

## Lineer Bağımlılık-Lineer Bağımsızlık

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$  m adet vektör,  $C_1, C_2, \dots, C_m$  m adet skaler olsun.

$$C_1\vec{v}_1 + C_2\vec{v}_2 + \dots + C_m\vec{v}_m = \vec{0} \quad (1)$$

Eşitliği ancak ve ancak  $C_i \equiv 0$  ( $i=1,2,\dots,m$ ) için sağlanıyorsa  $\vec{v}_m$  vektörleri kendi arasında lineer bağımsızdır veya  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$  vektör kümesi elemanları kendi arasında lineer bağımsızdır denir. (1) denklemini sağlayan en az bir tane katsayı ( $\exists C_i \neq 0$ ) sıfırdan farklı bulunabiliyorsa, bir vektör diğerleri cinsinden yazılabilir anlamına gelir. Dolayısıyla  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$  vektör kümesi elemanları kendi arasında lineer bağımlıdır.

**Örnek:**  $\vec{v}_1 = (1,1,1)$ ,  $\vec{v}_2 = (1,2,1)$ ,  $\vec{v}_3 = (1,0,-2)$  vektörleri lineer bağımlı mıdır, gösteriniz.

$C_1, C_2, C_3$  skaler için  $C_1\vec{v}_1 + C_2\vec{v}_2 + C_3\vec{v}_3 = \vec{0}$  eşitliği hangi sabitlerin hangi değerleri için sağlanmaktadır, inceleyelim.

$$C_1(1,1,1) + C_2(1,2,1) + C_3(1,0,-2) = (0,0,0) \text{ için,}$$

$$\begin{array}{l} C_1 + C_2 + C_3 = 0 \\ C_1 + 2C_2 = 0 \\ C_1 + C_2 - 2C_3 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \text{ olduğu için lineer bağımsızdır. Katsayılara göre}$$

bulunan lineer denklem sisteminin aşikar çözümden başka çözümü yoktur. Dolayısıyla,  $C_1\vec{v}_1 + C_2\vec{v}_2 + C_3\vec{v}_3 = \vec{0}$  denklemi ancak  $C_1 = C_2 = C_3 = 0$  için sağlanır.

**Tanım:**  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$  m adet vektör,  $C_1, C_2, \dots, C_m$  m adet skaler olsun.

$$\vec{v} = C_1\vec{v}_1 + C_2\vec{v}_2 + \dots + C_m\vec{v}_m$$

şeklinde ifade edilebilirse  $\vec{v}$  vektörü,  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$  vektörlerinin bir lineer kombinasyonu olarak yazılır denir.

**Teorem:**  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$  lineer bağımlı m adet vektör olsun. Bu vektörlerden bazıları diğer (m-1) adet vektörün lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilir.

**Teorem:**  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$  m adet lineer bağımsız vektör olsun. Eğer,  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m, \vec{v}_{m+1}$  vektörleri lineer bağımlı ise  $\vec{v}_{m+1}$  vektörü,  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$  vektörlerinin lineer kombinasyonu olarak yazılabilir.

**Teorem:**  $n < m$  olmak üzere  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$  vektörlerinden  $n$  tanesi lineer bağımlı ise  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$  vektörleri de lineer bağımlıdır.

**Teorem:**  $n$  boyutlu uzayda  $m$  tane vektör,

$$\vec{v}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \vec{v}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, \vec{v}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}) \text{ olsun.}$$

Verilen vektörlerin bileşenlerinden oluşturulan ve aşağıda verilen  $A$  matrisi için,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisinin rangı  $r$  ise;

- i. Verilen  $m$  vektörden  $r$  tanesi lineer bağımsızdır.
- ii.  $r < m$  ise geriye kalan  $m - r$  vektörün her biri bu  $r$  vektörün lineer kombinezonu şeklinde yazılabilir.
- iii.  $n = m$  ise verilen  $m$  vektörün lineer bağımsız olması için gerek ve yeter koşul  $\det(A) \neq 0$  dır.
- iv.  $r < m$  ise verilen  $m$  vektörden  $m - r$  tanesi lineer bağımlıdır. Böylece  $r < m$  için verilen  $m$  vektör lineer bağımlı olur.

