T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$\mathcal{F}(\mathbb{R}_q(1|1))$ ÜZERİNE İKİ PARAMETRELİ BİKOVARYANT DİFERANSİYEL HESAPLAR

İLKNUR TEMLİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
Dr. Öğr. Üyesi SALİH ÇELİK

İSTANBUL, 2018

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$\mathcal{F}(\mathbb{R}_q(1|1))$ ÜZERİNE İKİ PARAMETRELİ BİKOVARYANT DİFERANSİYEL HESAPLAR

İlknur TEMLİ tarafından hazırlanan tez çalışması 22.06.2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Dr. Salih ÇELİK

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Dr. Öğr. Üyesi Salih ÇELİK

Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Doç. Dr. Şeyda Canan TEKİN

İstanbul Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL

Yıldız Teknik Üniversitesi _____

ÖNSÖZ

Bir bilim insanı der ki ‘Bilim gerçeklerden kuruludur, tıpkı bir evin tuğlalardan kurulu olduğu gibi. Ancak gerçeklerin toplanması bilim değildir, tıpkı bir yığın tuğlanın ev anlamına gelmemesi gibi.’

Bilgi zaman zaman edinilmesi zor ama daha çok bulunduğunda anlaşılması güç bir olgudur, elde tutulabilmesi ise cabası.

Bu çalışma esnasında bana yol gösteren, bilim aşkıyla beni şevklendiren, edindiğim her bilgiyi birbirine bağlamamda yardımcı olan ve bilim dünyasının içinde çok, oldukça çok küçük bir yer kapladığımızı söylerken dahi ufuk çizgisini hedeflememizi öğütleyen tez danışmanım saygıdeğer hocam Dr.Salih ÇELİK’e teşekkürlerimi sunar ve minnetimi belirtmek isterim.

Haziran, 2018

İlknur TEMLİ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ iv

ÖZET v

ABSTRACT vii

BÖLÜM 1

GİRİŞ 1

1.1 Literatür Özeti 1
1.2 Tezin Amacı 2
1.3 Hipotez 2

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR 3

2.1 Süper Vektör Uzayı 3
2.2 Süper Cebirler 5
2.3 Süper-Hopf Cebirleri 6
2.4 Süper-Hopf Cebirinin Modül ve Ko-modülleri 7

BÖLÜM 3

$\mathcal{F}(\mathbb{R}_q(1|1))$ SÜPER HOPF CEBİRİ 9

3.1 Kuantum Süper Düzlemi 9
3.2 $O(\mathbb{R}_q(1|1))$ Süper Cebiri Üzerine Süper Hopf Cebir Yapısı 10

BÖLÜM 4

$\mathcal{F}(\mathbb{R}_q(1|1))$ ÜZERİNE BİKOVARYANT DİFERANSİYEL HESAP 12

4.1 $\mathbb{Z}_2$-Dereceli Diferansiyel Cebir 12
4.2 Bikovaryant Hesap 13

4.3 Komutasyon Bağıntıları 14
4.4 Kısmi Türevleri ile Olan Bağıntılar 18

BÖLÜM 5

R -MATRİSİ 21

5.1 Giriş 21
5.2 Kuantum R -Matrisi 21

BÖLÜM 6

$GL(1|1)$ SÜPER GRUBUNUN DEFORMASYONLARI 25

6.1 $M(1|1)$ Süper Matris Uzayı 25
6.2 $M_{p,q}(1|1)$ Kuantum Süper Matris Uzayı 25
6.3 $O(M_{p,q}(1|1))$ Süper Bi-cebiri 26
6.4 T Süper Matrisinin Tersi 28
6.5 T Süper Matrisinin Kuantum Süper Determinantı 30
6.6 $O(GL_{p,q}(1|1))$ Süper-Hopf Cebiri 31
6.7 $O(GL_{r,q}(1|1))$ Süper-Hopf Cebiri 33

BÖLÜM 7

SOL KOVARYANT DİFERANSİYEL HESAP 35

7.1 Sol Kovaryant Diferansiyel Hesap 35

BÖLÜM 8

SONUÇ VE ÖNERİLER 38
KAYNAKLAR 39
ÖZGEÇMİŞ 40

SİMGE LİSTESİ

$\|f\|$	f fonksiyonunun derecesi
μ	$\mathcal{A}$ cebiri üzerindeki çarpma tasviri
η	$\mathcal{A}$ cebiri üzerindeki birim tasviri
Δ	$\mathcal{A}$ cebiri üzerindeki ko-çarpma tasviri
ε	$\mathcal{A}$ cebiri üzerindeki ko-birim tasviri
S	$\mathcal{A}$ cebiri üzerindeki ko-ters tasviri
$\oplus$	Direkt toplam
$\otimes$	Tensör çarpım
$\mathbb{R}_q(1\|1)$	Kuantum süper düzlem
$\Lambda(\mathbb{R}_q(1\|1))$	Kuantum süper dış cebir
$sD_q(T)$	T süper matrisinin süper kuantum determinantı
$GL_q(1\|1)$	$\mathbb{Z}_2$-dereceli kuantum grubu
$GL_{p,q}(1\|1)$	2-parametreli $\mathbb{Z}_2$-dereceli kuantum grubu

ÖZET

$\mathcal{F}(\mathbb{R}_q(1|1))$ ÜZERİNE İKİ PARAMETRELİ BİKOVARYANT DİFERANSİYEL HESAPLAR

İlknur TEMLİ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Salih ÇELİK

Kompleks girişli süper matrisler, kompleks uzaylar üzerine, lineer tasvirler olarak etki eder. Tersi mevcut lineer tasvirler, bir grup oluşturur. Eğer 2×2-tipindeki süper matrislerin grubunu $GL(1|1)$ ile gösterirsek, bu gruptaki süper matrisleri $\mathbb{R}(1|1)$ uzayının lineer tasvirleri olarak düşünebiliriz.

Değişmeli olmayan süper geometriye yön veren temel yapılardan biri, asosyatif bir $\mathbb{Z}_2$-dereceli cebir (süper cebir) üzerine diferansiyel hesap kurmaktır. $\mathbb{Z}_2$-dereceli kuantum düzlemin koordinat cebiri üzerine, $GL_q(1|1)$ süper grubuna göre sol-kovaryant olan diferansiyel hesaplar kurulmuştur. Diferansiyel hesap, süper-Hopf cebirler üzerine de kurulabilir.

