614.

[65] Zhu, F., Qian, Z.H. ve Wang, B., (2016). "Wave propagation in piezoelectric layered structures of film bulk acoustic resonators", Ultrasonics, 67:105-111.

[66] Saroj, P.K., Sahu, S.A., Chaudhary, S. ve Chattopadhyay, A., (2015). "Love-type waves in functionally graded piezoelectric material (FGPM) sandwiched between initially stressed layer and elastic substrate", Waves in Random and Complex Media, 25(4):608-627.

[67] Kakar, R., (2015). “Dispersion of Love wave in an isotropic layer sandwiched between orthotropic and prestressed inhomogeneous half-spaces”, Latin American Journal of Solids and Structures, 12(10):1934-1949.

[68] Chattaraj, R., Samal, S.K. ve Mahanti, N.C., (2012). “Dispersion of Love wave propagating in irregular anisotropic porous stratum under initial stress”, International Journal of Geomechanics, 13(4):402-408.

[69] Sultana, R. ve Gupta, S., (2015). “Study of SH-type wave propagating in an anisotropic layer sandwiched between an orthotropic medium and an in-homogeneous half-space”, Journal of Physics, 662(1):012002.

[70] Castaings, M. ve Hosten, B., (2003). “Guided waves propagating in sandwich structures made of anisotropic, viscoelastic, composite materials”, The Journal of the Acoustical Society of America, 113(5):2622-2634.

[71] Zamanov, A.D. ve Agasiyev, E.R., (2011). “Dispersion of lamb waves in a three-layer plate made from compressible materials with finite initial deformations”, Mechanics of Composite Materials, 46(6):583-592.

[72] Akbarov, S.D., Zamanov, A.D. ve Agasiyev, E.R., (2008). “On the propagation of Lamb waves in a sandwich plate made of compressible materials with finite initial strains”, Mechanics of Composite Materials, 44(2):155-164.

[73] Akbarov, S.D., Agasiyev, E.R. ve Zamanov, A.D., (2011). “Wave propagation in a pre-strained compressible elastic sandwich plate”, European Journal of Mechanics-A/Solids, 30(3):409-422.

[74] Akbarov, S.D., Kurt, I. ve Sezer, S., (2013). “Ön Gerilmeli Piezoelektrik Örtü Tabakası ve Ön Gerilmeli Elastik Yarı Düzlemden Oluşan Sistemde Genelleştirilmiş Rayleigh Dalgalarının Dispersiyonu”, XVIII. Ulusal Mekanik Kongresi, 26-30 Ağustos 2013, Manisa, 21-29.

[75] Akbarov, S.D., Kurt, I. ve Sezer, S., (2014). “Dispersion of the near-surface waves in a system consisting of a pre-stressed piezoelectric covering layer and a pre-stressed metallic half-plane”, XVIII International Conference on Mechanics of Composite Materials, 2-6 Haziran 2014, Riga.

[76] Akbarov, S., (2015). Dynamics of pre-strained bi-material elastic systems: Linearized Three-Dimensional Approach, Springer.

[77] Kurt, I., Akbarov, S.D. ve Sezer, S., (2016). “Effect of Uniaxial Initial Stresses, Piezoelectricity and Third Order Elastic Constants on the Near-Surface Waves in a Stratified Half-Plane”, International Conference on Advances in Mechanical Engineering, 11-13 May 2016, Istanbul, 737-744.

[78] Yang, J., (2004). An introduction to the theory of piezoelectricity, (Vol. 9), Springer Science & Business Media.

[79] Murnaghan, F.D., (1952). Finite deformation of an elastic solid, Wiley, New York.

[80] Guz, A.N. ve Makhort, F.G., (2000). “The physical fundamentals of the ultrasonic nondestructive stress analysis of solids”, International Applied Mechanics, 36(9):1119-1149.

[81] Guz, A.N., (2004). Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses, A.C.K. (Rusça)

[82] Kurt, I., Akbarov, S.D. ve Sezer, S., (2016). "Lamb wave dispersion in a PZT/metal/PZT sandwich plate with imperfect interface", Waves in Random and Complex Media, 26(3):301-327.

[83] Kurt, I., Akbarov, S.D. ve Sezer, S., (2016). "The influence of the initial stresses on Lamb wave dispersion in pre-stressed PZT/Metal/PZT sandwich plates", Structural Engineering and Mechanics, 58(2):347-378.

[84] Martin, P.A., (1992). "Boundary integral equations for the scattering of elastic waves by elastic inclusions with thin interface layers", Journal of Nondestructive Evaluation, 11(3-4):167-174.

[85] Rokhlin, S.I. ve Wang, Y.J., (1991). "Analysis of boundary conditions for elastic wave interaction with an interface between two solids", The Journal of the Acoustical Society of America, 89(2):503-515.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : İlkay KURT

Doğum Tarihi ve Yeri : 31.10.1984 / İstanbul

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : ikurt@yildiz.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Y. Lisans	Makine Teorisi ve Kontrol	Yıldız Teknik Üniversitesi	2010
Lisans	Makine Mühendisliği	Yıldız Teknik Üniversitesi	2008
Lise	Sayısal	Özel Çınar Lisesi	2002

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	**Firma/Kurum**	**Görevi**
2009-Devam	Yıldız Teknik Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

YAYINLARI

Makale

1. Kurt, I., Akbarov, S.D. ve Sezer, S., (2016). “Lamb wave dispersion in a PZT/metal/PZT sandwich plate with imperfect interface”, Waves in Random and Complex Media, 26(3):301-327.

2. Kurt, I., Akbarov, S.D. ve Sezer, S., (2016). “The influence of the initial stresses on Lamb wave dispersion in pre-stressed PZT/Metal/PZT sandwich plates”, Structural Engineering and Mechanics, 58(2):347-378.

Bildiri

1. Kurt, I., Akbarov, S.D. ve Sezer, S., (2016). “Effect of Uniaxial Initial Stresses, Piezoelectricity and Third Order Elastic Constants on the Near-Surface Waves in a Stratified Half-Plane”, International Conference on Advances in Mechanical Engineering, 11-13 May 2016, Istanbul, 737-744.

2. Akbarov, S.D., Kurt, I. ve Sezer, S., (2014). “Dispersion of the near-surface waves in a system consisting of a pre-stressed piezoelectric covering layer and a pre-stressed metallic half-plane”, XVIII International Conference on Mechanics of Composite Materials, 2-6 Haziran 2014, Riga, 23.

3. Akbarov, S.D., Kurt, I. ve Sezer, S., (2013). “Ön Gerilmeli Piezoelektrik Örtü Tabakası ve Ön Gerilmeli Elastik Yarı Düzlemden Oluşan Sistemde Genelleştirilmiş Rayleigh Dalgalarının Dispersiyonu”, XVIII. Ulusal Mekanik Kongresi, 26-30 Ağustos 2013, Manisa, 21-29.

4. Sezer, S., Kesici, C. ve Kurt, I., (2013). “Modeling a Car with Linear Graph Method and Control with Fuzzy Logic”, 7th International Advanced Technologies Symposium, 30 October-1 November 2013, Istanbul, 631-635.

Proje

1. Sezer, S. (Yürütücü), Gülez, K., Demir C., Çetin, Ş., Aydos, O. ve Kurt, I., (2012). "Plak ve Çubuk Sistemleri Üzerinde Akıllı Malzemeler Yardımıyla Aktif Titreşim Kontrolü", Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü, Proje No: 29–06–01–03.