**Not:** Satırları,  $n$  bileşenli  $m$  adet vektörün bileşenleri olan bir matris yazılır. Bu matrisin rangı hesaplanır. Eğer rang  $r$  ise  $r \times r$  mertebeden determinantı sıfırdan farklı bir alt kare matris mevcuttur ve bu alt kare matrisi oluşturan  $r$  vektör lineer bağımsızdır. Geriye kalan  $m - r$  tane vektör, lineer bağımsız  $r$  adet vektörün bir lineer kombinezonu şeklinde ifade edilebilir.

**Örnek:**  $\vec{a} = (1, 0, -3), \vec{b} = (1, 0, 0), \vec{c} = (0, 0, 1), \vec{d} = (1, -1, 0)$  vektörleri lineer bağımlı/bağımsız mıdır? rang yardımıyla gösteriniz.

Verilen vektörlerin elemanlarından oluşan matris ve elementer işlemler ( $H_{21}(-1), H_{24}(-1), H_{21}, H_4(-1), H_{24}, H_{34}(3)$ ) yardımıyla denk matris aşağıdaki gibi bulunur.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Satır sayısı  $m=4$ , sütun sayısı  $n=3$  ve rang için  $r_A = 3 < m$  bulunur. Dolayısıyla 4 vektörden 3 tanesi lineer bağımsızdır. Buna göre verilen vektörlerden 3'erli gruplardan oluşturulan ve  $A$

matrisinin alt matrisinin determinanti sıfırdan farklı vektörler belirlenecektir. Öncelikle  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  ve  $\vec{c}$  vektörleri yardımıyla,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ için } |A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ dolayısıyla } \vec{a}, \vec{b} \text{ ve } \vec{c} \text{ vektörleri lineer bağımlıdır.}$$

$\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  ve  $\vec{d}$  vektörleri yardımıyla,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ için } |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \text{ için } \vec{a}, \vec{b} \text{ ve } \vec{d} \text{ vektörleri lineer bağımsızdır}$$

ve  $\vec{c} = C_1\vec{a} + C_2\vec{b} + C_3\vec{d}$  (burada  $C_i, (i=1,2,3)$  sabit) şeklinde lineer kombinezonu olarak yazılabilir. Bu eşitlikten  $C_1 = -1/3$ ,  $C_2 = 1/3$  ve  $C_3 = 0$  bulunur.

**Örnek:**  $\vec{a} = (2,3,1,-1)$ ,  $\vec{b} = (2,3,1,-2)$ , ve  $\vec{c} = (4,6,2,-3)$  verilen vektörlerin lineer bağımlı olduğunu gösteriniz.

Vektörlerin elemanlarından oluşan matris için elementer işlemler yardımıyla,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & 6 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ için } r_A = 2 < m = 3 \text{ olduğu için 3 vektörden 2 tanesi}$$

lineer bağımsızdır. Çünkü A matrisinin alt matrislerinden determinanti sıfırdan farklı en büyük alt matrisinin boyutu rangı verir. Dolayısıyla

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \text{ için } r_A = 2 \text{ olarak bulunur. Buradan birbirinden lineer bağımsız vektör}$$

sayısının 2 olduğu anlaşılır. Hangi iki vektörün lineer bağımsız olduğu A matrisinden elde edilen indirgenmiş sistem göz önüne alınırsa, ilk iki satır elemanlarına sahip iki vektörün olduğu görülür.

