BÖLÜM II

Deltasal çekirdek terimi ünlü İngiliz fizikçisi, Nobel ödülü sahibi Pol Dirac'ın δ-fonksiyonu ile ilgilidir. 1924 yılında Dirac teorik fizik çalışmalarında şöyle bir δ-fonksiyonu kullanmıştır.

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & , x \neq 0 \\ \infty & , x = 0 \end{cases}$$

ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1$$

Tabii ki matematik bakımından bu tür bir fonksiyonun tanımı anlamsızdır. Çünkü bir noktanın dışında özdeş olarak sıfır olan bir fonksiyonun integrali de sıfırdır. Bu nedenle bu fonksiyon başlangıçta önemsenmemiştir. Fakat Dirac, δ-fonksiyonunun yardımı ile kuantum mekaniğinde o kadar önemli sonuçlar elde edilmiştir ki, bunları göz ardı etmek imkânsızdı. En önemlisi ise Dirac'ın sonuçlarında δ-fonksiyonu yer almıyordu. Sadece ana işlemlerde kullanılıyordu.

Daha sonraki yıllarda matematikçiler, Dirac'ın δ-fonksiyonuna anlam vererek, δ-fonksiyonunun aslında bir fonksiyon değil bir fonksiyonel olduğunu gösterdiler.

Tüm bu çalışmaların sonucunda genelleşmiş fonksiyonlar teorisi ortaya çıkmıştır ve temelinde δ-fonksiyonu yatmaktadır. Tanıma göre genelleşmiş fonksiyonlar, Dirac'ın fonksiyonu gibi aslında fonksiyon olmayan ve fonksiyonları barındıran iyi tanımlı fonksiyonellerdir.

Bu tür fonksiyonlar, integral denklemlerin çekirdeği olarak ele alınıp bunlara Deltasal Çekirdekler denilecektir.

2-1 POİSSON ÇEKİRDEĞİ

Bilindiği gibi birim dairede Dirichlet Problemi şu şekilde konulur:

Birim dairede harmonik, yani Laplace denklemini sağlayan ve dairenin sınırında sürekli bir u fonksiyonu bulmaktır. Bu problemin çözümü;

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2} u(e^{it})\, dt \qquad , \qquad 0 < r < 1$$

şeklindedir.

Öncelikle bu çözümü elde edelim.

TEOREM: (POİSSON FORMÜLÜ)

u fonksiyonu C çemberinin üzerinde sürekli ve dairenin içinde harmonik olsun. C çemberi üzerindeki bir nokta $w = Re^{i\phi}$ ve daire içindeki bir noktada $z = re^{i\theta}$ ise

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \frac{(R^2-r^2)u(R,\phi)\, d\phi}{R^2-2Rr\cos(\phi-\theta)+r^2} \;\; dir.$$

İSPAT: C çemberinin dışında ve $|z_1| \cdot |z| = R^2$ koşulunu sağlayan bir z_1 noktası seçelim. Bu durumda

$$z_1 = \frac{R^2 e^{i\theta}}{r} \;\; dir.$$

Çünkü;

$$|z_1| = \frac{R^2}{r} \;\; dir.$$

z_1 ve z aynı doğru üzerinde olarak seçildiklerinden

$$z_1 = \frac{R^2}{r} e^{i\theta} \quad olur.$$

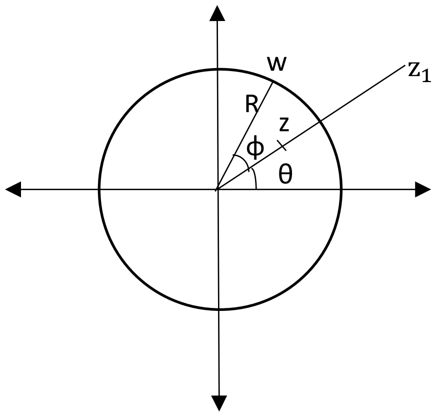
O halde;

$$z_1 = \frac{R^2 e^{i\theta}}{r} = \frac{R^2}{re^{-i\theta}} = \frac{w \cdot \bar{w}}{\bar{z}}$$

yazılır.

z_1 noktası C çemberinin dışında olduğundan

$$u(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{u(w)}{w - z_1} dw = 0 \quad \text{dır.}$$



C çemberinin içindeki bir z noktası için

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{u(w)}{w - z} dw \quad dir.$$

Eğer $u(z) = u(z) - u(z_1)$ *yazarsak*;

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\frac{w}{w - z} - \frac{w}{w - z_1} \right) u(w)\, dw$$

eşitliğini yazabiliriz. Ayrıca;

$$\frac{w}{w - z} - \frac{w}{w - z_1} = \frac{w}{w - z} - \frac{w}{w - \frac{w \cdot \overline{w}}{\overline{z}}}$$

$$= \frac{w}{w - z} + \frac{\overline{z}}{\overline{w} - \overline{z}}$$

$$= \frac{w\overline{w} - w\overline{z} + w\overline{z} - z\overline{z}}{w\overline{w} - w\overline{z} - z\overline{w} + z\overline{z}}$$

$$= \frac{R^2 - r^2}{|w - z|^2} \quad dir.$$

Bu değer integralde yazılırsa;

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c} \frac{R^2 - r^2}{|w - z|^2} u(w)\, dw \qquad olur.$$

Kutupsal koordinatlara geçilirse;

$$w = R \cdot e^{i\phi}$$

$$dw = i\, Re^{i\phi}\, d\phi$$

$$dw = iwd\phi \quad \text{olur.}$$

O halde;

$$u\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)u(R \cdot \emptyset)\, d\phi}{R^2 - 2Rr\cos(\phi - \theta) + r^2} \quad eşitliği\ bulunur.$$

Özel olarak R=1 alınırsa;

$$u\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \frac{(1 - r^2)u\left(e^{it}\right)}{1 - 2r\cos(t - \theta) + r^2} dt \qquad (2.1)$$

formülü elde edilmiş olur.