Bu çalışmada, deforme edilmiş $\mathbb{R}_q(1|1)$ süper düzlemi üzerindeki fonksiyonların cebiri (ki o, bir süper-Hopf cebiridir) üzerine bikovaryant olan iki adet 2-parametreli diferansiyel hesap kurulacak ve sonra da $GL(1|1)$ süper grubunun 2-parametreli deformasyonları elde edilerek, kurulan diferansiyel hesapların deforme edilmiş $O(GL_{p,q}(1|1))$ süper-Hopf cebirine göre sol-kovaryant oldukları gösterilecektir.

Anahtar kelimeler: Kuantum süper düzlem; süper-Hopf cebiri; diferansiyel hesap; kuantum süper grup.

ABSTRACT

TWO-PARAMETER BICOVARIANT DIFFERENTIAL CALCULI ON $\mathcal{F}(\mathbb{R}_q(1|1))$

İlknur TEMLİ

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Adviser: Assist. Prof. Dr. Salih ÇELİK

Supermatrices with complex entries act as linear transformations on complex spaces. Linear transformations that exist its inverse constitute a group. If we denote group of 2×2- supermatrices with $GL(1|1)$, we consider the supermatrices belong this group as linear trasnformations of space $\mathbb{R}(1|1)$.

One of the basic structure giving direction to the non-commutative supergeometry is to set up differential calculus on an associative superalgebra. It is constituted differantial calculi that left covariant with respect to supergroup $GL_q(1|1)$ on coordinate algebra of $\mathbb{Z}_2$-graded quantum plane. Differential calculus can be constituted on super-Hopf algebras, too.

In this study, it will be constituted two 2-parameter differential calculi that bicovariant on algebra of functions on deformed superplane $\mathbb{R}_q(1|1)$ which is a super-Hopf algebra. After the obtaining 2-parameter deformations of supergroup $GL(1|1)$, it will be shown that the differential calculi are left covariant with respect to super-Hopf algebra $O(GL_{p,q}(1|1))$.

Keywords: Quantum superplane; super-Hopf algebra; differential calculus; quantum supergroup.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Kuantum grupları tek bir tanıma sahip olmamakla birlikte, değişmeli olmayan uzayların simetri grupları olarak düşünülmesi nedeniyle matematikte ve matematiksel fizikte önemli bir inceleme alanına sahip olmuştur. Kuantum grupları ilk olarak 1986 da Drinfeld [1] tarafından yarı-basit Lie cebirleri üzerine yapılan çalışmada keşfedilmiştir. Bu çalışmayla, değişmeli olmayan Hopf cebirlerinin bir sınıfı olarak kuantum grupları elde edilmiştir.

Kelimenin tam anlamıyla bir grup belirtmeyen kuantum gruplara, değişmeli olmayan bazı cebirlerin bir deformasyonu olarak bakılmaktadır. Bu durum, koordinat cebirinin cebirsel özelliklerinin korunduğunu göstermekle beraber, değişmeli olmayan değişkenlerin türevlerinin ve diferansiyellerinin tanımlanıp tanımlanamayacağı sorusunu akla getirmiştir. Bu soruya genel bir cevap Connes [2] tarafından verilmiştir.

Birleşmeli cebir üzerindeki diferansiyel hesap Connes'un değişmeli olmayan geometri düşüncesine yön vermiş ve buradan hareketle, değişmeli olmayan diferansiyel hesap Woronowicz [3,4] tarafından geliştirilmiştir.

Bir diğer yaklaşım Manin'in [5] de kuantum düzlemi tanıtmasıyla başlar. Wess and Zumino [6], kuantum grubun etkisiyle, kuantum düzlem üzerine kovaryant olan bir diferansiyel hesap geliştirdiler.

Kuantum süper uzayları üzerine de birçok yazar tarafından değişik çalışmalar yapılmıştır.[7-10]

1.2 Tezin Amacı

Önce, $\mathcal{F}(\mathbb{R}_q(1|1))$ süper Hopf cebiri üzerine bikovaryant iki adet diferansiyel hesap kurulacak ve onların her ikisinin de grubun etkisi altında değişmediği (invaryant kaldığı) gösterilecektir. Bu hesaplar içerisinde koordinat fonksiyonları ve onların diferansiyelleri yer almaktadır. Daha sonra, $\mathbb{Z}_2$-dereceli $\mathbb{R}_q(1|1)$ düzlemiyle ilişkili olan R-matrisleri elde edilecektir.

1.3 Hipotez

$\mathbb{R}_q(1|1)$ süper düzlemi üzerindeki fonksiyonların cebiri -ki o $O(\mathbb{R}_q(1|1))$ ile gösterilmiştir- bir süper bi-cebirdir. Bu cebire bir eleman daha eklenerek $\mathcal{F}(\mathbb{R}_q(1|1))$ süper-Hopf cebiri elde edilir [8]. Eğer $\mathcal{F}(\mathbb{R}_q(1|1))$ cebirinin jeneratörlerini, onların diferansiyelleri ile birlikte düşünürsek, onlar arasında sağlanması muhtemel bazı komutasyon bağıntıları olacaktır. Bu çalışmada, onlar elde edilmektedir. Şüphesiz o bağıntılar, $\mathbb{Z}_2$-dereceli bir R-matrisi ile de verilebilir.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, yapılan çalışmada kullanılacak bazı kavramlar hakkında bilgi verilecektir. Bu bilgiler verilirken [11] den faydalanılmıştır.

2.1 Süper Vektör Uzayı

Tanım 2.1 V , k cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer V ,

$V = V_0 \oplus V_1 \qquad (0,1 \in \mathbb{Z}_2)$

şeklinde yazılabiliyorsa, V vektör uzayına $\mathbb{Z}_2$ **-dereceli vektör uzayı** veya **süper vektör uzayı** denir. $V_0 \cup V_1$ in elemanları homojen elemanlar olarak adlandırılır ve homojen elemanların derecesi $p(\vec{v})$ veya $|\vec{v}|$ ile gösterilir. Bu takdirde, $i \in \mathbb{Z}_2$ için $v \in V_i$ iken $|\cdot| : V_0 \cup V_1 \to \mathbb{Z}_2$,

$$|\vec{v}| = \begin{cases} 0, & \vec{v} \in V_0 \\ 1, & \vec{v} \in V_1 \end{cases}$$

yazılabilir.