Ne alınırsa  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  vektörlerinin lineer bağımsız olduğu ve diğer üçüncü vektörün bu iki vektörün lineer kombinezonu olarak yazılabildiği görülür.

$$C_1\vec{a} + C_2\vec{b} + C_3\vec{c} = \vec{0} \text{ için } C_1 + C_3 = 0; C_2 + C_3 = 0 \text{ olur. Buradan } C_3 = 1 \text{ alınırsa,}$$

$$C_1 = C_2 = -1 \text{ olur. } \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \text{ bulunur.}$$

**Örnek:**  $\vec{a} = (2, 0, 0)$ ,  $\vec{b} = (4, 0, -6)$ ,  $\vec{c} = (0, 2, 0)$  ve  $\vec{d} = (0, 0, 2)$  vektörleri lineer bağımlı ise bunların aralarında lineer bağımsız vektörleri belirleyerek, geriye kalan vektörleri bu vektörlerin lineer kombinasyonu olarak yazınız.

**Örnek:**  $\vec{a} = (3, -1, 7)$ ,  $\vec{b} = (0, 2, 4)$ , ve  $\vec{c} = (1, 0, 3)$  vektörlerinin lineer bağımlılığını belirleyiniz. Bu vektörler lineer bağımlı ise aralarındaki ilişkiyi belirleyiniz.

### Özdeğer ve Özvektör

$Ax = \lambda x$  eşitliğinde A bir kare matris, x vektör ve  $\lambda$  bir skalerdir.  $Ax = \lambda x$  ifadesi  $(A - \lambda I)x = 0$  şeklinde de verilebilir. Bu eşitliklerin açık hali

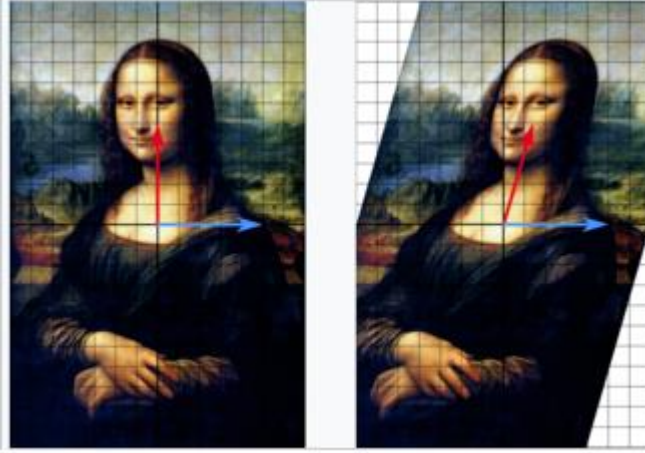
$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

dir.  $|A - \lambda I|$  determinantı açılırsa  $\lambda$  göre n. dereceden bir polinom elde edilir. Bu polinoma A matrisinin karakteristik polinomu ve  $|A - \lambda I| = 0$  denkleminde A matrisinin karakteristik denklemi denir. Karakteristik denklem,

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

şeklinde bir polinomdur. Genel olarak  $Ax = \lambda x$  veya  $(A - \lambda I)x = 0$  şeklinde modellenen problemlere özdeğer problemleri denir.

$Ax$  ifadesi x vektörlerine ait bir dönüşüm tanımlar. Dolayısıyla,  $Ax = \lambda x$  eşitliğini bu açıdan yorumlarsak; bu dönüşüm için öyle bir x vektörü vardır ki, Ax ile elde edilen dönüşüm vektörü, alınan x vektörünün skaler ( $\lambda$ ) katına eşit olur. İşte bu skalere özdeğer ve x vektörüne de özvektör adı verilmektedir. Örneğin 2 boyutlu düzlemde aşağıda verilen şekil üzerinde gösterilen kırmızı ve mavi vektörleri ele alalım. Mavi renkli vektör hariç diğer tüm vektörlerin (kırmızı gibi) alınan A matrisi ile çarpımı sonucu elde edilen dönüşüm vektörleri şeklin görüntüsünü deforme ettiği, oysa mavi renkli vektörün bu dönüşüm matrisi ile işlemi sonucu, o doğrultuda sadece boy değişimi olduğu söylenebilir. Yani burada mavi vektör özvektör dur.



