T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

İlknur ERDURMUŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

Danışman

Dr. Öğretim Üyesi Pınar ALBAYRAK

Temmuz, 2024

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

İlknur ERDURMUŞ tarafından hazırlanan tez çalışması 18.07.2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Matematik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Dr. Öğr. Üyesi Pınar ALBAYRAK
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Dr. Öğr. Üyesi Pınar ALBAYRAK, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Doç. Dr. Sebahat Ebru DAŞ, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Dr. Öğr. Üyesi Meltem UZUN, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Pınar ALBAYRAK sorumluluğunda tarafımca hazırlanan “Bazı Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri” başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

İlknur ERDURMUŞ

Aileme

ve

eşime

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması süresince bana yol gösterici, cesaretlendirici desteğini esirgemeyen, her adımda yanımda olan ve samimi desteğiyle çalışmama ilham veren Dr. Öğr. Üyesi Pınar ALBAYRAK'a en içten teşekkürlerimi sunmak isterim. Profesyonel rehberliği ve değerli önerileri, çalışmamın kalitesini artırmama önemli katkılar sağladı. Kendisinin danışmanım olması, benim için büyük bir gurur ve mutluluk kaynağı oldu. Ayrıca Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine ve çalışmamda bilgilerinden büyük fayda sağladığım Doç. Dr. Sebahat Ebru DAŞ'a, lisansüstü eğitim dönemimdeki değerli tavsiye ve destekleri için sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Yıldız Teknik Üniversitesi yüksek lisans yapma hayalimi gerçekleştirmem konusunda yıllar sonra beni cesaretlendiren ve her konuda yanımda olan canım eşim Mehmet ERDURMUŞ'a, varlıkları ile bana her zaman güç veren güzel kardeşlerim ve melek kalpli anneme, her konuda yanımda olan ve beni destekleyen eşimin değerli ailesine, gözlerinin içine baktığımda umut bulduğum canım öğrencilerime, bu sürecimde desteklerini eksik etmeyen ve bana daima güvenen arkadaşlarıma ve sevdiklerime çok teşekkür ederim.

Bu tezi, beni sabırla ve sevgiyle büyüten, dualarıyla her zaman yanımda olduklarına inandığım dedem Şeyh Davut ÇİM, babaannem Sakine ÇİM ve babam İsmail ÇİM'e ithaf ediyorum.

İlknur ERDURMUŞ

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ vii
KISALTMA LİSTESİ viii
ŞEKİL LİSTESİ ix
TABLO LİSTESİ x
ÖZET xi
ABSTRACT xiii
1 GİRİŞ 1
1.1 Tarihsel Gelişim....1
2 TEMEL TANIM VE TEOREMLER 4
2.1 Bazı Özel Fonksiyonlar ve Özellikleri....4
2.1.1 Gama Fonksiyonu..... 4
2.1.2 Beta Fonksiyonu 5
2.1.3 Mittag - Leffler Fonksiyonu 6
2.1.4 Hata (Error) Fonksiyonu 7
3 KESİRLİ ANALİZ 9
3.1 Kesirli Türev ve İntegral Tanımları....9
3.1.1 Grünwald-Letnikov Kesirli Türevi..... 10
3.1.2 Riemann-Lioville Kesirli Türev ve İntegrali.....10
3.1.3 Caputo Kesirli Türevi.....10
3.1.4 $(x-a)^{\beta}$ Kuvvet Fonksiyonunun Caputo Kesirli Türevi..... 11
4 HERMİT POLİNOMLARI 12
4.1 Hermit Diferansiyel Denklemi....12
4.2 Hermit Polinomları 15
4.3 Hermit Polinomu için Tekrarlama (Rekürans) Bağıntıları 18
5 HERMIT SIRALAMA YÖNTEMI 24
5.1 Hermit Sıralama Yöntemi....24
5.2 Örnekler 29
6 SONUÇ 37
KAYNAKÇA 38

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR **41**

SİMGE LİSTESİ

$B(u,v)$	Beta Fonksiyonu
$E_b(y)$	Bir Parametreli Mittag-Leffler Fonksiyonu
${}^{C}D^{b}\,f(t)$	Caputo Kesirli Türevi
$\Gamma(y)$	Gama Fonksiyonu
$\widetilde{D}_a^n f(x)$	Grünwald-Letnikov Kesirli Türevi
$Erf(y)$	Hata (Error) Fonksiyonu
$\mathrm{E}_{b,d}(y)$	İki Parametreli Mittag-Leffler Fonksiyonu
$J_a^m\, f(t)$	Riemann-Lioville Kesirli İntegrali
${}_bD_t^b f(t)$	Riemann-Lioville Kesirli Türevi

KISALTMA LİSTESİ

AAY	Adomian Ayrıştırma Yöntemi
HAY	Homotopi Analiz Yöntemi
HPY	Homotopi Pertürbasyon Yöntemi
HSY	Hermit Sıralama Yöntemi
SFY	Sonlu Farklar yöntemi
SSY	Sinc-Sıralama Yöntemi
SY	Sinc Yöntemi
TSY	Taylor Sıralama Yöntemi
TY	Taylor Yöntemi
VİY	Varyasyonel İterasyon Yöntemi

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 5.1 $N = 4$ için Örnek 5.1'in tam çözümü ile yaklaşık çözümünün karşılaştırılması 32

Şekil 5.2 $N = 2$ için Örnek 5.1'in tam çözümü ile yaklaşık çözümünün karşılaştırılması 32

Şekil 5.3 $N = 8$ için Örnek 5.2'nin tam çözümü ile yaklaşık çözümünün karşılaştırılması 36

Şekil 5.4 $N = 4$ için Örnek 5.2'nin tam çözümü ile yaklaşık çözümünün karşılaştırılması 36

TABLO LİSTESİ

Tablo 5.1 Örnek 5.1'in tam çözümü ile yaklaşık çözümünün karşılaştırılması.…31

Tablo 5.2 Örnek 5.2'nin tam çözümü ile yaklaşık çözümünün karşılaştırılması…35

ÖZET

Bazı Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri

İlknur ERDURMUŞ

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Pınar ALBAYRAK

Tam sayı mertebeli integral ve türevin tam sayı olmayan mertebelere genişletilmiş hali olan kesirli analizin ortaya çıkmasıyla birlikte, pek çok fiziksel sistemin kesirli türevler kullanılarak gerçeğe daha yakın olarak modellenebildiği görülmüştür. Bu sebeple son yıllarda; fen, uygulamalı matematik ve mühendislik alanlarındaki matematiksel modelleme problemlerinde kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin kullanımına olan ilgi sürekli artmıştır. Dinamik sistemlerin kontrol teorisi, ses sinyalleri, elektrokimya, kuantum fiziği, mekanik, biyoloji, tıp, elektromanyetik teori, malzeme bilimi, elektrik, sinyal işleme, optik, biyomühendislik vb. bilimin birçok alanında karşılaşılan problemleri modellemek için kesirli mertebeden diferansiyel denklemler kullanılmaktadır. Bu tip diferansiyel denklemler genellikle tam çözüme sahip değillerdir ve bu yüzden bu denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için pek çok nümerik yöntem geliştirilmiştir.

Bu çalışmada, bazı kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerini elde etmek için Hermit sıralama yöntemi kullanılmıştır. Hermit

sıralama yöntemi, bahsedilen kesirli mertebeden diferansiyel denklemi Hermit polinomlarını ve sıralama noktalarını kullanarak bilinmeyenleri Hermit katsayıları olan bir cebirsel denklem sistemine dönüştürmektedir. Elde edilen cebirsel sistemin matris cebiri kullanılarak çözülmesi ile kesirli mertebeden diferansiyel denklemin yaklaşık çözümüne ulaşılmıştır. Hermit sıralama yönteminin geçerliliğini göstermek için bazı sayısal örnekler verilmiş ve elde edilen yaklaşık çözümler tam çözümler ile hem tablo hem de grafik gösterimi kullanılarak karşılaştırılmıştır. Yapılan karşılaştırma analizleri bu yöntemin doğru ve etkili çalıştığını göstermiştir.

Anahtar Kelimeler: Hermit polinomu, kesirli mertebeden diferansiyel denklem, sıralama yöntemleri.

ABSTRACT

Numerical Solutions of Some Fractional Differential Equations

İlknur ERDURMUŞ

Department of Mathematics

Master of Science

Supervisor: Asst. Prof. Pınar ALBAYRAK

With the advent of fractional analysis, which is the extension of integer order integral and derivative to non-integer orders, it has been seen that many physical systems can be modeled closer to reality using fractional derivatives. For this reason, in recent years; There has been a steady increase in interest in the use of fractional differential equations in mathematical modeling problems in science, applied mathematics and engineering. Fractional differential equations are used to model problems encountered in many fields of science, such as control theory of dynamic systems, sound signals, electrochemistry, quantum physics, mechanics, biology, medicine, electromagnetic theory, materials science, electricity, signal processing, optics, bioengineering, etc. These types of differential equations usually do not have exact solutions, and therefore many numerical methods have been developed to find approximate solutions to these equations.

In this study, the Hermit collocation method is used to obtain numerical solutions of some fractional differential equations. The method transforms the mentioned differential equation into an algebraic equation system with unknowns as Hermit coefficients, utilizing Hermit polynomials and collocation points. The approximate solution of the differential equation is obtained by solving this algebraic system

using matrix algebra. Numerical examples are provided to demonstrate the validity of the method, and the obtained approximate solutions are compared with exact solutions using both tabular and graphical representations. The comparative analyses have shown that this method operates accurately and effectively.

Keywords: Hermite Polynomial, fractional differential equation, collocation methods.

1
GİRİŞ

1.1 Tarihsel Gelişim

Kesirli hesap, şüphesiz ki matematiğin en ilgi çekici konularından biridir. Bu konu yüzyıllar önce önemli bilim insanlarının da ilgisini çekmiş ve merak uyandırmıştır. Kesirli hesabın keşfinin, L'Hospital'ın, Leibniz'e 1695 yılında sorduğu bir sorudan kaynaklandığına inanılmaktadır. Leibniz, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir fonksiyonun n. mertebeden türevini tanımlamak için

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) \tag{1.1}$$

gösterimini kullanmıştır. Bu tanımlamadan sonra L'Hospital, Leibniz'e yazdığı bir mektupta $n = \frac{1}{2}$ olması durumunda türevin ne olacağını sormuştur. Leibniz 30 Eylül 1695 tarihinde, L'Hospital'e yazdığı mektup ile: "... Bu, bir gün faydalı sonuçlar çıkarılacak açık bir paradokstur..." cevabını vererek o gün kesirli hesabın ilk doğuşunu gerçekleştirmiştir [1].