Burada, V_0 ın elemanları **çift** ve V_1 in elemanları **tek** olarak isimlendirilir.

$\{e_i\}$, V süper vektör uzayının bir tabanı olsun. e_i , $i \le p$ iken çift ve $p < i \le p + r$ iken tek olmak üzere $(i, p, r \in \mathbb{N})$

$V = V_0 \oplus V_1$; $\qquad V_0 = \sum_{i=1}^{p} ke_i$, $\qquad V_1 = \sum_{i=p+1}^{p+r} ke_i$

şeklinde yazılabilir. Süper vektör uzayının **süper boyutu**, $\dim(V_0) = p$ ve $\dim(V_1) = r$ olmak üzere $\dim(V) = p|r$ şeklinde ifade edilir.

Örnek 2.1 Tanım 2.1 in özel bir hali olarak,

$$V_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : |x| = 0 \right\} \qquad \text{ve} \qquad V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix} : |\theta| = 1 \right\}$$

olmak üzere $V = V_0 \oplus V_1$ bir süper vektör uzayıdır ve bu uzay, literatürde $\mathbb{R}(1|1)$ ile gösterilmektedir.

Vektör uzaylarındaki bazı kavramlar, süper vektör uzayları için de tanımlanabilir:

Tanım 2.2 U ve V , birer süper vektör uzayı olsun. Bu uzayların **direkt toplamı**

$$\left.\begin{aligned} (U \oplus V)_0 &= U_0 \oplus V_0 \\ (U \oplus V)_1 &= U_1 \oplus V_1 \end{aligned}\right\} \; U \oplus V = (U \oplus V)_0 \oplus (U \oplus V)_1$$

şeklinde oluşturulur.

Tanım 2.3 U ve V , birer süper vektör uzayı olsun. Bu uzayların **tensör çarpımı**

$$(U \otimes V)_i = \bigoplus_{j+k=i} U_j \otimes V_k \qquad (i, j, k \in \mathbb{Z}_2)$$

şeklinde oluşturulur. Burada

$$(U \otimes V)_0 = (U_0 \otimes V_0) \oplus (U_1 \otimes V_1)$$
$$(U \otimes V)_1 = (U_0 \otimes V_1) \oplus (U_1 \otimes V_0)$$

dır.

Tensör çarpım, vektör uzaylarında olduğu gibi süper vektör uzaylarında da bir birim elemanına sahiptir ve birleşme özelliği vardır:

$U \otimes (V \otimes W) = (U \otimes V) \otimes W$.

Ancak vektör uzaylarından farklı olarak komutatiflik izomorfizmi işaret kuralı ile verilir:

$$C_{U,V} : U \otimes V \to V \otimes U$$
$$\vec{u} \otimes \vec{v} \mapsto (-1)^{|\vec{u}||\vec{v}|} \vec{v} \otimes \vec{u}$$

Tanım 2.4 U_i ve V_i, $(i=1,2)$ birer süper vektör uzayı ve $f_i : U_i \to V_i$ birer lineer tasvir olsun. f_1 ve f_2 nin **tensör çarpımı** $\forall u_1 \in U_1$ ve $\forall u_2 \in U_2$ için

$$f_1 \otimes f_2 : U_1 \otimes U_2 \to V_1 \otimes V_2$$
$$(f_1 \otimes f_2)(u_1 \otimes u_2) = f_1(u_1) \otimes f_2(u_2)$$

şeklinde tanımlanır.

2.2 Süper Cebirler

Bir süper cebir kavramı, bilinen cebir kavramına benzer şekilde tanımlanmaktadır.

Cebir, bir bilineer çarpma tasviri ile birlikte bir vektör uzayı olarak tanımlanabilir:

$\mathcal{A}$, k cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ lineer çarpma tasviri ve $k \longrightarrow \mathcal{A}$ lineer birim tasviri ile $\mathcal{A}$ ya birim elemanlı bir asosyatif cebir denir. Süper cebir tanımı da benzer şekilde yapılacaktır. Bir Λ süper cebiri, $|xy| = |x| + |y|$ olmak üzere

$$\Lambda \times \Lambda \to \Lambda,\ (x,y) \to xy$$

çarpma tasviriyle $\Lambda = \Lambda_0 \otimes \Lambda_1$ süper vektör uzayı olarak tanımlanabilir.

Tanım 2.5 $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ iki süper cebir olsun. $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ nin tensör çarpımı üzerine bir süper cebir yapısı $\forall a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ ve $\forall b_1, b_2 \in \mathcal{B}$ olmak üzere aşağıdaki şekilde verilir:

$$(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = (-1)^{|b_1||a_2|}(a_1 a_2 \otimes b_1 b_2)\ .$$

Aşağıdaki tanım, yukarıda ifade edilen süper cebir tanımının yeniden formulasyonudur.

Tanım 2.6 $\mathcal{A}$, k cismi üzerinde bir süper vektör uzayı olsun. Eğer aşağıda verilen iki aksiyom gerçeklenirse $\mathcal{A}$ ya birim elemanlı bir asosyatif **süper cebir** denir:

1.Asosyatiflik aksiyomunu sağlayan bir $\mu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ lineer çarpma tasviri mevcuttur:

$$\mu \circ (\mathrm{id} \otimes \mu) = \mu \circ (\mu \otimes \mathrm{id}) \quad (\mathrm{Ass}) \tag{2.1}$$

2. Aşağıdaki birim aksiyomunu sağlayan birim denilen bir $\eta : K \longrightarrow \mathcal{A}$ tasviri vardır:

$$\mu \circ (\mathrm{id} \otimes \eta) = \mathrm{id} = \mu \circ (\eta \otimes \mathrm{id}) \quad (\mathrm{Uni}) \tag{2.2}$$

Burada id : $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ özdeşlik tasviridir.

Tanım 2.7 x, çift değişken ve θ, tek değişkenler olsun. İki değişkenli **süper polinom cebiri**, elemanları $\sum_{i,\alpha} c_{i\alpha} x^i \theta^\alpha$ şeklinde olan bir cebirdir ve o $k[x,\theta]$ ile gösterilir.

(Burada $i = 0,1,2,...,n$ ve $\alpha = 0,1$ dir.)