**Ax dönüşümü ile  $x$  vektörünün hem büyüklüğü, hemde yönü değişebilir.** Buna rağmen, bir matris bazı belirli vektörler üzerine etkideğinde onların sadece büyüklüğünü değiştirir, doğrultularını değiştirmez (ancak vektörün yönü ters çevrilebilir). Doğrultusu değişmeyen bu vektörler söz konusu matrisin **özvektörleri** olarak adlandırılır. Bir matris, bir özvektörü üzerine etkideğinde onun büyüklüğünü bir çarpan kadar katlar. Bu çarpan pozitif ise vektörün yönü değişmeden kalır, negatif ise vektörün yönü tersine döner (her iki durumda da vektörün doğrultusu değişmez). Bu çarpmana, söz konusu özvektöre ilişkin **özdeğer** denir

**Örnek:** Aşağıdaki eşitliği sağlayan özdeğerleri bulunuz.

$$\Rightarrow |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 5 \\ -2 & -4-\lambda & -3 \\ 3 & 6 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda - 18 = 0$$

için  $\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda - 18 = 0$  denklemin kökleri  $\lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = \frac{-5 \mp i\sqrt{11}}{2}$  bulunur.

**Tanım:** Bir  $A$  kare matrisi ve  $\lambda$ ,  $A$  matrisinin bir özdeğeri olmak üzere  $A\lambda = \lambda x$  denklemini sağlayan  $x$  vektörüne  $\lambda$  özdeğerine karşılık gelen özvektör yada karakteristik vektörü denir.

**Örnek:**  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$  matrisine ait özdeğer ve özvektörleri bulunuz.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ için karakteristik denklem: } (3-\lambda)(-2-\lambda) - 6 = 0 \text{ ve kökler}$$

$$\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 4 \text{ bulunur.}$$

$$\lambda = \lambda_1 = -3 \text{ için}$$

$$(A - \lambda_1 I)x = \begin{pmatrix} 3-(-3) & 2 \\ 3 & -2-(-3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \text{ için } \begin{cases} 6x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \text{ için } x_2 = -3x_1 \text{ bulunur.}$$

Dolayısıyla  $x_1$  parametre kabul edilirse ve bu parametrenin değeri örneğin  $x_1 = 1$  seçilirse,

$x_2 = -3$  olur. Buradan  $\lambda = \lambda_1 = -3$  özdeğerine ait özvektör  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$  bulunur veya genel

olarak  $x_1 = c = \text{sbt.}$ ,  $x_2 = -3c$  ve  $x = \begin{pmatrix} c \\ -3c \end{pmatrix}$  olur.

$\lambda = \lambda_2 = 4$  için

$$(A - \lambda_2 I)x = \begin{pmatrix} 3-(4) & 2 \\ 3 & -2-(4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{için} \quad \begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{için} \quad x_2 = x_1/2 \quad \text{bulunur.}$$

Dolayısıyla  $x_1$  parametre kabul edilirse ve bu parametrenin değeri örneğin  $x_1 = t = sbt$  seçilirse,

$$x_2 = t/2 \text{ olur. Buradan } \lambda = \lambda_2 = 4 \text{ özdeğerine ait özvektör } x = \begin{pmatrix} t \\ t/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bulunur.}$$

**Örnek:**  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$  matrisine ait özdeğer ve özvektörleri bulunuz.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -1 \text{ bulunur.}$$

Buradan  $\lambda = \lambda_1 = 2$  özdeğerine ait özvektör  $x = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$  ve  $\lambda = \lambda_2 = -1$  özdeğerine ait özvektör

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bulunur.}$$

Özdeğerleri içeren D matrisi ve özvektörleri içeren P matrisi:  $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  ve  $P = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

yazalım. Bu matrisler için

$A = PDP^{-1}$  (veya tersine  $D = P^{-1}AP$ ) ve  $A^k = PD^kP^{-1}$  olduğunu gösteriniz.