Kesirli hesap, birçok matematikçinin ilgisini çekmiş ve bu konuda farklı çalışmalar yapılmıştır. Euler, J.L. Lagrange, P.S. Laplace, S. F. Lacroix, Fourier, Abel, Liouville, Riemann, Caputo kesirli mertebeden türeve katkı sağlayan bilim insanlarının bir kısmıdır [2]. Kesirli mertebeden türevlerle ilgili çalışmaların çoğu her ne kadar 20.yy. bitmeden ortaya konsa da fizik, mühendislik ve farklı bilimsel alanlarda heyecan verici başarılar elde edilmesi geçtiğimiz yüzyıl içinde gerçekleşmiştir. Heaviside, Bush, Goldman, Holbrook, Starkey, Carslaw ve Jeager, Scott ve Mikuniski, Oldham ve Spanier ile Miller ve Ross özellikle bu konuya adanmış çok güvenilir tartışmalar sunmaktadır [3]. Özellikle son 50 yılda düzenlenen konferanslar ve yayınlanan eserler bu konunun gelişimine önemli katkılar sağlamıştır. Bu konuyla ilgili yapılan çalışmaların bir kısmı Oldham ve Spanier'in The Fractional Calculus kitabında bahsedilmiş ve incelenmiştir [4].

Kesirli analiz ile ilgili çalışmaların artması, bu konunun uygulama alanlarında daha güvenilir ve doğru sonuçların bulunmasını sağlamıştır. Kesirli analiz; malzeme

bilimi, fizik, kimya, astrofizik, jeoloji, biyomühendislik, tıp, finans, optik, sinyal işleme ve kontrol teorisi, akışkan akışı, elektrik ağları, elektromanyetik hareketler, dalga ve difüzyon fenomeni gibi çeşitli alanlarda kullanılmıştır [5]. Bu çeşitliliğe bakılırsa bilim ve mühendislik alanında hemen hemen her alanda bu konuya ihtiyaç duyulmuş ve önemli gelişmeler sağlanmıştır. Bu alanlara katkıda bulunacak birçok çalışma yapılmıştır [6-8].

Kesirli mertebeden diferansiyel denklemleri analitik olarak çözmek zordur. Bu sebeple bu denklemleri çözmek için sayısal ve yarı sayısal çeşitli yöntemler geliştirilmiştir [9-15]. Bu yöntemlerden bazıları: Adomian ayrıştırma yöntemi (AAY), Varyasyonel iterasyon yöntemi (VİY), Homotopi analiz yöntemi (HAY), Homotopi pertürbasyon yöntemi (HPY), Sonlu farklar yöntemi (SFY), Sinc yöntemi (SY), Sinc-sıralama yöntemi (SSY), Taylor yöntemi (TY) ve Taylor sıralama yöntemleridir (TSY) [16-24].

Bu yöntemlerden bir diğeri de Hermit sıralama yöntemidir (HSY). Bu yöntem, Taylor sıralama yönteminin kesik Hermit serisine dayalı bir uyarlaması olarak geliştirilmiştir. Bu yaklaşımla, diferansiyel denklem bir cebirsel denklem setine dönüştürülür ve denklemin bilinmeyenleri, problemin Hermit serisi çözümünün katsayılarına karşılık gelir. Hermit sıralama yöntemi, kesirli diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etmek için gelişmiş bir yaklaşım sunar.

Hermit sıralama yöntemi ile ilgili pek çok çalışma yapılmıştır. Ganaie ve Kukreja [25] çalışmasında Kübik Hermit sıralama yöntemiyle doğrusal olmayan Burgers denkleminin çözümü elde edildi. Elde edilen sayısal sonuçlar ile yüksek Reynolds gibi zorlu şartlarda bile yöntemin etkili, sağlam ve güvenilir olduğu görülmüştür. Dattoli [26] çalışmasında, hiperbolik ve trigonometrik fonksiyonlardan başlayıp Laguerre ve Hermite polinomlarını tanıtarak, Bessel fonksiyonları ailesi ile olan ilişkiyi tartışıp ve bu konuyu birleştirici bir bakış açısından ele almıştır. Pirim ve Ayaz [27] çalışmasında, çok terimli yüksek mertebeden kesirli diferansiyel denklemlerin Hermit sıralama yöntemi ile yaklaşık çözümlerini incelemektedir. Parand, Dehghan, Rezaei ve Ghaderi yaptıkları çalışmada [28], lineer olmayan Lane-Emden denklemlerinin bazı iyi bilinen sınıflarını çözmek için Hermit fonksiyonu sıralama yöntemini önermektedir.

Bu tezde, bazı kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin Hermit sıralama yöntemi kullanılarak nümerik çözümleri elde edilmiştir. Tez, birincisi giriş olmak üzere altı bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde bazı özel fonksiyonlar ve özellikleri, üçüncü bölümde ise kesirli analizde kullanılan türev tanımları verilmiştir. Dördüncü bölümde Hermit diferansiyel denklemi ve Hermit polinomları tanıtılmıştır. Beşinci bölümde kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için kullanılan Hermit sıralama yönteminin uygulanışı anlatılmış ve yöntem örnekler üzerine uygulanmıştır. Elde edilen yaklaşık çözümler tam çözümler ile hem tablo hem de grafik gösterimi kullanılarak karşılaştırılmıştır. Son bölüm olan altıncı bölümde tez çalışmasında elde edilen sonuçların bir değerlendirilmesi yapılmıştır.

2
TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1 Bazı Özel Fonksiyonlar ve Özellikleri

2.1.1 Gama Fonksiyonu

Kesirli analizde oldukça önemli bir yere sahip olan Gama fonksiyonu, ilk olarak Leonhard Euler tarafından 18. yüzyılda bulunmuştur. Gama fonksiyonu faktöriyel fonksiyonunun pozitif reel sayılara genişletilmesidir ve $\Gamma(y)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1 $\Gamma: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\Gamma(y) = \int_0^\infty e^{-t} t^{y-1} dt \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanmış $\Gamma(y)$ fonksiyonuna Gama fonksiyonu denir.

Teorem 2.1 Gama fonksiyonun bazı temel özellikleri şunlardır;

$$\begin{aligned} &1.\ \ \Gamma(y+1) = y\,\Gamma(y)\ ,\ \ y\ > 0 \\ &2.\ \ \Gamma(y) = (y-1)! \\ &3.\ \ \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \end{aligned} \tag{2.2}$$

İspat 2.1

1. Bu özelliği ispat edebilmek için (2.1) denkleminde (y) yerine $(y+1)$ yazılırsa;

$$\Gamma(y+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^{y} dt = [e^{-t} t^{y}]\begin{matrix} t=\infty \\ t=0 \end{matrix} + y\int_0^\infty e^{-t} t^{y-1} dt = y\,\Gamma(y) \tag{2.3}$$

sonucu elde edilir.

2. Genel bir formül elde edebilmek için $y = 1,2,3,\ldots$ için $\Gamma(y)$ değerlerini hesaplarsak:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} t^{1-1} dt = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1 = 0!$$

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1 = 1\,!$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2 = 2!$$

$$\vdots$$

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)! = (n-1)! \tag{2.4}$$

olduğu görülür.

3. $y = \frac{1}{2}$ için $\Gamma(y)$ değerini hesaplayalım:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{1}{2}-1} dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt \tag{2.5}$$

$\left.\begin{matrix} t = x^2 \\ dt = 2xdx \end{matrix}\right\}$ dönüşümü yaparsak,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-x^2} dx \tag{2.6}$$

elde edilir. (2.6) denklemi

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-z^2} dz \tag{2.7}$$

şeklinde de yazılabilir. Bu iki denklemi çarparsak

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+z^2)} dzdx \tag{2.8}$$

elde edilir. (2.8) iki katlı integrali kutupsal koordinatları kullanarak çözülürse $x = rcos\varphi,\ y = rsin\varphi$ dönüşümü ile

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} rdrd\varphi = \pi \tag{2.9}$$

eşitliği bulunur [29].

2.1.2 Beta Fonksiyonu

Özel fonksiyonlardan biri olan Beta fonksiyonu, Gama fonksiyonuna ait özelliklerin çoğunu sağlasa da bazı durumlarda Beta fonksiyonunu kullanmak daha avantajlıdır. Beta fonksiyonu 1.tip Euler integrali olarak da bilinmektedir.

Tanım 2.2 $Re(u) > 0, Re(v) > 0$ olmak üzere

$$B(u,v) = \int_0^1 \varphi^{u-1}(1-\varphi)^{v-1} d\varphi \tag{2.10}$$

şeklinde tanımlanmış fonksiyona Beta fonksiyonu denir.

Tanım 2.3 Beta fonksiyonu $d > 0$ ve $f > 0$ için

$$B(d,f) = \frac{\Gamma(d)\Gamma(f)}{\Gamma(d+f)} \tag{2.11}$$

şeklinde Gama fonksiyonu türünden yazılabilir.

Beta fonksiyonun bazı temel özellikleri:

1. $B(u,v) = B(v,u)$

2. $B\ (u, 1-u) = \ \Gamma(u)\Gamma(1-u)\ , \qquad 0 < Re(u) < 1$ (2.12)

şeklindedir [30].

2.1.3 Mittag - Leffler Fonksiyonu

Mittag-Leffler fonksiyonu, e^y üstel fonksiyonun bir genellemesi olarak İsveçli matematikçi Agarwal tarafından 1903'te bulundu. Kesirli hesapta önemli bir yere sahip olan Mittag-Leffler fonksiyonunun bir ve iki parametreli gösterimleri bir kuvvet serisi cinsinden aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

Tanım 2.4 $b > 0$ olmak üzere, bir parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu:

$$\mathrm{E}_b(y) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{y^r}{\Gamma(br+1)} \tag{2.13}$$

şeklinde ifade edilir ve $E_b(y)$ ile gösterilir [31].

Tanım 2.5 $b > 0$ ve $d > 0$ olmak üzere, iki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu

$$\mathrm{E}_{b,d}(y) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{y^r}{\Gamma(br+d)} \tag{2.14}$$

şeklinde tanımlanır [31].

Mittag- Leffler fonksiyonunun bazı özel değerleri aşağıdaki gibidir:

$$\mathrm{E}_{b,1}(y) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{y^r}{\Gamma(br+1)} \equiv \mathrm{E}_b(y) \tag{2.15}$$

$$E_{1,1}(y) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{y^r}{\Gamma(r+1)} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{y^r}{r!} = e^y$$

$$E_{1,2}(y) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{y^r}{\Gamma(r+2)} = \frac{1}{y} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{y^{r+1}}{(r+1)!} = \frac{e^y - 1}{y}$$

$$E_{1,3}(y) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{y^r}{\Gamma(r+3)} = \frac{1}{y^2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{y^{r+2}}{(r+2)!} = \frac{e^y - 1 - y}{y^2}$$

$$\vdots$$

$$E_{1,d}(y) = \frac{1}{y^{d-1}} \left\{ e^y - \sum_{r=0}^{d-2} \frac{y^r}{r!} \right\} . \tag{2.16}$$

$sinh(z)$ ve $cosh(z)$ fonksiyonları Mittag-Leffler fonksiyonu cinsinden yazılırsa:

$$E_{2,1}(y^2) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{y^{2r}}{\Gamma(2r+1)} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{y^{2r}}{(2r)!} = cosh(z) \tag{2.17}$$

$$zE_{2,2}(y^2) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{y^{2r}}{\Gamma(2r+2)} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{y^{2r+1}}{(2r+1)!} = sinh(z) \tag{2.18}$$

$$E_{2,2}(y^2) = \frac{sinh(z)}{z} \tag{2.19}$$

eşitlikleri elde edilir.