2.3 Süper-Hopf Cebirleri

Tanım 2.8 $\mathcal{A}$, k cismi üzerinde bir süper vektör uzayı olsun. Eğer

$\Delta: \ \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$

$\varepsilon: \ \mathcal{A} \longrightarrow k$

lineer tasvirleri

$$(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta \qquad (\text{Co-Ass}) \tag{2.3}$$

$$\mu \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = \mathrm{id} = \mu \circ (\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta \qquad (\text{Co-Uni}) \tag{2.4}$$

aksiyomlarını gerçeklerse, $\mathcal{A}$ ya k cismi üzerinde bir **süper ko-cebir** denir.

Tanım 2.8 $\mathcal{A}$, k cismi üzerinde bir süper vektör uzayı olsun. Eğer $\mathcal{A}$, hem bir süper cebir ve hem de bir süper ko-cebir ise, $\mathcal{A}$ nın bir **süper bi-cebir** olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki teoremin sağlanmasıdır.

Teorem 2.1 Eğer $\mathcal{A}$ hem bir süper cebir ve hem de bir süper ko-cebir olan bir süper vektör uzayı ise aşağıdaki iki şart denktir:

1. Δ ve ε birer cebir homomorfizmidir.

2. μ ve η birer ko-cebir homomorfizmidir.

Tanım 2.9 $\mathcal{A}$, bir süper bi-cebir olsun. Eğer

$$\mu \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{S}) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon = \mu \circ (\mathrm{S} \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta \tag{2.5}$$

olacak şekilde $\mathcal{A}$ nın ko-tersi denilen

$\mathrm{S}: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$

lineer tasviri mevcut ise $\mathcal{A}$ ya bir **süper-Hopf cebiri** denir.

2.4 Süper-Hopf Cebirinin Modül ve Ko-modülleri

Tanım 2.10 $\mathcal{A}$, bir süper cebir ve V , bir süper vektör uzayı olsun. Eğer

$$\varphi : \mathcal{A} \otimes V \to V$$

$$(a, v) \mapsto \varphi(a, v) = a \triangleright v$$

lineer tasviri

$$\varphi \circ (\mathrm{id} \otimes \varphi) = \varphi \circ (\mu \otimes \mathrm{id}_V)$$
$$\varphi \circ (\eta \otimes \mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_V$$

aksiyomlarını sağlayacak şekilde mevcut ise, V ye bir **süper sol $\mathcal{A}$-modül** ve φ tasvirine ise $\mathcal{A}$ nın V üzerine **sol etkisi** denir.

Tanım 2.11 $\mathcal{A}$, bir süper cebir ve V , bir süper vektör uzayı olsun. Eğer

$$\varphi : V \otimes \mathcal{A} \to V$$

$$(v, a) \mapsto \varphi(v, a) = v \triangleleft a$$

lineer tasviri

$$\varphi \circ (\varphi \otimes \mathrm{id}) = \varphi \circ (\mathrm{id}_V \otimes \mu)$$
$$\varphi \circ (\mathrm{id}_V \otimes \eta) = \mathrm{id}_V$$

aksiyomlarını sağlayacak şekilde mevcut ise, V ye bir **süper sağ $\mathcal{A}$-modül** ve φ tasvirine ise $\mathcal{A}$ nın V üzerine **sağ etkisi** denir.

Yukarıdaki her iki tanım için de sadeliği bakımından $a \triangleright v$ yerine $a \cdot v$ ve $v \triangleleft a$ yerine $v \cdot a$ yazacağız.

Tanım 2.12 $\mathcal{A}$ asosyatif süper cebirinin $\mathbb{Z}_2$-dereceli bir $\mathcal{B}$ alt-modülü

$$\mathcal{B} = (\mathcal{B} \cap \mathcal{A}_0) \oplus (\mathcal{B} \cap \mathcal{A}_1)$$

olan bir $\mathcal{A}$ cebirinin bir alt-modülü gibidir. Bu takdirde, $\mathcal{A}$ süper cebirinin $\mathbb{Z}_2$-dereceli bir I ideali (süper ideali) dereceli bir alt modüldür:

$$I = (I \cap \mathcal{A}_0) \oplus (I \cap \mathcal{A}_1), \qquad I = I_0 \oplus I_1$$

Tanım 2.13 Eğer bir V süper vektör uzayı $a, b \in \mathcal{A}$ ve $v \in V$ için

$$a \cdot (v \cdot b) = (a \cdot v) \cdot b$$

uyuşabilirlik şartını sağlayan, hem $a \cdot v$ etkisi ile bir süper sol $\mathcal{A}$-modül ve hem de $v \cdot b$ etkisi ile bir süper sağ $\mathcal{A}$-modül ise, V ye bir süper $\mathcal{A}$-**bimodül** denir.

Tanım 2.14 $\mathcal{A}$ bir süper ko-cebir ve V , bir süper vektör uzayı olsun. Eğer bir

$$\varphi : V \to \mathcal{A} \otimes V$$

lineer tasviri

$$(\mathrm{id} \otimes \varphi) \circ \varphi = (\Delta \otimes \mathrm{id}_V) \circ \varphi$$
$$(\varepsilon \otimes \mathrm{id}_V) \circ \varphi = \mathrm{id}_V$$

eşitliklerini gerçeklerse, V süper vektör uzayına bir **süper sol $\mathcal{A}$-ko-modül** ve φ tasvirine ise $\mathcal{A}$ nın V üzerine **sol ko-etkisi** denir.

Tanım 2.15 $\mathcal{A}$ bir süper ko-cebir ve V , bir süper vektör uzayı olsun. Eğer bir

$$\varphi : V \to V \otimes \mathcal{A}$$

lineer tasviri

$$(\varphi \otimes \mathrm{id}) \circ \varphi = (\mathrm{id}_V \otimes \Delta) \circ \varphi$$
$$(\mathrm{id}_V \otimes \varepsilon) \circ \varphi = \mathrm{id}_V$$

eşitliklerini gerçeklerse V süper vektör uzayına bir **süper sağ $\mathcal{A}$-ko-modül** ve φ tasvirine ise $\mathcal{A}$ nın V üzerine **sağ ko-etkisi** denir.