**Örnek:**  $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$  matrisine ait özdeğer ve özvektörleri bulunuz.

$$|B - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 2 \\ 4 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ buradan } \lambda_1 = 10, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 1 \text{ (katlı kök) bulunur.}$$

$\lambda_1 = 10$  için özvektör,

$$\begin{pmatrix} 5-10 & 4 & 2 \\ 4 & 5-10 & 2 \\ 2 & 2 & 2-10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \text{ veya } \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \text{ için}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 &\Rightarrow x_1 = -x_2 + 4x_3 = 2x_3 \\ x_2 - 2x_3 = 0 &\Rightarrow x_2 = 2x_3 \end{aligned} \text{ bulunur. } x_3 = c = sbt. \text{ olsun,}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c \\ 2c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ için } c=1 \text{ alınırsa, } \lambda_1=10 \text{ için özvektör, } \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$  (iki katlı kök) için özvektör,

$$\begin{pmatrix} 5-1 & 4 & 2 \\ 4 & 5-1 & 2 \\ 2 & 2 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \text{ veya } \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \text{ için}$$

$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = -2x_1 - 2x_2$  bulunur.  $x_1 = c_1 = sbt.$  ve  $x_2 = c_2 = sbt.$  olsun,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -2c_1 - 2c_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ -2c_1 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_2} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ -2c_2 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_3} \text{ bulunur. Buradan,}$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 1 \text{ için özvektör, } \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ -2c_1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ ve, } \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ -2c_2 \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ bulunur.}$$

**Örnek:**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  matrisine ait özdeğer ve özvektörleri bulunuz.

### Gayley-Hamilton Teoremi

Her matris kendisinin karakteristik denklemini sağlar. Şu halde A bir kare matris ve A'nın karakteristik denklemi  $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$  ise,

$$A^n + a_1A^{n-1} + a_2A^{n-2} + \dots + a_{n-1}A + a_nI = 0$$

sağlanır.

Bu teoremden faydalanarak bir matris tersi matris işlemleri yardımıyla bulunabilir.

$$a_n = (-1)^n |A| \neq 0 \text{ için } a_n I = -A^n - a_1 A^{n-1} - a_2 A^{n-2} - \dots - a_{n-1} A; I = A^{-1} \times A \text{ alınarak,}$$

$$a_n A^{-1} \times A = A \left( -A^{n-1} - a_1 A^{n-2} - a_2 A^{n-3} - \dots - a_{n-1} I \right)$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_n} \left( A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + a_2 A^{n-3} + \dots + a_{n-1} I \right)$$

elde edilir. Ayrıca bir matrisin büyük kuvvetlerini hesaplamak için Gayley-Hamilton teoreminden yararlanabiliriz.

**Örnek:**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & -4 & -3 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$  matrisin

- a. İversini Gayley-Hamilton teoremi yardımıyla bulunuz.
- b.  $A^5$  matrisini Gayley-Hamilton teoremi yardımıyla bulunuz.



## LİNEER UZAYLAR

**Tanım:**  $E$  kümesi  $x, y, z, \dots \in E$  ve  $\lambda, \mu$  skaler olsun.

Bu durumda,

i.  $x, y \in E \Rightarrow x + y \in E$

ii.  $\forall x \in E, \lambda$  skaler için  $\lambda x \in E$  varsa

ve aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa,

a.  $x + y = y + x$

b.  $x + (y + z) = (x + y) + z$

c.  $\exists 0 \in E$  varsa ve  $x + 0 = x, 0$  tektir.

d.  $x \in E$  ve  $x + (-x) = 0$  için  $(-x) \in E$

e.  $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$

f.  $1 \cdot x = x; 0 \cdot x = 0$

g.  $\lambda(x + y) = \lambda x + \mu y$

h.  $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

i.  $\lambda; \mu \neq 0$  için  $\lambda x = \mu x \Rightarrow \lambda = \mu; \lambda x = \lambda y \Rightarrow x = y$

sağlanıyorsa  $E$ 'ye lineer uzay denir.  $\lambda$  ve  $\mu \in \mathbb{R}$  ise  $E$ 'ye reel uzay,  $\lambda$  ve  $\mu \in \mathbb{C}$  ise  $E$ 'ye kompleks uzay denir.