2.1.4 Hata (Error) Fonksiyonu

Hata fonksiyonu bazen Gauss hata fonksiyonu olarak da adlandırılabilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 2.6

$$Erf(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-t^2} dt \tag{2.20}$$

şeklinde tanımlanan $Erf(y)$ fonksiyonuna Hata fonksiyonu denir [2].

3
KESİRLİ ANALİZ

3.1 Kesirli Türev ve İntegral Tanımları

Kesirli hesaplar, 1974 yılında yapılan ilk uluslararası konferansla hız kazanmış ve dünyanın birçok noktasında çalışmalar yapılmasını sağlamıştır. Günümüzde de bu konuyla ilgili çalışmalar hızla devam etmektedir. Kesirli analizi, klasik analizden ayıran en önemli özellik tek bir türev tanımının olmayışıdır.

Kesirli türev birçok bilim insanın dikkatini çekmiştir. Bu konuya duyulan ilgi sayesinde doğrudan veya dolaylı olarak bilim insanları önemli katkılarda bulunmuşlardır.

J. L. Lagrange kesirli hesaba dolaylı olarak katkıda bulunmuştur. 1772 yılında diferansiyel hesaplar için üsler (indisler) yasasını geliştirmiştir. Bu çalışma tam sayı mertebesindeki operatörler için üsler (indeksler) yasasıdır [4]:

$$\frac{d^q}{dx^q}\frac{d^p}{dx^p}y = \frac{d^{q+p}}{dx^{q+p}}y \quad . \tag{3.1}$$

1819'da Lacroix, kesirli türevden bahseden bir makale yayınlayan ilk matematikçi oldu. q pozitif bir sayı olmak üzere $y = x^q$ fonksiyonun p. mertebeden türevini

$$\frac{d^p y}{dx^p} = \frac{q!}{(q-p)!}x^{q-p}, \qquad q \geq p. \tag{3.2}$$

olarak buldu. Daha sonra bu eşitliği gama fonksiyonunu kullanarak

$$\frac{d^p y}{dx^p} = \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-p+1)}x^{q-p} \tag{3.3}$$

şeklinde yazdı. (3.3) denkleminde $q = 1$ ve $p = \frac{1}{2}$ alarak

$$\frac{d^{1/2}y}{dx^{1/2}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \tag{3.4}$$

formülünü buldu [31].

3.1.1 Grünwald-Letnikov Kesirli Türevi

Tanım 3.1 $n > 0$, $f \in C^{[n]}[a,b]$, $a < x \leq b$ ve $h_N = (x-a)/N$ olmak üzere, f fonksiyonun *n*. mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli türevi

$$\widetilde{D_a^n} f(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{\Delta_{h_N}^n f(x)}{h_N^n} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{h_N^n} \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{n}{k} f(x - kh_N) \tag{3.5}$$

ile tanımlanır [1].

3.1.2 Riemann-Lioville Kesirli Türev ve İntegrali

Tanım 3.2 $b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ ve $(n-1) \leq b < n$ olmak üzere Riemann-Lioville kesirli türevi

$${}_bD_t^b f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-b)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_b^t \frac{f(w)}{(t-w)^{b-n+1}} dw \tag{3.6}$$

şeklinde tanımlanır [3].

Tanım 3.3 $m \in \mathbb{R}_+$ olmak üzere $L_1[a,b]$'de tanımlanmış J_a^m operatörüne *m*. mertebeden Riemann-Liouville kesirli integral operatörü denir ve

$$J_a^m f(t) := \frac{1}{\Gamma(m)} \int_a^t (t-w)^{m-1} f(w) dw, \qquad a \leq t \leq b \tag{3.7}$$

şeklinde tanımlanır [1].

3.1.3 Caputo Kesirli Türevi

1967 yılında Caputo kesirli mertebeden türevi bulabilmek için Riemann-Liouville kesirli türev tanımıyla bağlantı kurarak daha klasik bir tanım formülleştirmiştir.

Tanım 3.4 $n \in \mathbb{N}$, $b > 0$ olmak üzere Caputo kesirli türevi

$${}^C D^b f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-b)} \int_0^t f^{(n)}(w)(t-w)^{n-b-1} dw \ , \ n-1 < b \leq n \tag{3.8}$$

şeklinde tanımlanır [9]. Burada *b* kesirli türevin mertebesidir, *n* ise *b*'den büyük en küçük tam sayıdır.

3.1.4 $(x-a)^{\beta}$ Kuvvet Fonksiyonunun Caputo Kesirli Türevi

Tanım 3.5 a herhangi bir sayı, $\beta \geq 0$ ve $f(x) = (x-a)^{\beta}$ olsun. $b \in \mathbb{N}_0$ İçin $n = b$ ve $b \notin \mathbb{N}_0$ için $n = [\![b]\!] + 1$ *olmak* üzere $f(x)$'in $b \geq 0$ *mertebeli* Caputo kesirli türevi

$$ {}^{C}D^{b} f(x) = \begin{cases} 0 \quad , & \beta \in \{0,1,2,\dots,n-1\} \; ve \; \beta < n \; ise \\ \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-b)}(x-a)^{\beta-b}, & \begin{matrix} \beta \in \mathbb{N} \;\; ve \;\; \beta \geq n \;\; veya \\ \beta \notin \mathbb{N} \;\; ve \; \beta > n-1 \; ise \end{matrix} \end{cases} \tag{3.9} $$

şeklinde tanımlanır [1].

4
HERMİT POLİNOMLARI

4.1. Hermit Diferansiyel Denklemi

Tanım 4.1 Matematik ve fizikte önemli yere sahip olan

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2ny(x) = 0\,, \qquad (\ n = \ 0,1,2,\dots) \tag{4.1}$$

diferansiyel denklemine Hermit diferansiyel denklemi denir. Burada *n* sabittir ve Hermit polinomlarının indeksi olarak bilinir. y'(x) ve y''(x) sırasıyla $y(x)$ fonksiyonunun birinci ve ikinci türevleridir.

Hermit diferansiyel denklemi kuvvet serisi yöntemi ile çözülebilir. Bu durumda $y(x)$ fonksiyonunu bir kuvvet serisi olarak yazılırsa

$$y(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{4.2}$$

elde edilir. Bu durumda $y(x)$'in türevleri:

$$y'(x) = \sum_{r=1}^{\infty} r a_r\, x^{r-1} \tag{4.3}$$

$$y''(x) = \sum_{r=2}^{\infty} r(r-1) a_r\, x^{r-2} \tag{4.4}$$

olur. (4.2), (4.3) ve (4.4) denklemleri (4.1) denkleminde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\sum_{r=0}^{\infty} (r+2)(r+1) a_{r+2}\, x^r - \sum_{r=1}^{\infty} 2r a_r\, x^r + \sum_{r=0}^{\infty} 2n a_r x^r \quad = 0 \tag{4.5}$$

elde edilir. (4.5)'deki serileri başlangıç indis değerleri 1'den başlayacak şekilde düzenlenirse:

$$\sum_{r=1}^{\infty}\{(r+2)(r+1)a_{r+2}-(2r-2n)a_r\}x^r+2a_2+2na_0=0 \tag{4.6}$$

bulunur. (4.6) denklemi sıfıra eşit olduğundan toplam sembolünün içini ve dışındaki değerleri sıfıra eşitleyerek

$$a_2=\frac{-2na_0}{2} \tag{4.7}$$

eşitliği ve

$$a_{r+2}=\frac{2(r-n)}{(r+2)(r+1)}a_r\,,\ \ r\geq 1 \tag{4.8}$$

rekürans bağıntısı elde edilir.

(4.8) rekürans bağıntısında *r =1,2, 3,...* yazılırsa:

$$a_3=\frac{2(1-n)}{3!}\,a_1 \tag{4.9}$$

$$a_4=\frac{2(2-n)}{4.3}a_2=\frac{2^2(-n)(2-n)}{4!}\,a_0 \tag{4.10}$$

$$a_5=\frac{2(3-n)}{5.4}a_3=\frac{2^2(1-n)(3-n)}{5!}\,a_1 \tag{4.11}$$

$$a_6=\frac{2(4-n)}{6.5}\,a_4=\frac{2^3(-n)(2-n)(4-n)}{6!}\,a_0 \tag{4.12}$$

$$a_7=\frac{2(5-n)}{7.6}\,a_5=\frac{2^3(1-n)(3-n)(5-n)}{7!}\,a_1 \tag{4.13}$$

$$a_8=\frac{2(6-n)}{8.7}\,a_4=\frac{2^4(-n)(2-n)(4-n)(6-n)}{8!}\,a_0 \tag{4.14}$$

değerleri elde edilir. Çift indisli terimler ve tek indisli terimler için düzenleme yapılıp genel formülleri yazılırsa:

çift indisli terimler için:

$$a_{2r} = \frac{2^r(-n)(2-n)\dots(2r-2-n)}{(2r)!}a_0 \tag{4.15}$$

tek indisli terimler için:

$$a_{2r+1} = \frac{2^r(1-n)(3-n)\dots(2r-1-n)}{(2r+1)!}a_1 \tag{4.16}$$

genel formülleri elde edilir.

(4.15) ve (4.16) eşitlikleri denklem (4.2)'de yerine yazılarak $y(x)$ çözüm fonksiyonu

$$y(x) = a_0\left\{1 + \frac{2(-n)}{2!}x^2 + \dots + \frac{2^r(-n)\dots(2r-2-n)}{(2r)!}x^{2r} + \dots\right\} + a_1\left\{x + \frac{2(1-n)}{3!}x^3 + \dots + \frac{2^r(1-n)\dots(2r-1-n)}{(2r+1)!}x^{2r+1} + \dots\right\} \tag{4.17}$$

şeklinde elde edilir. Burada *n* sayısı pozitif bir tam sayıdır. (4.17) çözümü

$$y_1(x) = 1 + \frac{2(-n)}{2!}x^2 + \dots + \frac{2^r(-n)\dots(2r-2-n)}{(2r)!}x^{2r} + \dots \tag{4.18}$$

ve

$$y_2(x) = x + \frac{2(1-n)}{3!}x^3 + \dots + \frac{2^r(1-n)\dots(2r-1-n)}{(2r+1)!}x^{2r+1} + \dots \tag{4.19}$$

olmak üzere $y(x) = a_0\,y_1(x) + a_1\,y_2(x)$ şeklinde yazılsın.