BÖLÜM 3

$\mathcal{F}(\mathbb{R}_q(1|1))$ SÜPER HOPF CEBİRİ

3.1 Kuantum Süper Düzlemi

Yukarıda Örnek 2.1 de söylenildiği üzere $\mathbb{R}(1|1) = V_0 \oplus V_1$ idi. Burada V_0 vektör uzayındaki bir eleman $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ ve V_1 vektör uzayındaki bir eleman $\begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix}$ şeklinde olmak üzere $X \in \mathbb{R}(1|1)$ süper vektörü

$$X = \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

Bir süper cebirde, derecesi 1 olan elemanın kendisi ile çarpımının sıfır olduğu bellidir: Eğer $\alpha \in \mathcal{A}$ ve $|\alpha| = 1$ ise, $\alpha \cdot \alpha = \alpha^2 = 0$ dır.

x, derecesi 0 ve θ, derecesi 1 olan jeneratörler olmak üzere $k\{x, \theta\}$, birim elemanlı bir serbest cebir ve $q \in \mathbb{C} - \{0\}$ olsun.

Tanım 3.1 [12] Eğer I_q, $k\{x, \theta\}$ cebirinin $x\theta - q\theta x$ ve θ^2 elemanlarıyla oluşturulmuş bir iki yanlı ideali ise

$$O(\mathbb{R}_q(1|1)) =: k\{x, \theta\} / I_q$$

bölüm cebiri ile $\mathbb{R}_q(1|1)$ düzlemine **kuantum süper düzlemi** denir.

Bu tanıma göre,

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_q(1|1) \quad \Leftrightarrow \quad x\theta = q\theta x, \quad \theta^2 = 0 \tag{3.1}$$

dır.

Eğer x ve θ yı, lineer koordinat fonksiyonları olarak düşünürsek, kolayca gösterilebileceği üzere

$$x =: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}, \qquad \theta =: \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$x =: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix}, \quad \theta =: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisleri, (3.1) deki bağıntıları sağlar.

$\mathbb{R}(1|1)$ süper düzleminin $\Lambda(\mathbb{R}(1|1))$ ile gösterilen **dış düzlemi** şöyle tanımlanmıştır:

$$\Lambda\left(\mathbb{R}(1|1)\right) =: U_0 \oplus U_1, \quad Y = \begin{pmatrix} \varphi \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Şimdi, kuantum dış düzlemin tanımını verelim:

Tanım 3.2 Jeneratörleri φ ile y olan ve

$$y\varphi = pq\, y\varphi, \quad \varphi^2 = 0 \qquad (p \in \mathbb{C} - \{0\}) \tag{3.2}$$

bağıntılarını sağlayan cebire $O(\mathbb{R}_q(1|1))$ cebirinin **kuantum dış cebiri** denir ve $\Lambda_{p,q} =: \Lambda(\mathbb{R}_q(1|1))$ ile gösterilir.

3.2 $O(\mathbb{R}_q(1|1))$ Süper Cebiri Üzerine Süper-Hopf Cebir Yapısı

Eğer x, $O(\mathbb{R}_q(1|1))$ cebirinin bir çift elemanı ise, onun tersinin mevcut yani

$$xx^{-1} = \mathbf{1} = x^{-1}x$$

olduğunu kabul edelim ve bu x^{-1} elemanının $O(\mathbb{R}_q(1|1))$ cebirine eklenmesiyle elde edilen (yeni) cebiri $\mathcal{A}_q =: \mathcal{F}(\mathbb{R}_q(1|1))$ ile gösterelim. Bu takdirde, aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.1 [8] $\mathcal{A}_q$ birimli asosyatif cebiri aşağıda verilen ko-tasvirler ile bir süper-Hopf cebiridir:

(1) $\Delta: \mathcal{A}_q \longrightarrow \mathcal{A}_q \otimes \mathcal{A}_q$ ko-çarpmasının koordinat fonksiyonları üzerine etkisi

$$\Delta(x) = x \otimes x, \quad \Delta(\theta) = \theta \otimes x + x \otimes \theta, \quad \Delta(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$$

şeklindedir.

(2) $\varepsilon : \mathcal{A}_q \longrightarrow \mathbb{C}$ ko-biriminin koordinat fonksiyonları üzerine etkisi

$$\varepsilon(x) = \mathbf{1}, \quad \varepsilon(\theta) = 0$$

şeklindedir.

(3) $\mathrm{S}: \mathcal{A}_q \longrightarrow \mathcal{A}_q$ ko-tersinin koordinat fonksiyonları üzerine etkisi

$$\mathrm{S}(x) = x^{-1} \ , \ \mathrm{S}(\theta) = -x^{-1}\theta x^{-1}$$

şeklindedir.

Teoremin ispatı [8] de verilmiştir. İspat için aşağıda söylenilenler gerçekleştirilir:

1. Δ, ε ve S tasvirlerinin x ve θ jeneratörleri için sırasıyla (2.3), (2.4) ve (2.5) aksiyomlarını sağladığı gösterilir.

2. (3.1) denklemlerinin Δ, ε ve S tasvirleri altında korunduğu gösterilir.

BÖLÜM 4

$\mathcal{F}(\mathbb{R}_q(1|1))$ ÜZERİNE BİKOVARYANT DİFERANSİYEL HESAP

Bu bölümde, $\mathcal{F}(\mathbb{R}_q(1|1))$ cebiri üzerine değişmeli olmayan, sağ- ve sol-kovaryant bir diferansiyel hesap kurulacaktır. Bu hesap, $\mathbb{R}_q(1|1)$ üzerindeki fonksiyonları, onların diferansiyellerini ve diferansiyel formları içerir.

4.1 $\mathbb{Z}_2$-Dereceli Diferansiyel Cebir

Tanım 4.1 $\mathcal{A}$, keyfi birimli bir asosyatif $\mathbb{Z}_2$-dereceli cebir ve Γ, bir $\mathcal{A}$-bimodül olsun. Eğer $\mathrm{d}:\mathcal{A}\to\Gamma$ lineer tasviri aşağıdaki şartları sağlarsa (Γ,d) ikilisine $\mathcal{A}$ üzerinde bir birinci dereceden $\mathbb{Z}_2$-dereceli diferansiyel hesap (FODC) denir:

1. $\forall f,g\in\mathcal{A}$ için

$$\mathrm{d}(f\cdot g)=(\mathrm{d}f)\cdot g+(-1)^{|f|}f\cdot(\mathrm{d}g)$$

dir.

2. Γ, $\forall a,b,c\in\mathcal{A}$ olmak üzere $a(\mathrm{d}b)c$ şeklindeki elemanlar ile gerilmiştir.