### Vektör Uzayı

$V$  kümesinde “+” ile gösterilen toplam işlemi tanımlansın ve aşağıdaki özellikler gösterilsin.

1.  $\forall u, v \in V$  için  $u + v$  tanımlı ve  $u + v \in V$  dir. (toplama işlemine göre kapalı)
2.  $\forall u, v, w \in V$  için  $(u + v) + w = u + (v + w)$  (birleşme özelliği)
3.  $0 \in V$  ve  $\forall u \in V$  için  $u + 0 = 0 + u, 0 \in V$  birim eleman.
4.  $\forall u \in V$  için  $-u \in V$  var ve  $u + (-u) = 0$  ve  $(-u) + u = 0$  (her elemanın tersi vardır).
5.  $\forall u, v \in V$  için  $u + v = v + u$  (değişme özelliği var)

$\mathbb{R} \times V \rightarrow V, (a, u) \rightarrow au$  biçiminde skaler ile çarpma işlemi tanımlansın ve aşağıdaki özellikleri sağlansın.

- a.  $\forall a \in \mathbb{R}$  ve  $\forall u, v \in V$  için  $a(u + v) = au + av$
- b.  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  ve  $\forall u \in V$  için  $(a + b)u = au + bu$
- c.  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  ve  $\forall u \in V$  için  $(ab)u = a(bu)$

d.  $\mathbb{R}$ 'nin çarpmaya göre birim eleman "1" olduğuna göre V'nin elemanı için  $1 \cdot u = u$  olur.

## BAZ VEKTÖRLERİ

**Tanım:** Eğer V herhangi bir vektör uzayı ise ve

$S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , V vektör uzayındaki bir vektör kümesi için

1. S kümesi elemanları kendi arasında lineer bağımsızdır.
2. V vektör uzayına ait vektörler, S kümesi elemanlarının lineer kombinasyonu olarak yazılabilir.

Bu iki özelliği sağlar ise S kümesi elemanlarına **baz takımı** denir.

**Örnek 1:**  $x, y, z \in \mathbb{R}^m$ ,  $m \in \mathbb{Z}^+$  ve  $x = (\xi_i)_{i=1}^m$ ,  $y = (\eta_i)_{i=1}^m$ ,  $z = (\zeta_i)_{i=1}^m$  vektör uzayı olduğunu gösterin.

$\mathbb{R}^m$  vektör uzayının lineer uzay olabilmesi için aşağıdaki iki özelliği sağladığı gösterilmelidir:

- a.  $x + y = y + x = (\xi_i + \eta_i)_{i=1}^m = (\zeta_i)_{i=1}^m = z$
- b.  $\lambda$  skaler için  $\lambda x = \lambda (\xi_i)_{i=1}^m = (\lambda \xi_i)_{i=1}^m \in \mathbb{R}^m$  olur (Diğer özelliklerin de sağlandığı gösterilebilir). Dolayısıyla lineer uzaydır.

dolayısıyla  $\mathbb{R}^m$  lineer uzaydır.

**Örnek:**  $x(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_k t^k$ ,  $a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$  (veya  $a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$  olabilir) için  $t \in D \equiv (-\infty, \infty)$  polinom kümesi lineer uzay mıdır?

**Örnek:** Sürekli fonksiyonlar kümesi  $C[a, b]$  lineer uzay mıdır, gösteriniz.

Lineer uzay olabilmesi için aşağıdaki iki özelliği sağlamalıdır;

- a.  $x(t), y(t) \in C[a, b]$  için  $(x(t) + y(t)) \in C[a, b]$
- b.  $\lambda$  skaler için  $\lambda x(t) \in C[a, b]$  olur. Dolayısıyla lineer uzaydır.