Bu ifadede

$$P_r(\theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2\cos\theta + r^2}$$

ifadesine Poisson Çekirdeği denir. Açıkça bu çekirdek θ değişkenine göre 2π periyotludur ve çifttir. Ayrıca,

$$1 - 2r\cos\theta + r^2 = 1 - 2r + r^2 + 2r - 2r\cos\theta$$

$$= (1 - r)^2 + 4r\sin^2\frac{\theta}{2}$$

eşitlliği Poisson çekirdeğinin negatif olmadığını gösterir.

(2.1) formülünde u=1 alınırsa;

$$\int_{0}^{2\pi} P_r(\theta)\, d\theta = 1 \quad \text{dir.}$$

Şimdi $P_r(\theta)$ 'nın bazı durumlarını inceleyelim.

$\theta \neq 0$ ise

$$\lim_{r\to 1} P_r(\theta) = \lim_{r\to 1} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2} = 0 \ \ d\imath r.$$

$\theta = 0$ ise

$$\lim_{r\to 1} P_r(\theta) = \lim_{r\to 1} \frac{1-r^2}{(1-r)^2} = \infty \quad \text{dır.}$$

Dolayısıyla;

$$\int_{0}^{2\pi} P_r(\theta)\, d\theta = 1 \qquad \forall r \in (0,1)$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{r\to 1} P_r(\theta) = 0 \ , & \theta \neq 0 \\ \lim\limits_{r\to 1} P_r(\theta) = \infty \ , & \theta = 0 \end{cases}$$

dir ve bu ise $P_r(\theta)$'nın bir Deltasal Çekirdek olduğunu gösterir.

2-2 ABEL POİSSON ÇEKİRDEĞİ

Üst yar düzlem için Dirichlet probleminin çözümü;

$$f_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\varepsilon^2 + (t-x)^2} dt \quad , \qquad \varepsilon > 0 \quad (2.2)$$

biçimindeki bir integral ile verilmektedir.

TEOREM: Üst yarı düzlemde harmonik ve reel eksen üzerinde sürekli bir fonksiyon bulunması

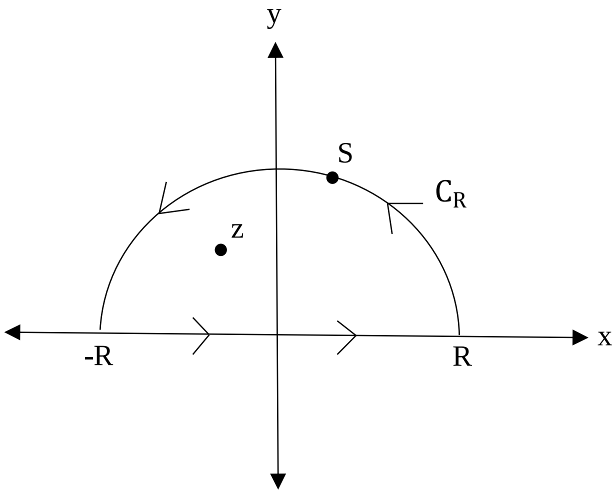
$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yf(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt \qquad (2.3)$$

integrali ile verilir.

<u>İSPAT:</u> $f(z)$ fonksiyonu $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ bölgesinde analitik olsun ve k, M pozitif sabitleri için

$$\left|z^k f(z)\right| < M$$

koşulunu sağlasın. Burada $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ dir.



Bu çevrenin yardımıyla Cauchy İntegral formülünden;

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_R} \frac{f(s)}{s-z} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^{R} \frac{f(t)}{t-z} dt \qquad dir.$$

$$|f(s)| < \frac{M}{R^k}$$

olduğundan eşitliğin ikinci tarafının ilk ifadesi $R \to \infty$ için sıfır olacaktır.

O halde;

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t - z} dt \quad , \qquad \operatorname{Im} z > 0 \ \text{dır.}$$

$z = x + iy$ ise $\bar{z} = x - iy$ dir. Yani $\bar{z}$ noktası alt yarı düzlemdedir. c herhangi bir sabit iken;

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t - z} + \frac{c}{t - \bar{z}} \right) f(t)\, dt \qquad (2.4)$$

yazabiliriz. Çünkü

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t - \bar{z}} dt = 0 \quad \text{dır.}$$

(2.4) eşitliği düzenlenirse;

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{t - \bar{z} + ct - cz}{(t - z)(t - \bar{z})} \right) f(t)\, dt$$

olur.

Eğer c=-1 alınırsa;

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t - \bar{z} - t + z)}{|t - z|^2} f(t)\, dt$$