Bu durumda, eğer n bir pozitif çift sayı ise $y_1(x)$ polinom, $y_2(x)$ seri olacaktır. Eğer *n* bir pozitif tek sayı ise; tersine $y_1(x)$ seri, $y_2(x)$ ise polinom olacaktır.

Sonuç olarak, Hermit diferansiyel denkleminin verilen n pozitif tam sayısı için elde edilen $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ çözümlerinden bir tanesi daima polinom, diğeri ise seri olacaktır.

4.2. Hermit Polinomları

Tanım 4.2 Hermit diferansiyel denkleminin verilen *n* pozitif tam sayısı için polinom olan çözümüne Hermit polinomu denir ve H_n ile gösterilir.

(4.1) Hermit diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$y(x) = a_0 u_n(x) + a_1 v_n(x) \tag{4.20}$$

olarak yazılsın. Bu durumda *n* bir pozitif çift tam sayı ise $H_n(x) = u_n(x)$; *n* pozitif tek sayı ise $H_n(x) = v_n(x)$ olur.

O halde $H_n(x)$:

n pozitif çift tam sayı ise:

$$H_n(x) = a_0\{1 - \frac{n}{1}\frac{x^2}{1!} + \frac{n(n-2)}{1.3}\frac{x^4}{2!} + \cdots\} \tag{4.21}$$

n pozitif tek tam sayı ise:

$$H_n(x) = a_1\{x - \frac{(n-1)}{3}\frac{x^3}{1!} + \frac{(n-1)(n-3)}{3.5}\frac{x^5}{2!} + \cdots\} \tag{4.22}$$

olarak hesaplanır. Bu denklemlerden yola çıkarak (4.20)'deki *y(x)* çözüm fonksiyonu:

$$y(x) = a_0\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^k n(n-2)\ldots(n-2k+2)}{(2k)!}\, x^{2k}\right\} +$$

$$a_1 x\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^k (n-1)(n-3)\ldots(n-2k+1)}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \cdots\right\} \tag{4.23}$$

şeklinde elde edilir.

(4.23) çözümü sonsuz terimli iki seriden oluşmaktadır. *n*' in pozitif çift tam sayı olduğu durum için elde edilen a_0 katsayısına sahip ilk seride $k = \frac{n+2}{2}$ indisinden itibaren elde edilecek terimler sıfır olacaktır.

Aynı şekilde, n'in pozitif tek tam sayı olduğu durum için elde edilen a_1 katsayısına sahip ikinci seride ise $k= \frac{n+1}{2}$ indisinden itibaren elde edilecek terimler sıfır olacaktır. Dolayısıyla çözümler polinom olacaktır. O halde, n'in sıfır veya pozitif bir tam sayı olması durumunda (4.1) Hermit diferansiyel denkleminin daima polinom formunda çözümü vardır.

Hermit polinomu için genel bir formül çıkaralım:

Bunun için r bir çift tam sayı ve $n = r$ olmak üzere $a_0 = \frac{(-1)^{\frac{r}{2}} r!}{(\frac{r}{2})!}$ olsun.

(4.15) denkleminden x^r'nin katsayısı

$$(-2)^{\frac{r}{2}} \frac{r(r-2)\dots(r-r+2)}{r!} a_0 \tag{4.24}$$

şeklindedir. (4.24) denkleminde $a_0 = \frac{(-1)^{\frac{r}{2}} r!}{(\frac{r}{2})!}$ eşitliğini yerine yazarsak x^r'nin katsayısı

$$(-2)^{\frac{r}{2}} \frac{r(r-2)\dots(r-r+2)}{r!} \frac{(-1)^{\frac{r}{2}} r!}{(\frac{r}{2})!} = 2^{\frac{r}{2}} \frac{r(r-2)\dots(r-r+2)}{(\frac{r}{2})!}$$

$$= \frac{2^{\frac{r}{2}}.2.\frac{r}{2}.2\left(\frac{r}{2}-1\right)\dots 2(1)}{(\frac{r}{2})!} = \frac{2^{\frac{r}{2}} 2^{\frac{r}{2}}(\frac{r}{2})!}{(\frac{r}{2})!} = 2^r \tag{4.25}$$

olarak bulunur. Aynı şekilde x^{r-2}'nin katsayısının bulalım:

$$(-2)^{\frac{r-2}{2}} \frac{r(r-2)\dots(r-r+2)}{(r-2)!} \frac{(-1)^{\frac{r}{2}} r!}{(\frac{r}{2})!}$$

$$= -2^{\frac{r-2}{2}} \frac{2^{\frac{r-2}{2}}\left(\frac{r}{2}\right)\left(\frac{r}{2}-1\right)\dots 1}{(r-2)!} \frac{r(r-1)(r-2)!}{(\frac{r}{2})!}$$

$$= -2^{r-2}\frac{\left(\frac{r}{2}\right)!\,r(r-1)}{(\frac{r}{2})!} = -\frac{r(r-1)}{1!}2^{r-2} \tag{4.26}$$

Bu şekilde devam edersek *r*'nin bir çift tam sayı olduğu durum için Hermit polinomu:

$$H_r(x) = 2^r x^r - \frac{r(r-1)}{1!}2^{r-2}x^{r-2} + \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{2!}2^{r-4}x^{r-4} + \cdots + \frac{(-1)^{\frac{r}{2}}\,r!}{(\frac{r}{2})!} \tag{4.27}$$

olarak bulunur. Bu toplamı toplam sembolü kullanarak yazılırsa

$$H_r(x) = \sum_{p=0}^{\frac{r}{2}} (-1)^{\frac{r}{2}-p}\frac{r!}{(2p)!\left(\frac{r}{2}-p\right)!}(2x)^{2p} \tag{4.28}$$

elde edilir. Aynı işlemler (4.16) eşitliğini kullanarak *r*'nin tek tam sayı ve $n = r$ olduğu durum için yapılır ve Hermit polinomu toplam sembolü kullanarak yazılırsa

$$H_r(x) = \sum_{p=0}^{\frac{r-1}{2}} (-1)^{\frac{r-1}{2}-p}\frac{r!}{(2p+1)!\left(\frac{r-1}{2}-p\right)!}(2x)^{2p+1} \tag{4.29}$$

elde edilir. (4.28) ve (4.29) formülleri tam değer fonksiyonu kullanılarak birleştirilirse, *n* bir tam sayı olmak üzere $H_n(x)$ Hermit polinomu:

$$H_n(x) = \sum_{p=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^p \frac{n!}{p!\,(n-2p)!}(2x)^{n-2p} \tag{4.30}$$

şeklinde formülize edilir. Burada

$$\left[\frac{n}{2}\right] = \begin{cases} \frac{n}{2} & , \quad n\ çift\ ise \\ \frac{n-1}{2} & , \quad n\ tek\ ise \end{cases} \tag{4.31}$$

olarak tanımlanır.

(4.30) formülü yardımıyla ilk birkaç Hermit polinomu hesaplanırsa

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$

$$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x \tag{4.32}$$

$$\vdots$$

elde edilir.

4.3 Hermit Polinomu için Tekrarlama (Rekürans) Bağıntıları

$$1) \sum_{h=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A(k,h) = \sum_{h=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{h} A(k,h-k) \tag{4.33}$$

$$2) \sum_{h=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A(k,h) = \sum_{h=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{h}{2}\right]} A(k,h-2k) \tag{4.34}$$

$$3) \sum_{h=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{h} B(k,h) = \sum_{h=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} B(k,h+k) \tag{4.35}$$

$$4) \sum_{h=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{h}{2}\right]} B(k,h) = \sum_{h=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} B(k,h+2k) \tag{4.36}$$

$$5) e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \tag{4.37}$$

Yukarıdaki seri özellikleri kullanılarak $e^{2xt}e^{-t^2}$ fonksiyonunun seri açılımı hesaplanırsa:

$$e^{2xt}e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n\frac{t^n}{n!}\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{t^{2p}}{p!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p(2x)^n t^{n+2p}}{n!\,p!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{[\frac{p}{2}]}\frac{(-1)^p(2x)^{n-2p}t^n}{(n-2p)!\,p!} = \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\sum_{p=0}^{[\frac{p}{2}]}\frac{(-1)^p(2x)^{n-2p}}{(n-2p)!\,p!}\,n!}_{H_n(x)}\frac{t^n}{n!} \quad (4.38)$$

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{t^n}{n!} \quad (4.39)$$

elde edilir.

Bu seri açılımı yardımıyla Hermit polinomları için aşağıdaki tekrarlama (rekürans) bağıntıları hesaplanır.

Teorem 4.1 Hermit polinomları için

$$2\mathrm{x}H_r(\mathrm{x}) = 2\mathrm{r}H_{r-1}(\mathrm{x}) + H_{r+1}(\mathrm{x}) \quad (4.40)$$

rekürans bağıntısı sağlanır.

İspat 4.1

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{r=0}^{\infty}H_r(x)\frac{t^r}{r!} \quad (4.41)$$

açılımının *t*'ye göre türev alınırsa

$$(2\mathrm{x}-2\mathrm{t})e^{2xt-t^2} = \sum_{r=1}^{\infty}rH_r(x)\frac{t^{r-1}}{r!} \quad (4.42)$$

elde edilir. Burada e^{2xt-t^2} yerine (4.41) eşitliği yazılırsa:

$$2x\sum_{r=0}^{\infty}H_r(x)\frac{t^r}{r!} - 2\sum_{r=0}^{\infty}H_r(x)\frac{t^{r+1}}{r!} = \sum_{r=1}^{\infty}rH_r(x)\frac{t^{r-1}}{r!} \quad (4.43)$$

$$2x\left\{H_0 + H_1.\frac{t}{1!} + \cdots + H_r\frac{t^r}{r!} + \cdots\right\} - 2\left\{H_0t + H_1.\frac{t^2}{1!} + \cdots + H_r\frac{t^{r+1}}{r!} + \cdots\right\}$$

$$= \left\{ H_1 + 2H_2 \frac{t^1}{2!} + \cdots + rH_r(x) \frac{t^{r-1}}{r!} + \cdots \right\} \tag{4.44}$$

(4.44) eşitliğinde iki tarafın katsayıları eşitlenirse:

$$2xH_0 = H_1 \tag{4.45}$$

$$2xH_1 - 2H_0 = 2H_2 \tag{4.46}$$

$$\vdots$$

$$2xH_r(x) = 2rH_{r-1}(x) + H_{r+1}(x) \tag{4.47}$$

rekürans bağıntısı elde edilir.

Teorem 4.2 $r \geq 1$ için

$$H_r{}'(x) = 2rH_{r-1}(x) \tag{4.48}$$

eşitliği sağlanır.