**Örnek:**  $M_{m \times n}$  matrisler kümesi lineer uzay mıdır, gösteriniz.

$A = [a_{ij}]$ ;  $B = [b_{ij}] \in M_{m \times n}$  için

- a.  $A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] \in M_{m \times n}$
- b.  $\lambda$  skaler için  $\lambda A = \lambda [a_{ij}] = [\lambda a_{ij}] \in M_{m \times n}$  olur. Dolayısıyla lineer uzaydır.

## Lineer Bağımlılık ve Bağımsızlık

$x_1, x_2, \dots, x_p \in E$  ve  $\sum_{k=1}^k \alpha_k x_k$  lineer kombinasyon için eğer,

i.  $\sum_{k=1}^k \alpha_k x_k = 0$  için  $\sum_{k=1}^k |\alpha_k| > 0$  ise lineer bağımlıdır.

ii.  $\sum_{k=1}^k \alpha_k x_k = 0$  için  $\sum_{k=1}^k |\alpha_k| = 0$  ise lineer bağımsızdır.

**Örnek:**  $\alpha$  'nın hangi değeri için  $(1, 2, 3)$ ,  $(1, 1, 0)$  ve  $(\alpha, 1, 1)$  vektörleri lineer bağımlı olur?

**Örnek:**  $C[0, \pi]$  'de  $1, \cos t, \cos^2 t$  fonksiyonlarının lineer bağımsız,  $1, \cos 2t, \cos^2 t$  fonksiyonlarının lineer bağımlı olduğunu gösteriniz.

**Örnek:**  $x_1, x_2, \dots, x_m \in E$  lineer bağımsızdır.  $1 \leq k \leq m$  için  $x_1, x_2, \dots, x_k$  lerde lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.

## Sonlu ve Sonsuz Ölçülü Lineer Uzaylar

$m$  ölçülü lineer uzayda,  $m$  adet lineer bağımsız vektör vardır. Bu uzayda  $m+1$  sayıda vektör lineer bağımlıdır.

**Örnek:**  $\mathbb{R}^m$  de  $(m+1)$  sayıda vektör lineer bağımlı olduğunu gösteriniz.

Örnek 1 gereği,  $\mathbb{R}^m$  Lineer uzaydır.  $(m+1)$ . Vektör, ilk  $m$  adet lineer bağımsız vektörün lineer kombinasyonu olarak yazılır. Buna göre  $\mathbb{R}^m$   $m$  ölçülü uzay olur.

**Örnek:**  $I_k \in \mathbb{R}^m$  ve  $I_k = (\delta_{kl})_{l=1}^m$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$  burada  $\delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$  Kronecker sembolü

olmak üzere  $I_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) vektörlerin lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.

**Teorem 1:**  $m$  tane lineer bağımsız vektörlerin dahil olduğu  $m$  ölçülü  $E$  lineer uzayı göz önüne alınırsa bu vektörlere  $E$  lineer uzayının **baz vektörleri** denir.

$E$ 'de  $\{\ell_k\}_{k=1}^m$  ;  $\exists(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m)$  var ki keyfi  $x \in E$  vektörü için  $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m, x)$  vektörleri lineer bağımlıdır.

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m+1}$  skalerleri için  $\alpha_1 \ell_1 + \alpha_2 \ell_2 + \dots + \alpha_m \ell_m + \alpha_{m+1} x = 0$  lineer bağımlı yani

$\sum_{i=1}^m |\alpha_i| > 0$  olur.