Tanım 4.1 deki birinci şart $\mathbb{Z}_2$-dereceli Leibniz kuralı olarak bilinmektedir. $\mathcal{A}$ üzerindeki bir $\mathbb{Z}_2$-dereceli diferansiyel cebir, $\Gamma^0=:\mathcal{A}$ olmak üzere bir $\mathbb{Z}_2$-dereceli $\Gamma=\bigoplus_{n\geq 0}\Gamma^n$ cebiridir. Öyle ki, d lineer tasviri nilpotenttir $(\mathrm{d}^2=0)$ ve $\mathbb{Z}_2$-dereceli Leibniz kuralını sağlar.

4.2 Bikovaryant Hesap

Tanım 4.2 $\mathcal{A}$, birim elemanı $\mathbf{1}$ olan bir süper-Hopf cebiri ve (Γ,d), $\mathcal{A}$ üzerinde bir diferansiyel hesap olsun.

i) Eğer $\Delta_L:\Gamma\to\mathcal{A}\otimes\Gamma$ lineer tasviri $\forall u,v\in\mathcal{A}$ için

$$\Delta_L(u\cdot \mathrm{d}v)=\Delta(u)(\tau\otimes \mathrm{d})\Delta(v) \tag{4.1}$$

eşitliğini sağlıyorsa (Γ,d) diferansiyel hesabının **sol-kovaryant** olduğu söylenir. Burada, $\tau:\Gamma\to\Gamma$, $\tau(u)=(-1)^{|u|}u$ dur.

ii) Eğer $\Delta_R:\Gamma\to\Gamma\otimes\mathcal{A}$ lineer tasviri $\forall u,v\in\mathcal{A}$ için

$$\Delta_R(u\cdot \mathrm{d}v)=\Delta(u)(\mathrm{d}\otimes \mathrm{id})\Delta(v) \tag{4.2}$$

eşitliğini sağlıyorsa (Γ,d) diferansiyel hesabının **sağ-kovaryant** olduğu söylenir.

Tanım 4.2 nin (i) ve (ii) kısımlarından

$$\begin{aligned}&(\Delta\otimes \mathrm{id})\circ\Delta_L=(\mathrm{id}\otimes\Delta_L)\circ\Delta_L && (\mathrm{id}\otimes\Delta)\circ\Delta_R=(\Delta_R\otimes \mathrm{id})\circ\Delta_R\\ &(\varepsilon\otimes \mathrm{id})\Delta_L(\mathrm{d}u)=\mathrm{d}u && (\mathrm{id}\otimes\varepsilon)\Delta_R(\mathrm{d}u)=\mathrm{d}u\end{aligned} \tag{4.3}$$

eşitliklerinin gerçeklendiği görülür.

Tanım 4.3 Eğer sol- ve sağ-kovaryant bir hesap

$$(\Delta_L\otimes \mathrm{id})\circ\Delta_R=(\mathrm{id}\otimes\Delta_R)\circ\Delta_L \tag{4.4}$$

eşitliğini gerçeklerse hesabın **bikovaryant** olduğu söylenir.

Tanım 4.4 Γ, bir bimodül ve $\mathcal{A}$, bir süper cebir olmak üzere, her $\forall u_1,u_2\in\mathcal{A}$ ve $\mathrm{d}u_1,\mathrm{d}u_2\in\Gamma$ için

$$\Delta_{L,R}(u_1\cdot \mathrm{d}u_1+\mathrm{d}u_2\cdot u_2)=\Delta(u_1)\Delta_{L,R}(\mathrm{d}u_1)+\Delta_{L,R}(\mathrm{d}u_2)\Delta(u_2) \tag{4.5}$$

eşitliği gerçeklenecek şekilde $\Delta_L:\Gamma\to\mathcal{A}\otimes\Gamma$ ve $\Delta_R:\Gamma\to\Gamma\otimes\mathcal{A}$ tasvirleri var ise Γ ya **bikovaryant bimodül** denir.

4.3 Komutasyon Bağıntıları

Değişmeli olmayan bir diferansiyel hesap oluşturulurken koordinat fonksiyonları ve onların diferansiyelleri arasındaki komutasyon bağıntılarına ihtiyaç duyulur. Bu kısımda komutasyon bağıntılarını elde edebilmek için diferansiyel hesabın bikovaryantlığı kullanılacaktır.

$\mathcal{F}(\mathbb{R}_q(1|1))$-bimodül Γ nın $\mathrm{d}x$ ve $\mathrm{d}\theta$ ile bir serbest sağ $\mathcal{F}(\mathbb{R}_q(1|1))$-modülü olarak oluşturulduğunu düşünelim. Genelde, koordinat fonksiyonlarının diferansiyelleri ile değişmeli olması gerekmez. Dolayısıyla, Γ nın ve $\mathcal{F}(\mathbb{R}_q(1|1))$ cebirinin jeneratörleri arasında, kurala bağlı olarak değişmeli olmayan muhtemel komutasyon bağıntıları mevcut olmalıdır. Eğer x ve θ, $\mathcal{F}(\mathbb{R}_q(1|1))$ cebirinin jeneratörleri ve $\mathrm{d}x$ ile $\mathrm{d}\theta$ da, onların diferansiyelleri ise, jeneratörler ile onların diferansiyelleri arasında sağlanması muhtemel komutasyon bağıntıları

$$x\cdot \mathrm{d}x = P_1\ \mathrm{d}x\cdot x + P_2\ \mathrm{d}\theta\cdot\theta \tag{4.6a}$$

$$x\cdot \mathrm{d}\theta = A_{11}\ \mathrm{d}\theta\cdot x + A_{12}\ \mathrm{d}x\cdot\theta \tag{4.6b}$$

$$\theta\cdot \mathrm{d}x = A_{21}\ \mathrm{d}x\cdot\theta + A_{22}\ \mathrm{d}\theta\cdot x \tag{4.6c}$$

$$\theta\cdot \mathrm{d}\theta = P_3\ \mathrm{d}\theta\cdot\theta + P_4\ \mathrm{d}x\cdot x \tag{4.6d}$$

şeklinde olmalıdır. Burada P_i ve A_{ij} ler muhtemelen q ya bağlı sabitlerdir ve onlar, Lemma 4.1 de tespit edilecektir. (Uygunluk açısından bazı sabitler sıfırdan farklı olmalıdır.)