İspat 4.2

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{r=0}^{\infty} H_r(x) \frac{t^r}{r!} \tag{4.49}$$

açılımının x'e göre türev alınırsa

$$2te^{2xt-t^2} = \sum_{r=0}^{\infty} H_r{}'(x) \frac{t^r}{r!} \tag{4.50}$$

(4.50) denkleminde e^{2xt-t^2} yerine (4.49)'daki toplam ifadesi yazılırsa

$$2\sum_{r=0}^{\infty} H_r(x) \frac{t^{r+1}}{r!} = \sum_{r=0}^{\infty} H_r{}'(x) \frac{t^r}{r!} \tag{4.51}$$

eşitliği bulunur. (4.51) eşitliğinin iki yanındaki serilerin terimleri açık olarak yazılırsa

$$2\left\{ H_0(x) \frac{t}{0!} + H_1(x) \frac{t^2}{1!} + \cdots + H_r(x) \frac{t^{r+1}}{r!} + \cdots \right\} \tag{4.52}$$

$$= \left\{ H_0{}'(x) + H_1{}'(x)\frac{t}{1!} + H_2{}'(x)\frac{t^2}{2!} + \cdots \right\}$$

elde edilir. (4.52) eşitliğinde iki tarafın katsayıları eşitlenirse:

$$H_1{}'(\mathrm{x}) = 2H_0(x) \tag{4.53}$$

$$H_2{}'(\mathrm{x}) = 2.2H_1(\mathrm{x}) \tag{4.54}$$

$$\vdots$$

$$H_r{}'(\mathrm{x}) = 2rH_{r-1}(x) \tag{4.55}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 4.3 Rodrigez Formülü

Hermit polinomlarının sağladığı bir diğer denklem de Rodriguez formülüdür. Rodrigez formülü,

$$H_r(y) = (-1)^r e^{y^2}\frac{\partial^r}{\partial y^r}(e^{-y^2}) \tag{4.56}$$

şeklindedir.

İspat 4.3

$$e^{2yt-t^2} = \sum_{r=0}^{\infty} H_r(y)\frac{t^r}{r!} \tag{4.57}$$

denklemindeki e^{2yt-t^2} fonksiyonunun kuvvetine y^2 ekleyip çıkarılırsa

$$e^{[-t^2+2yt+y^2-y^2]} = e^{[y^2-(y-t)^2]} = \sum_{r=0}^{\infty} H_r(y)\frac{t^r}{r!} \tag{4.58}$$

elde edilir. (4.58) toplamının açılmış hali

$$H_0(y) + H_1(y)\frac{t}{1!} + \cdots + H_r(y)\frac{t^r}{r!} + \cdots = e^{y^2}.e^{-(y-t)^2} = f(y,t) \tag{4.59}$$

şeklindedir.

(4.59) eşitliğinin *r* kez *t*'ye göre türevi alınırsa

$$H_r(y) + t\,H_{r+1}(y) + \cdots = e^{y^2}\left[\frac{\partial^r}{\partial t^r}(e^{-(y-t)^2})\right] \tag{4.60}$$

denklemi elde edilir. $y - t = u$ alınırsa

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial u} \tag{4.61}$$

ve buradan da

$$\frac{\partial^r}{\partial t^r} = (-1)^r \frac{\partial^r}{\partial u^r} \tag{4.62}$$

yazılabilir. (4.60) ve (4.62) denklemlerinden $t = 0$ için

$$H_r(x) = e^{y^2}\left[(-1)^r \frac{\partial^r}{\partial u}(e^{-u^2})\right]_{t=0} = e^{y^2}\left[(-1)^r \frac{\partial^r}{\partial y^r}\left(e^{-y^2}\right)\right] \tag{4.63}$$

elde edilir.

Teorem 4.4

Hermit polinomları için

$$xH_r{}'(\mathrm{x}) = rH_{r-1}{}'(x) + rH_r(x) \quad , r \geq 1 \tag{4.64}$$

rekürans bağıntısı sağlanır.

İspat 4.4

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{r=0}^{\infty} H_r(x)\frac{t^r}{r!} \tag{4.65}$$

(4.65) denkleminin t'ye göre türevi alınırsa,

$$2(x-t)e^{2xt-t^2} = \sum_{r=1}^{\infty} rH_r(x)\frac{t^{r-1}}{r!} \tag{4.66}$$

denklemi elde edilir. Aynı şekilde, (4.65) denkleminin x'e göre türevi alınırsa

$$2te^{2xt-t^2} = \sum_{r=0}^{\infty} H_r{}'(\mathrm{x})\ \frac{t^r}{r!} \tag{4.67}$$

bulunur. (4.66) denklemi t ile, (4.67) denklemi *(x-t)* ile çarpılırsa sırasıyla

$$2t(x-t)e^{2xt-t^2} = \sum_{r=1}^{\infty} rH_r(x)\frac{t^r}{r!} \tag{4.68}$$

$$2t(x-t)e^{2xt-t^2} = (x-t)\sum_{r=0}^{\infty} H_r{}'(\mathrm{x})\ \frac{t^r}{r!} \tag{4.69}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin sağ taraflarını eşitleyerek

$$\sum_{r=1}^{\infty} rH_r(x)\frac{t^r}{r!} \ + \sum_{r=0}^{\infty} H_r{}'(\mathrm{x})\ \frac{t^{r+1}}{r!} = x\sum_{r=0}^{\infty} H_r{}'(\mathrm{x})\ \frac{t^r}{r!} \tag{4.70}$$

elde edilir. (4.70) eşitliği *t*'nin kuvvetleri aynı olacak şekilde düzenlenirse

$$\sum_{r=1}^{\infty} rH_r(x)\frac{t^r}{r!} \ + \sum_{r=1}^{\infty} H_{r-1}{}'(\mathrm{x})\ \frac{t^r}{(r-1)!} = x\sum_{r=0}^{\infty} H_r{}'(\mathrm{x})\ \frac{t^r}{r!} \tag{4.71}$$

eşitliği elde edilir.

(4.71) eşitliğinde *t*'nin aynı kuvvetleri karşılaştırıldığında

$$\frac{rH_r(x)}{r!} + \frac{H'_{r-1}(x)}{(r-1)!} = \frac{xH'_r(x)}{r!} \tag{4.72}$$

eşitliği, ve buradan da

$$\mathrm{xH'_r(x)} = \mathrm{r}H_r(x) + \mathrm{rH'_{r-1}(x)} \tag{4.73}$$

rekürans bağıntısı elde edilir.

5
HERMİT SIRALAMA YÖNTEMİ

5.1 Hermit Sıralama Yöntemi

$a \leq x \leq b$ olmak üzere

$$\sum_{i=0}^{m} Q_i(x)\ {}^{C}D^{i\alpha}\, y(x) = f(x) \tag{5.1}$$

kesirli mertebeden diferansiyel denklemi

$${}^{C}D^{k}\, y(a) = \mu_k \qquad , (k = 0,1, \dots , [\![m\alpha]\!] - 1) \tag{5.2}$$

koşulları altında göz önüne alınsın. Burada $0 < \alpha \leq 1$, $n - 1 < m\alpha < n$ ve $m, n \in \mathbb{N}^{+}$ dır.

$N \in \mathbb{N}^{+}$ ve $[\![m\alpha]\!] \leq N$ olmak üzere, (5.1) kesirli diferansiyel denkleminin

$$y(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n H_n(x^{\alpha}) = a_0 H_0(x^{\alpha}) + a_1 H_1(x^{\alpha}) + \cdots + a_N H_N(x^{\alpha}) \tag{5.3}$$

(5.3)'deki kesilmiş (sonlu) Hermit serisi formunda bir yaklaşık çözümünün var olduğu kabul edilsin. Denklem (5.3)'ü

$$[y(x)] = H(x^{\alpha}).A = [H_0(x^{\alpha}) \dots H_N(x^{\alpha})].[a_0 \dots a_N]^{T} \tag{5.4}$$

olarak matris şeklinde ifade edebiliriz. $a \leq x \leq b$ için x_j sıralama noktaları

$$x_j = a + \frac{b-a}{N} j \ , \qquad (j = 0,1, \dots , N) \tag{5.5}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda (5.4) ifadesi x_j sıralama noktaları için

$$\left[y(x_j)\right] = H\left(x_j^{\alpha}\right) A \ , \quad (j = 0,1, \dots N) \tag{5.6}$$

yani

$$\begin{bmatrix} y(x_0) \\ \vdots \\ y(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_0(x_0^\alpha) & \cdots & H_N(x_0^\alpha) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_0(x_N^\alpha) & \cdots & H_N(x_N^\alpha) \end{bmatrix}_{(N+1)x(N+1)} \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}_{(N+1)x1} \tag{5.7}$$

şeklini alır. 4. Bölümde tanımlanan Hermit polinomlarının

$$H_n(x) = \sum_{p=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^p \frac{n!}{p!\,(n-2p)!} (2x)^{n-2p} \tag{5.8}$$

özelliği kullanılarak Hermit polinomları N'nin tek ve çift değerlerine göre aşağıdaki gibi matris formuna dönüştürülebilir:

N tek ise:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} H_0(x^\alpha) \\ H_1(x^\alpha) \\ \vdots \\ H_{N-1}(x^\alpha) \\ H_N(x^\alpha) \end{bmatrix}}_{H^T(x^\alpha)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2^0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2^1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{\left(\frac{N-5}{2}\right)} \frac{2^0}{0!} \frac{(N-1)!}{\left(\frac{N-1}{2}\right)!} & 0 & \cdots & 2^{N-1} & 0 \\ 0 & (-1)^{\left(\frac{N-1}{2}\right)} \frac{2^1}{1!} \frac{N!}{\left(\frac{N-1}{2}\right)!} & \cdots & 0 & 2^N \end{bmatrix}}_{\Delta} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ x^\alpha \\ \vdots \\ x^{(N-1)\alpha} \\ x^{N\alpha} \end{bmatrix}}_{X^T(x^\alpha)} \tag{5.9}$$

N çift ise:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} H_0(x^\alpha) \\ H_1(x^\alpha) \\ \vdots \\ H_{N-1}(x^\alpha) \\ H_N(x^\alpha) \end{bmatrix}}_{H^T(x^\alpha)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2^0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2^1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & (-1)^{\left(\frac{N-2}{2}\right)} \frac{2^1}{1!} \frac{(N-1)!}{\left(\frac{N-1}{2}\right)!} & \cdots & 2^{N-1} & 0 \\ (-1)^{\left(\frac{N-4}{2}\right)} \frac{2^0}{0!} \frac{N!}{\left(\frac{N}{2}\right)!} & 0 & \cdots & 0 & 2^N \end{bmatrix}}_{\Delta} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ x^\alpha \\ \vdots \\ x^{(N-1)\alpha} \\ x^{N\alpha} \end{bmatrix}}_{X^T(x^\alpha)} \tag{5.10}$$