Çünkü,  $x = \xi_1 l_1 + \xi_2 l_2 + \dots + \xi_m l_m$  alınabileceğinden bu değer  $\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \dots + \alpha_m l_m + \alpha_{m+1} x = 0$  eşitliğinde yerine yazılırsa  $\xi_i = -\alpha_i / \alpha_{m+1}$  ( $i=1,2,\dots,m$ )

bulunur ki,  $\sum_{i=1}^m |\alpha_i| > 0$  olur yani  $(l_1, l_2, \dots, l_m, x)$   $(m+1)$  vektör  $m$  ölçülü uzayda lineer bağımlıdır.

**Tanım :**  $\forall n$  için  $E$ 'de  $n$  tane lineer bağımsız eleman bulunabiliyor ise  $E$  lineer uzayı sonsuz ölçülü uzaydır.

Örneğin,  $C[a,b]$  de sürekli fonksiyonlar uzayında yer alan ve Fourier açılımındaki baz fonksiyonları  $(\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots)$  uzayı.

**Baz Takımı 4'e ayrılır:**

- 1) **Standart Baz:** bu baz takımındaki elemanlar birbirine dik ve "1" br. uzunlukta olup, eksenler üzerinde yer alır (örneğin;  $\mathbb{R}^3$  ün standart baz takımı  $\vec{i}, \vec{j}$  ve  $\vec{k}$  dir).
- 2) **Ortogonal Baz:** Baz takımında yer alan vektörler birbirine dik ancak uzunlukları "1" olmak zorunda değildir.
- 3) **Ortonormal Baz:** Baz takımında yer alan vektörler birbirine dik ve uzunlukları "1" br. dir. Ancak, eksenler üzerinde olma zorunlulukları yoktur.
- 4) **Ordinary Baz:** Bu türden bazlar eksenlerde olmak zorunda değildirler ayrıca diklik ve birim olma özelliği göstermeyebilirler ama baz yapısındadırlar.

## BAZ-BOYUT

**Tanım:** Sıfırdan farklı bir vektör uzayı  $V$ , eğer baz vektörleri kümesi  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  ve sonlu sayıda vektör içeriyor ise  $V$  uzayına sonlu boyutlu uzay denir.

**Teorem:** Eğer  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  bir  $V$  vektör uzayının bazı ise  $n$  adetten fazla vektör içeren bir küme elemanları lineer bağımlıdır.

**Teorem:** Sonlu boyutlu bir vektör uzayı için herhangi iki baz kümesi aynı sayıda vektör içerir.

**Tanım:** Sonlu boyutlu bir  $V$  vektör uzayının boyutu, baz vektörleri kümesindeki vektör sayısı kadardır ve uzayın boyutu " $\dim(V)$ " ile gösterilir.

## SKALER ÇARPIM

Bir  $V$  vektör uzayı için,

1.  $(x, x) \geq 0$ ,  $(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$  dir.
2.  $(x, y) = (y, x)$
3.  $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
4.  $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$

Skaler çarpıma göre norm:  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$  ile verilir.

## Hilbert Uzayı

Skaler çarpımdan doğan norma göre tam uzaylara Hilbert uzayı denir.  $\varphi_k$  ortogonal sistem için,

$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k$  serisi için  $\alpha_k = \frac{(x, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2}$  ve  $\varphi_k$  fonksiyonları trigonometrik seçilirse,

$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k$  Fourier çok terimlisi (serisi) olur.

$C[a, b]$ ,  $(x, y) = \int_a^b x(t)y(t)dt$ ,

$$\|x\| \leq \left( \int_a^b x(t)x(t)dt \right)^{1/2} \leq \sqrt{b-a} \|x\|$$

**Banach Uzayı:** (Normlu tam uzay)

$\{x_n\} \in X$  fonksiyonu  $\|x_{n+m} - x_n\| < \varepsilon$

$$x_n(t) = \begin{cases} -1, & t \in [-1, -1/n) \\ nt, & t \in [-1/n, 1/n] \\ 1, & t \in (1/n, 1] \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) \Rightarrow x(t) = \begin{cases} -1, & t \in [-1, 0) \\ 0, & t = 0 \\ 1, & t \in (0, 1] \end{cases}$$

bulunur.