Böylece, Γ nın üzerindeki sol $\mathcal{F}(\mathbb{R}_q(1|1))$-modül yapısının (4.6) ile tamamen tanımlandığı düşünülebilir.

Tanım 4.2 den yararlanılarak, Δ_L ve Δ_R tasvirlerinin Γ nın elemanlarına etkisi aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned}\Delta_L(\mathrm{d}x) &= x\otimes \mathrm{d}x\\ \Delta_L(\mathrm{d}\theta) &= x\otimes \mathrm{d}\theta - \theta\otimes \mathrm{d}x\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}\Delta_R(\mathrm{d}x) &= \mathrm{d}x\otimes x\\ \Delta_R(\mathrm{d}\theta) &= \mathrm{d}x\otimes \theta + \mathrm{d}\theta\otimes x\end{aligned} \tag{4.8}$$

Aşağıdaki lemma, bu tasvirlerin (4.6) bağıntılarına uygulanmasının neticesinde, bazı sabitlerin düşeceğini söylemektedir:

Lemma 4.1 (4.6) daki bağıntıların hepsi P_1, A_{11} ve A_{21} sabitlerine bağlıdır.

İspat (4.6) bağıntılarındaki bazı sabitleri bulabilmek için bu bağıntılara Δ_L tasvirini uygularız.

İlk olarak, (4.6a) bağıntısını ele alalım. Eğer eşitliğin her iki tarafına Δ_L tasvirini uygularsak, sol ve sağ taraflar

$$\begin{aligned}\Delta_L(x\cdot \mathrm{d}x) &= \Delta(x)\Delta_L(\mathrm{d}x)\\ &= (x\otimes x)(x\otimes dx)\\ &= x^2\otimes x\cdot dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_L(\mathrm{d}x\cdot x) &= \Delta_L(\mathrm{d}x)\Delta(x)\\ &= (x\otimes dx)(x\otimes x)\\ &= x^2\otimes dx\cdot x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_L(\mathrm{d}\theta\cdot\theta) &= \Delta_L(\mathrm{d}\theta)\Delta(\theta)\\ &= (x\otimes \mathrm{d}\theta-\theta\otimes dx)(x\otimes\theta+\theta\otimes x)\\ &= x^2\otimes \mathrm{d}\theta\cdot\theta+x\theta\otimes \mathrm{d}\theta\cdot x-\theta x\otimes dx\cdot\theta\end{aligned}$$

olup, karşılıklı eşitleme $P_2=0$ verir.

Aynı şekilde, (4.6b) bağıntısını ele alalım. Eşitliğin her iki tarafına Δ_L tasvirini uygularsak

$$\begin{aligned}\Delta_L\left(x\cdot \mathrm{d}\theta\right) &= \Delta\left(x\right)\Delta_L\left(\mathrm{d}\theta\right)\\ &= (x\otimes x)(x\otimes \mathrm{d}\theta-\theta\otimes \mathrm{d}x)\\ &= x^2\otimes x\cdot \mathrm{d}\theta-x\theta\otimes x\cdot \mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_L\left(\mathrm{d}\theta\cdot x\right) &= \Delta_L\left(\mathrm{d}\theta\right)\Delta\left(x\right)\\ &= (x\otimes \mathrm{d}\theta-\theta\otimes \mathrm{d}x)(x\otimes x)\\ &= x^2\otimes \mathrm{d}\theta\cdot x-\theta x\otimes \mathrm{d}x\cdot x\end{aligned}$$

$$\Delta_L(\mathrm{d}x\cdot\theta)=\Delta_L(\mathrm{d}x)\Delta(\theta)$$
$$=(x\otimes\mathrm{d}x)(x\otimes\theta+\theta\otimes x)$$
$$=x^2\otimes\mathrm{d}x\cdot\theta-x\theta\otimes\mathrm{d}x\cdot x$$

olup, karşılıklı eşitleme $A_{11}+q(A_{12}-P_1)=0$ verir.

Benzer işlemler (4.6c) ve (4.6d) eşitlikleri için yapılırsa, $A_{22}+qA_{21}=-P_1$, $P_3=1$ ve $P_4=0$ bulunur.

Sonuç olarak, Δ_L nin etkisi altında (4.6) bağıntılarının yazımı P_1, A_{11} ve A_{21} sabitlerine bağlı olarak

$$x\cdot\mathrm{d}x=P_1\,\mathrm{d}x\cdot x \tag{4.9a}$$

$$x\cdot\mathrm{d}\theta=A_{11}\,\mathrm{d}\theta\cdot x+(P_1-q^{-1}A_{11})\,\mathrm{d}x\cdot\theta \tag{4.9b}$$

$$\theta\cdot\mathrm{d}x=A_{21}\,\mathrm{d}x\cdot\theta-(P_1+qA_{21})\,\mathrm{d}\theta\cdot x \tag{4.9c}$$

$$\theta\cdot\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}\theta\cdot\theta \tag{4.9d}$$

şeklindedir. □

Lemma 4.2 (4.9) bağıntılarında görünen A_{11} ve A_{21} sabitleri, P_1 sabiti cinsiden yazılabilir.

İspat İstenilen, cebirin asosyatif olduğu gerçeğinden gelir. Ancak, koordinat fonksiyonlarının diferansiyelleri arasındaki komutasyon bağıntısına ihtiyaç vardır. Öyleyse F, sıfır olmayan bir sabit olmak üzere diferansiyeller arasında

$$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}\theta=F\,\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}x$$

bağıntısının sağlandığını kabul edelim. Bu takdirde, $x(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}\theta)$ ifadesi $(x\cdot\mathrm{d}x)\wedge\mathrm{d}\theta$ ya eşit olduğundan,

$$x(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}\theta)=[FP_1A_{11}+F^2(q^{-1}A_{11}-P_1)(P_1+qA_{21})]\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}x\cdot x$$

$$(x\cdot\mathrm{d}x)\wedge\mathrm{d}\theta=[FP_1A_{11}]\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}x\cdot x$$

olup, karşılıklı eşitleme ile $A_{11} = qP_1$ ve/veya $A_{21} = -q^{-1}P_1$ bulunur. □