Bu durumda, (5.9) ve (5.10) denklemleri

$$H^T(x^\alpha) = \Delta . X^T(x^\alpha) \tag{5.11}$$

şeklinde yazılabilir. Her iki tarafın transpozesi alınırsa (5.11) denklemi kısaca

$$H = X . \Delta^T \tag{5.12}$$

şeklini alır. Burada $X(x^\alpha)$ matrisi, c sayısı $a \le x \le b$ aralığındaki herhangi bir sayı olmak üzere

$$X(x^{\alpha}) = \left[(x-c)^{0} \quad (x-c)^{1\alpha} \quad \dots \quad (x-c)^{N\alpha}\right] \tag{5.13}$$

olarak tanımlanır. (5.13) ile tanımlanmış $X(x^{\alpha})$'nın α. Caputo türevini hesaplamak için:

$${}^{C}D^{\alpha}\,\mathrm{X}(x^{\alpha}) = \left[{}^{C}D^{\alpha}(x-c)^{0} \quad {}^{C}D^{\alpha}(x-c)^{1\alpha} \quad \dots \quad {}^{C}D^{\alpha}(x-c)^{N\alpha}\right] \tag{5.14}$$

yazalım. Bu durumda

$$\underbrace{\begin{bmatrix} {}^{C}D^{\alpha}(x-c)^{0} \\ {}^{C}D^{\alpha}(x-c)^{1\alpha} \\ \vdots \\ {}^{C}D^{\alpha}(x-c)^{N\alpha} \end{bmatrix}}_{{}^{C}D^{\alpha}\,X^{T}(x^{\alpha})} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \Gamma(\alpha+1) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\Gamma(N\alpha+1)}{\Gamma((N-1)\alpha+1)} & 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} (x-c)^{0} \\ (x-c)^{1\alpha} \\ \vdots \\ (x-c)^{N\alpha} \end{bmatrix}}_{\mathrm{X}^{T}(x^{\alpha})} \tag{5.15}$$

yani

$${}^{C}D^{\alpha}\,\mathrm{X}(x^{\alpha}) = \mathrm{X}(x^{\alpha})B^{T} \tag{5.16}$$

eşitliği elde edilir. (5.16)'nın tekrar Caputo türevini alırsak ${}^{C}D^{2\alpha}$ türevi:

$${}^{C}D^{\alpha}\,{}^{C}D^{\alpha}\,\mathrm{X}(x^{\alpha}) = {}^{C}D^{2\alpha}\,\mathrm{X}(x^{\alpha}) = \underbrace{{}^{C}D^{\alpha}\,\mathrm{X}(x^{\alpha})}_{\mathrm{X}(x^{\alpha})B^{T}} B^{T} = \mathrm{X}(x^{\alpha})(B^{T})^{2} \tag{5.17}$$

olur. Bu şekilde devam edilirse $X(x^{\alpha})$'nın $i\alpha$. Caputo türevi

$${}^{C}D^{i\alpha}\,X(x^{\alpha}) = \mathrm{X}(x^{\alpha})(B^{T})^{i} \tag{5.18}$$

olarak bulunur.

(5.11) denklemi (5.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$y(x) = X(x^{\alpha}).\Delta^{T}A \tag{5.19}$$

elde edilir. (5.19)'un $i\alpha$. Caputo türevi alınır ve (5.18)'de elde edilen denklem de kullanılırsa:

$${}^{C}D^{i\alpha}\,y(x) = \mathrm{X}(x^{\alpha})(B^{T})^{i}\,\Delta^{T}A \tag{5.20}$$

sonucuna ulaşılır.

(5.1) kesirli diferansiyel denklemi $x = x_j$, $(j = 0,1,\dots N)$ sıralama noktaları için

$$\sum_{i=0}^{m} Q_i(x_j)\ {}^{C}D^{i\alpha}\, y(x_j) = f(x_j) \tag{5.21}$$

eşitliğini sağlar. Bu eşitlik

$$\underbrace{\begin{bmatrix} Q_i(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_i(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q_i(x_N) \end{bmatrix}}_{Q_i} \underbrace{\begin{bmatrix} {}^{C}D^{i\alpha}\, \mathrm{y}(x_0) \\ {}^{C}D^{i\alpha}\, \mathrm{y}(x_1) \\ \vdots \\ {}^{C}D^{i\alpha}\, \mathrm{y}(x_N) \end{bmatrix}}_{Y^{i\alpha}} = \underbrace{\begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{bmatrix}}_{F} \tag{5.22}$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda (5.21) denklemi

$$\sum_{i=0}^{m} Q_i\, Y^{i\alpha} = F \tag{5.23}$$

şeklinde matris formda ifade edilmiş olur.

Benzer şekilde (5.20) eşitliğini $x = x_j$, $(j = 0,1, \dots N)$ sıralama noktaları için hesaplar ve matris formunda yazarsak

$${}^{C}D^{i\alpha}\, y(x_j) = \mathrm{X}(x_j{}^{\alpha})(B^T)^i\, \Delta^T A \tag{5.24}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} {}^{C}D^{i\alpha}\, y(x_0) \\ {}^{C}D^{i\alpha}\, y(x_1) \\ \vdots \\ {}^{C}D^{i\alpha}\, y(x_N) \end{bmatrix}}_{Y^{i\alpha}} = \underbrace{\begin{bmatrix} X(x_0{}^{\alpha}) \\ X(x_1{}^{\alpha}) \\ \vdots \\ X(x_N{}^{\alpha}) \end{bmatrix}}_{X^{\alpha}} \left[(B^T)^i\, \Delta^T A\right] \tag{5.25}$$

elde edilir. (5.25)'deki X^{α} matrisi

$$X^{\alpha} = \begin{bmatrix} X(x_0{}^{\alpha}) \\ X(x_1{}^{\alpha}) \\ \vdots \\ X(x_N{}^{\alpha}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (x_0 - c)^{\alpha} & \cdots & (x_0 - c)^{N\alpha} \\ 1 & (x_1 - c)^{\alpha} & \cdots & (x_1 - c)^{N\alpha} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (x_N - c)^{\alpha} & \cdots & (x_N - c)^{N\alpha} \end{bmatrix} \tag{5.26}$$

olarak tanımlanır. (5.25) eşitliği (5.23) toplamında yerine yazılırsa

$$\sum_{i=0}^{m} Q_i \, X^{\alpha}(B^T)^i \, \Delta^T A = F \tag{5.27}$$

elde edilir.

$$\mathrm{V} = [V_{kr}] = \sum_{i=0}^{m} Q_i \, X^{\alpha}(B^T)^i \, \Delta^T \, , \quad k, r = 0, \dots, N \tag{5.28}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda (5.27) denklemi

$$\mathrm{VA} = \mathrm{F} \tag{5.29}$$

şeklini alır. (5.29) eşitliği $(N+1)$ x $(N+1)$'lik bir cebirsel sistem olarak yazılabilir. Bu sistemin arttırılmış matrisi ise

$$[V; F] = \begin{bmatrix} V_{00} & \cdots & V_{0N} & ; & f(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ V_{N0} & \cdots & V_{NN} & ; & f(x_N) \end{bmatrix} \tag{5.30}$$

olur. (5.2) denkleminde (5.20) eşitliği yerine yazılırsa

$$\mathrm{X}^{\alpha}(a)(B^T)^k \; \Delta^T A = \mu_k \quad , (k = 0,1, \dots, [\![m\alpha]\!] - 1) \tag{5.31}$$

elde edilir.

$$Z_k = \mathrm{X}^{\alpha}(a)(B^T)^k \, \Delta^T = \begin{bmatrix} Z_{k0} & Z_{k1} & \dots & Z_{k([\![m\alpha]\!]-1)} \end{bmatrix} \tag{5.32}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda (5.31) eşitliği

$$Z_k . A = \mu_k \quad , \quad (k = 0,1, \dots, [\![m\alpha]\!] - 1) \tag{5.33}$$

halini alır. (5.33) sisteminin arttırılmış matrisi

$$[Z_k; \mu_k] = \begin{bmatrix} Z_{00} & \cdots & Z_{0N} & ; & \mu_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ Z_{([\![m\alpha]\!]-1)0} & \cdots & Z_{([\![m\alpha]\!]-1)N} & ; & \mu_{([\![m\alpha]\!]-1)} \end{bmatrix} \tag{5.34}$$

olarak elde edilir. (5.30) matrisinin son $[\![m\alpha]\!]$ satırı silinerek silinen satırların yerine (5.34) matrisi yazılırsa,

$$[\tilde{V},\tilde{F}]=\begin{bmatrix} V_{00} & \cdots & V_{0N} & ; & f(x_0) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ V_{(N-[\![m\alpha]\!]-1)0} & \ddots & V_{(N-[\![m\alpha]\!]-1)N} & ; & f\left(x_{N-[\![m\alpha]\!]-1}\right) \\ Z_{00} & \cdots & Z_{0N} & ; & \mu_0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ Z_{([\![m\alpha]\!]-1)0} & & Z_{([\![m\alpha]\!]-1)N} & & \mu_{([\![m\alpha]\!]-1)} \end{bmatrix} \tag{5.35}$$

elde edilir. (5.35) matrisi $\tilde{V}A=\tilde{F}$ şeklinde de yazılabilir.

Eğer $\det(\widetilde{V})\neq 0$ ise (5.35)'in çözümü

$$A=(\tilde{V})^{-1}\tilde{F} \tag{5.36}$$

şeklindedir ve böylece

$$A=[a_0\ldots a_n]^T \tag{5.37}$$

matrisi bulunmuş olur.

Bu durumda (5.1) diferansiyel denkleminin Hermit polinomu çözümü

$$y(x)=\sum_{n=0}^{N}a_nH_n(x^\alpha)=a_0H_0(x^\alpha)+a_1H_1(x^\alpha)+\cdots+a_NH_N(x^\alpha) \tag{5.38}$$

şeklinde elde edilir.

5.2 Örnekler

Örnek 5.1

$0\leq x\leq 1$ olmak üzere

$$y(x)+2\,D^{\,0,5}y(x)=x^2+\frac{4}{\Gamma(2,5)}\sqrt{x^3}+1\,,\qquad y(0)=1 \tag{5.39}$$

kesirli diferansiyel denkleminin analitik çözümü $y(x)=x^2+1$ fonksiyonudur. Bu diferansiyel denkleme $N=4,\ \alpha=0{,}5$ ve $m=2$ için Hermit sıralama yöntemi uygulayarak diferansiyel denklemin

$$y(x)=\sum_{n=0}^{4}a_nH_n(x^\alpha) \tag{5.40}$$

sonlu Hermit serisi şeklindeki yaklaşık çözümünü bulalım.

$m = 2$ için (5.39) diferansiyel denkleminden $Q_0(x) = 1,\ Q_1(x) = 2,\ Q_2(x) = 0$ ve $f(x) = x^2 + \frac{4}{\Gamma(2,5)}\sqrt{x^3} + 1$ elde edilir. Ayrıca, $0 \le x \le 1$ ve $N = 4$ için sıralama noktaları $x_0 = 0,\ x_1 = 0{,}25\,,\ x_2 = 0{,}5\,,\ x_3 = 0{,}75\,,\ x_4 = 1$ olarak hesaplanır.

Bu durumda Hermit sıralama yöntemi uygulamak için kullanılacak matrisler:

$$Q_0(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ Q_1(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ Q_2(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

$$\Delta^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -48 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix},\ B^T = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}8862 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}1284 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}3293 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}5045 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

$$X^{0,5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}125 & 0{,}0625 \\ 1 & 0{,}707 & 0{,}5 & 0{,}354 & 0{,}25 \\ 1 & 0{,}866 & 0{,}75 & 0{,}65 & 0{,}563 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} 1 \\ 1{,}439 \\ 2{,}314 \\ 3{,}517 \\ 5{,}009 \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

olarak bulunur. (5.41), (5.42) ve (5.43) matrisleri kullanılarak (5.35) arttırılmış matrisi Matlab programı yardımıyla

$$[\tilde{V}, \tilde{F}] = \begin{bmatrix} 1 & 3{,}547 & -1{,}991 & -21{,}281 & 11{,}892\ ; & 1 \\ 1 & 4{,}545 & 3{,}513 & -20{,}952 & -47{,}144\ ; & 1{,}439 \\ 1 & 4{,}959 & 6{,}383 & -16{,}292 & -67{,}575\ ; & 2{,}314 \\ 1 & 5{,}277 & 8{,}818 & -10{,}514 & -77{,}541\ ; & 3{,}517 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 12\ ; & 1 \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

olarak elde edilir. $\det(\widetilde{V}) \neq 0$ olduğundan Matlab programı yardımıyla sistemin çözümü yapılırsa A katsayılar matrisi

$$A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}75 \\ 3{,}754.10^{-15} \\ 0{,}75 \\ 6{,}223.10^{-16} \\ 0{,}0625 \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

olarak bulunur. $0 \le n \le 4$ için $H_n(\sqrt{x})$ Hermit polinomları:

$$H_0(\sqrt{x}) = 1$$

$$H_1(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}$$

$$H_2(\sqrt{x}) = 4x - 2$$

$$H_3(\sqrt{x}) = 8\sqrt{x^3} - 12\sqrt{x}$$

$$H_4(\sqrt{x}) = 16x^2 - 48x + 12 \qquad (5.46)$$

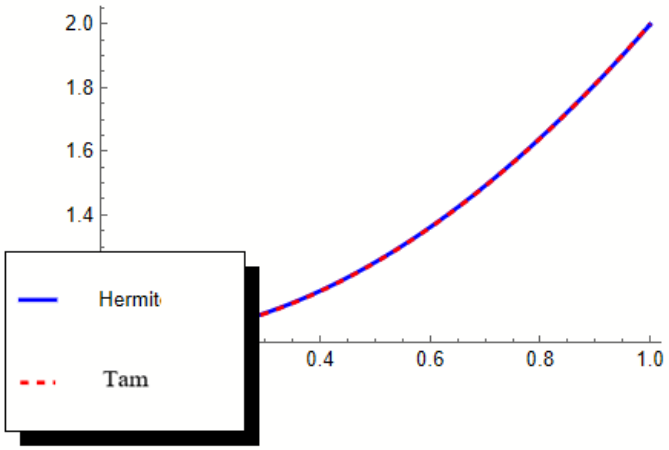
olduğundan, (5.39) diferansiyel denkleminin HSY ile elde edilen (5.40) yaklaşık çözümü (5.45) ve (5.46) eşitlikleri kullanılarak

$$y(x) = x^2 + 4{,}983.10^{-15}\sqrt{x^3} - 8{,}882.10^{-16}\,x + 3{,}231.10^{-17}\sqrt{x} + 1 \qquad (5.47)$$

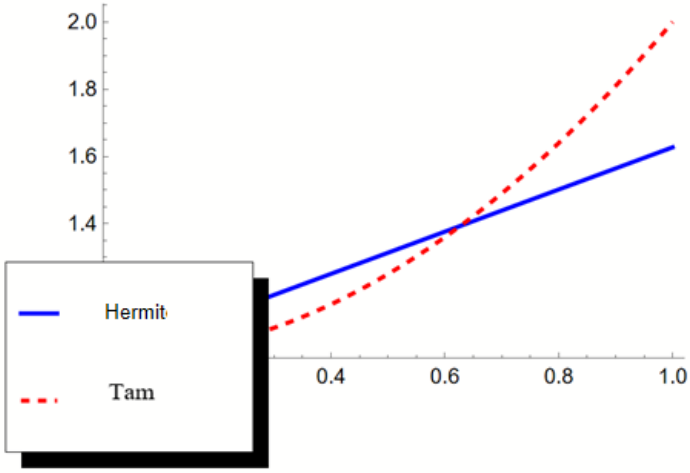
şeklinde elde edilir.

Tablo 5.1 Örnek 5.1'in tam çözümü ile yaklaşık çözümünün karşılaştırılması

x_j	Tam çözüm	HSY ile $N = 4$ için yaklaşık çözüm	Mutlak Hata
0	**1**	**1**	**0**
0,1	**1,01**	**1,01132**	$\mathbf{1,31674.10^{-3}}$
0,2	**1,04**	**1,04155**	$\mathbf{1,55369.10^{-3}}$
0,3	**1,09**	**1,09122**	$\mathbf{1,21611.10^{-3}}$
0,4	**1,16**	**1,16085**	$\mathbf{8,46623.10^{-4}}$
0,5	**1,25**	**1,2507**	$\mathbf{6,99605.10^{-4}}$
0,6	**1,36**	**1,36078**	$\mathbf{7,84693.10^{-4}}$
0,7	**1,49**	**1,49091**	$\mathbf{9,11475.10^{-4}}$
0,8	**1,64**	**1,64072**	$\mathbf{7,23495.10^{-4}}$
0,9	**1,81**	**1,80972**	$\mathbf{2,76306.10^{-4}}$
1	**2**	**1,99729**	$\mathbf{2,70621.10^{-3}}$



Şekil 5.1 $N = 4$ için Örnek 5.1'in tam çözümü ile yaklaşık çözümünün karşılaştırılması



Şekil 5.2 $N = 2$ için Örnek 5.1'in tam çözümü ile yaklaşık çözümünün karşılaştırılması

Örnek 5.2

$$x\,y(x) + (1+x)\,D^{\,0,5}y(x) = x^4 + \frac{6}{\Gamma(3,5)}\sqrt{x^7} - \frac{2}{\Gamma(2,5)}\sqrt{x^5} - x^2,\;\; y(0) = 0 \tag{5.48}$$

kesirli diferansiyel denklemine $0 \le x \le 1$, $N = 8,\ \alpha = 0,5$ ve $m = 2$ için Hermit sıralama yöntemi uygulayarak diferansiyel denklemin sonlu Hermit serisi şeklindeki

$$y(x) = \sum_{n=0}^{8} a_n H_n\left(\sqrt{x}\right) \tag{5.49}$$

yaklaşık çözümünü elde edelim. Bu çözüm için $Q_0(x) = x,\ Q_1(x) = 1 + x,$ $Q_2(x) = 0,\ f(x) = x^4 + \frac{6}{\Gamma(3,5)}\sqrt{x^7} - \frac{2}{\Gamma(2,5)}\sqrt{x^5} - x^2$ dır ve Hermit sıralama yöntemi uygulanır iken kullanılacak matrisler Matlab programı yardımıyla

$$Q_0(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}375 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}625 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}875 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.50}$$

$$Q_1(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}375 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}625 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}875 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{5.51}$$

$$Q_2(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}022 \\ -0{,}092 \\ -0{,}192 \\ -0{,}294 \\ -0{,}354 \\ -0{,}319 \\ -0{,}126 \\ 0{,}301 \end{bmatrix} \tag{5.52}$$

$$X^{0,5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0{,}354 & 0{,}125 & 0{,}442 & 0{,}016 & 0{,}006 & 0{,}002 & 0{,}001 & 0{,}0002 \\ 1 & 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}125 & 0{,}063 & 0{,}313 & 0{,}016 & 0{,}008 & 0{,}004 \\ 1 & 0{,}612 & 0{,}375 & 0{,}23 & 0{,}141 & 0{,}086 & 0{,}053 & 0{,}032 & 0{,}02 \\ 1 & 0{,}707 & 0{,}5 & 0{,}354 & 0{,}25 & 0{,}177 & 0{,}125 & 0{,}884 & 0{,}063 \\ 1 & 0{,}79 & 0{,}625 & 0{,}494 & 0{,}39 & 0{,}309 & 0{,}244 & 0{,}193 & 0{,}153 \\ 1 & 0{,}866 & 0{,}75 & 0{,}65 & 0{,}56 & 0{,}487 & 0{,}422 & 0{,}365 & 0{,}316 \\ 1 & 0{,}935 & 0{,}875 & 0{,}818 & 0{,}766 & 0{,}716 & 0{,}67 & 0{,}627 & 0{,}586 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.53}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}886 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}128 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}505 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}661 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}805 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}939 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2{,}063 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

$$\Delta^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 12 & 0 & -120 & 0 & 1680 \\ 0 & 2 & 0 & -12 & 0 & 120 & 0 & -1680 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -48 & 0 & 720 & 0 & -13440 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & -160 & 0 & 3360 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & -480 & 0 & 13440 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 & 0 & -1344 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 64 & 0 & -3584 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 128 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 256 \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

matrisleri olarak hesaplanır. Bu matrisler kullanılarak (5.35) matrisi oluşturulur ve Matlab programı yardımıyla sistemin çözümü yapılırsa A katsayılar matrisi

$$A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}125 \\ -9{,}688.10^{-10} \\ 2{,}0625 \\ -466.10^{-10} \\ 0{,}40625 \\ -4{,}081.10^{-11} \\ 0{,}016 \\ -8{,}785.10^{-13} \\ 1{,}127.10^{-13} \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

olarak elde edilir. $0 \leq n \leq 8$ için $H_n(\sqrt{x})$ Hermit polinomları :

$$H_0(\sqrt{x}) = 1$$

$$H_1(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}$$

$$H_2(\sqrt{x}) = 4x - 2$$

$$H_3(\sqrt{x}) = 8\sqrt{x^3} - 12\sqrt{x}$$

$$H_4(\sqrt{x}) = 16x^2 - 48x + 12$$

$$H_5(\sqrt{x}) = 32\sqrt{x^5} - 160\sqrt{x^3} + 120\sqrt{x}$$

$$H_6(\sqrt{x}) = 64x^3 - 480x^2 + 720x - 120$$

$$H_7(\sqrt{x}) = 128\sqrt{x^7} - 1344\sqrt{x^5} + 3360\sqrt{x^3} - 1680\sqrt{x}$$

$$H_8(\sqrt{x}) = 256x^4 - 3584x^3 + 13440x^2 - 13440x + 1680 \qquad (5.57)$$

şeklindedir. Bu durumda (5.48) diferansiyel denkleminin HSY ile elde edilen (5.49) yaklaşık çözümü

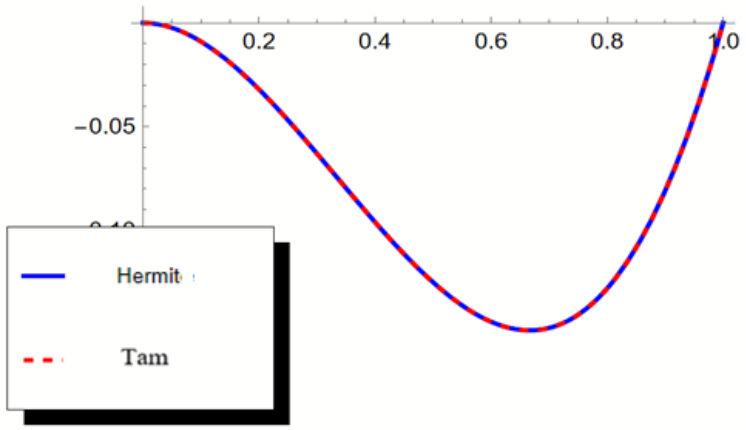
$$y(x) = 2{,}8828.10^{-11}x^4 - 1{,}1245.10^{-10}\sqrt{x^7} + x^3 - 1{,}2251.10^{-10}\sqrt{x^5} - x^2$$
$$+4{,}4092.10^{-12}\sqrt{x^3} - 4{,}8956.10^{-12}x + 7{,}7968.10^{-13}\sqrt{x}$$
$$+\ 1{,}554.10^{-15}$$

olarak bulunur.

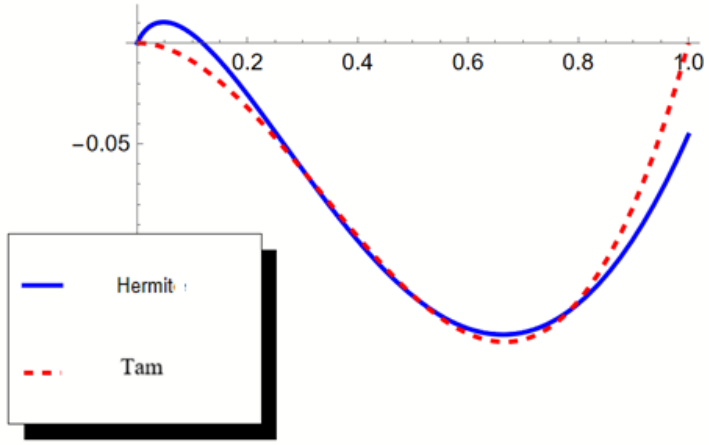
(5.48) diferansiyel denkleminin tam çözümü $y(x) = x^3 - x^2$ fonksiyonudur.

Tablo 5.2 Örnek 5.2'nin tam çözümü ile yaklaşık çözümünün karşılaştırılması

x_j	Tam çözüm	HSY ile $N = 8$ için yaklaşık çözüm	Mutlak Hata
0	**0**	**0**	**0**
0,1	**-0,009**	**-0,009**	$\mathbf{4,21191.10^{-15}}$
0,2	**-0,032**	**-0,032**	$\mathbf{2,70617.10^{-16}}$
0,3	**-0,063**	**-0,063**	$\mathbf{1,6237.10^{-15}}$
0,4	**-0,096**	**-0,096**	$\mathbf{1,48492.10^{-15}}$
0,5	**-0,125**	**-0,125**	$\mathbf{1,33227.10^{-15}}$
0,6	**-0,144**	**-0,144**	$\mathbf{1,22125.10^{-15}}$
0,7	**-0,147**	**-0,147**	$\mathbf{1,9984.10^{-15}}$
0,8	**-0,128**	**-0,128**	$\mathbf{9,99201.10^{-16}}$
0,9	**-0,081**	**-0,081**	**0**
1	**0**	$\mathbf{7{,}99361.10^{-15}}$	$\mathbf{7{,}99361.10^{-15}}$



Şekil 5.3 $N = 8$ için Örnek 5.2'nin tam çözümü ile yaklaşık çözümünün karşılaştırılması



Şekil 5.4 $N = 4$ için Örnek 5.2'nin tam çözümü ile yaklaşık çözümünün karşılaştırılması

6
SONUÇ

Bu çalışmada, bazı kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerini elde etmek için Hermit sıralama yöntemi tanıtılmıştır. Yöntemin geçerliliğini göstermek için bazı sayısal örnekler verilmiş ve elde edilen yaklaşık çözümler tam çözümler ile hem tablo hem de grafik gösterimi kullanılarak karşılaştırılmıştır. Yapılan tablo incelemelerinde HSY ile elde edilen çözümün tam çözüme yakın sonuçlar verdiği görülmüştür. Ayrıca farklı N değerleri için elde edilen HSY çözümleri ile tam çözüm grafiklerinin karşılaştırmalarının yapıldığı Şekil 5.1-Şekil 5.2 ve Şekil 5.3-Şekil 5.4 karşılaştırmalarında N değeri büyüdükçe elde edilen HSY çözümlerinin iyileştiği ve tam çözüme yaklaştığı gözlemlenmiştir.

Sonuç olarak, Hermit sıralama yönteminin kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerini elde etmek için etkili bir yöntem olduğu anlaşılmaktadır.

KAYNAKÇA

[1] K. Diethelm, The analysis of fractional differential equations. Springer-Verlag, 2010.

[2] K.S Miller and B. Ross, An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. John Wiley & Sons, 1993.

[3] S. Das, Functional fractional calculus for system identification and controls. Springer, 2008.

[4] K.B. Oldham and J. Spainer, The fractional calculus. Academic Press,1974.

[5] D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas and J.J. Trijullo, Fractional calculus: models and numerical methods. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2012.

[6] S. Harikrishnan, R.B. Ibrahim and K. Kanagarajan, "Fractional ulam-stability of fractional impulsive differential equation involving Hilfer-Katugampola fractional differential operator", Universal Journal of Mathematics and Applications, 1 (2),106-112, 2018.

[7] S. Yuste, "Weighted average finite difference methods for fractional diffusion equations", Journal Computational Physics, 1, 264-274, 2006.

[8] N.J. Ford and J.A. Connolly, "Systems-based decomposition schemes for the approximate solution of multi-term fractional differential equations", Journal of Computational and Applied Mathematics, 229, 382-391, 2009.

[9] A. Saadatmandi and M. Dehghan, "A new operational matrix for solving fractional-order differential equations", Comput. Math. Applications, 59, 1326–1336, 2010.

[10] K. Diethelm and N.J. Ford, "Multi-order fractional differential equations and their numerical solution", Applied Mathematics and Computation, 154, 621–640, 2004.

[11] P. Kumar and O.P. Agrawal, "An approximate method for numerical solution of fractional differential equations", Signal Processing, 86, 2602–2610, 2006.

[12] R. Polat, "Finite difference solution to the time-fractional differential-difference Burgers equation", Journal of Science and Technology, 12, 258–262, 2019.

[13] M. Karabacak and E. Celik, "The numerical solution of fractional differential-algebraic equations (FDAEs)", New Trends in Mathematical Sciences, 1(2), 1-6, 2013.

[14] A.E.M. El-Mesiry, A.M.A.El-Sayed and H.A.A. El-Saka, "Numerical methods for multi-term fractional (arbitrary) orders differential equations", Applied Mathematics and Computation, 160, 683-699, 2005.

[15] Z. Odibat and S. Momani, "Numerical methods for nonlinear partial differential equations of fractional order", Appl. Math. Model., 32, 28-39, 2008.

[16] S. Catal, “Solution of the different types of partial differential equations using differential transform and adomian decomposition methods”, Ordu Üniv. Bil. Tek. Derg., 3(1), 8-26, 2013.

[17] S.Alkan, “Approximate solutions of boundary value problems of fractional order by using Sinc-Galerkin method”, New Trends in Mathematical Sciences 2(1), 1-11, 2014.

[18] S.E. Das, “Beta kesirli türevli kesirli mertebeden sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümleri”, Marmara Fen Bilimleri Dergisi, 30(4), 478 – 486, 2018.

[19] Ö.Acan, Ö. Firat, Y. Keskin and G. Oturanc, “Conformable variational iteration method”, New Trends in Mathematical Sciences, 5(1), 172-178, 2017.

[20] H. Yang, “Homotopy analysis method for the time-fractional Boussinesq equation”, Universal Journal of Mathematics and Applications, 3(1), 12-18, 2020.

[21] V. Daftardar Gejji and H. Jafari, “Adomian decomposition: a tool for solving a system of fractional differential equations”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 301,508–518, 2005.

[22] H. Çicek and M. Modanlı, “Kesirli mertebeden pseudo-hiperbolik kısmi diferansiyel denkleminin homotopi pertürbasyon yöntemiyle yaklaşık çözümü”, Uşak Üniversitesi Fen ve Doğa Bilimleri Dergisi, 67-75, 2022.

[23] Ş. Toprakseven, “Numerical solutions of conformable fractional differential equations by Taylor and finite difference methods”, Süleyman Demirel University Journal of Natural and Applied Sciences, 23(3), 850-863, 2019.

[24] S. Yalcınbas, A. Konuralp, D. Dönmez Demir and H.H. Sorkun, “The solution of the fractional differential equation with the generalized Taylor collocation method”, IJRRAS, 2010.

[25] I.A. Ganaie and V.K. Kukreja, “Numerical solution of Burgers equation by cubic Hermite collocation method”, Applied Mathematics and Computation, 237, 571-581, 2014.

[26] G. Dattoli, “Laguerra and generalized Hermite polynomials: the point of view of the operation method”, Integral Transforms Special Func., 15, 93-99, 2004.

[27] N. Akgönüllü Pirim and F. Ayaz, “Hermite collocation method for fractional order differential equations”, An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications, 8(2), 228-236, 2018.

[28] K. Parand, M. Dehghan, A.R. Rezaei and S.M. Ghaderi, “An approximation algorithm for the solution of the nonlinear Lane–Emden type equations arising in astrophysics using Hermite functions collocation method”, Computer Physics Communications, 181, 1096–1108, 2010.

[29] M.A.M. Mu'lla, “Fractional calculus, fractional differential equations and applications”, Open Access Library Journal, 7, 1-9, 2020.

[30] I. Podlubny, Fractional differential equations an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. Academic press, 1999.

[31] J.M. Kimeu, Fractional calculus: definitions and applications. 4-2009.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Konferans Bildirileri

1. İ. Erdurmuş and P. Albayrak, “Hermite collocation approach for the solution of a class of fractional differential equations”, 7th International HYBRID Conference on Mathematical Advances and Applications, İstanbul, Türkiye, 8-11 May 2024, ss.107.