Teorem 4.1 (Γ, d), $\mathcal{F}(\mathbb{R}_q(1|1))$ üzerinde bikovaryant $\mathbb{Z}_2$-dereceli birinci mertebeden bir diferansiyel hesaptır. Burada $\{\mathrm{d}x, \mathrm{d}\theta\}$, Γ nın bir serbest sağ $\mathcal{F}(\mathbb{R}_q(1|1))$-modül tabanıdır ve hesabın bimodül yapısı iki farklı forma sahiptir:

I. Form [9]

$$x \cdot \mathrm{d}x = p\ \mathrm{d}x \cdot x \tag{4.10a}$$

$$x \cdot \mathrm{d}\theta = q\ \mathrm{d}\theta \cdot x + (p-1)\ \mathrm{d}x \cdot \theta \tag{4.10b}$$

$$\theta \cdot \mathrm{d}x = -pq^{-1}\ \mathrm{d}x \cdot \theta \tag{4.10c}$$

$$\theta \cdot \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\theta \cdot \theta \tag{4.10d}$$

II.From [9]

$$x \cdot \mathrm{d}x = r\ \mathrm{d}x \cdot x \tag{4.11a}$$

$$x \cdot \mathrm{d}\theta = qr\ \mathrm{d}\theta \cdot x \tag{4.11b}$$

$$\theta \cdot \mathrm{d}x = -q^{-1}\ \mathrm{d}x \cdot \theta + (1-r)\mathrm{d}\theta \cdot x \tag{4.11c}$$

$$\theta \cdot \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\theta \cdot \theta \tag{4.11d}$$

İspat Lemma 4.1, (4.9) komutasyon bağıntılarının Δ_L nin etkisi altında korunduğunu söyler. Bu bağıntıların Δ_R nin etkisi altında korunduğunu göstermek için (4.10) ve (4.11) deki eşitliklerin her iki tarafına Δ_R tasviri uygulanır. □

Aşağıdaki lemmanın ispatı, Tanım 4.1 den açıktır.

Lemma 4.3 $\mathrm{d}x$ ve $\mathrm{d}\theta$ diferansiyelleri arasındaki komutasyon bağıntısındaki F sabiti ya qp^{-1} veya qr dir.

Teorem 4.2 (a) (4.10) bağıntılarına karşılık gelen F sabiti ile diferansiyeller arasındaki komutasyon bağıntıları

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x = 0 \\ &\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}\theta = qp^{-1}\ \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{4.12}$$

şeklindedir.

(b) (4.11) bağıntılarına karşılık gelen F sabiti ile diferansiyeller arasındaki komutasyon bağıntıları

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x = 0 \\ &\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}\theta = qr\ \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{4.13}$$

şeklindedir.

4.4 Kısmi Türevleri ile Olan Bağıntılar

Bu kısımda, $O(\mathbb{R}_q(1|1))$ süper cebirinin jeneratörlerinin kısmi türevlerinin, jeneratörlerle ve kendi aralarındaki komutasyon bağıntıları verilecektir.

$\mathcal{A}$, herhangi birimli bir asosyatif süper cebir olmak üzere, elemanları $\mathcal{A}$ dan alınan 2×2-tipindeki matrislerin halkasını $M_2(\mathcal{A})$ ile gösterelim. Ω, serbest modül yapısı ile bir $\mathcal{A}$-bimodül olsun. Bilindiği üzere, bütün 2 ranklı $\Omega \to \Omega$ endomorfizmlerinin halkası $M_2(\mathcal{A})$ halkasına izomorf olduğundan $\omega\colon \mathcal{A} \to M_2(\mathcal{A})$ cebir homomorfizmi mevcuttur.

Önceki oluşturmadan biliyoruz ki $\{\mathrm{d}x, \mathrm{d}\theta\}$, $O(\mathbb{R}_q(1|1))$-bimodül Γ nın bir serbest sağ-$O(\mathbb{R}_q(1|1))$-modül tabanıdır ve (4.10) ile (4.11) bağıntıları sağlanır.

Şimdi, $O(\mathbb{R}_q(1|1))$-bimodül Γ nın sol modül yapısını düşünelim. Eğer $u \cdot \mathrm{d}v$ çarpımını Γ-sağ modülün bir endomorfizmi olarak gözönüne alırsak,

$$\omega : O(\mathbb{R}_q(1|1)) \to M_2(\mathbb{R}_q(1|1))$$

cebir homomorfizmini $u \in O(\mathbb{R}_q(1|1))$ için

$$u \cdot \mathrm{d}x^i = \sum_{j=1}^{2} \mathrm{d}x^j \cdot \omega(u)^i_j \qquad (x^1 = x,\ x^2 = \theta) \tag{4.14}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Bu bağıntılar

$$\omega(x) = \begin{pmatrix} px & 0 \\ (p-1)\theta & qx \end{pmatrix}, \qquad \omega(\theta) = \begin{pmatrix} -pq^{-1}\theta & 0 \\ 0 & \theta \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

olmak üzere (4.10) daki bağıntılara denktir.

$O(\mathbb{R}_q(1|1))$ süper cebirinin jeneratörleri ile onların kısmi türevleri arasındaki bağıntıları elde etmek için, cebirin jeneratörlerinin kısmi türevlerini tanıtalım. (Γ, d) bir sol kovaryant diferansiyel hesap olduğundan her $u \in O(\mathbb{R}_q(1|1))$ için

$$\mathrm{d}u = \mathrm{d}x \cdot \partial_x(u) + \mathrm{d}\theta \cdot \partial_\theta(u) \tag{4.16}$$

olacak şekilde $\partial_x(u), \partial_\theta(u) \in O(\mathbb{R}_q(1|1))$ elemanları tek olarak mevcuttur.

Tanım 4.5 (4.16) ile tanımlı $\partial_x, \partial_\theta : O(\mathbb{R}_q(1|1)) \to O(\mathbb{R}_q(1|1))$ lineer tasvirlerine (Γ, d) diferansiyel hesabın **kısmi türevleri** denir.

(Γ, d) diferansiyel hesabının kısmi türevleri, açıkça görülür ki

$$\partial_i(x^j) = \delta_i^j$$

özelliğini sağlar.

Aşağıdaki teorem, $O(\mathbb{R}_q(1|1))$ in jeneratörleri ile onların kısmi türevleri arasındaki bağıntıları verir.

Teorem 4.3 [9] $O(\mathbb{R}_q(1|1))$ in jeneratörleri, kısmi türevleri ile

$$\partial_x x = 1 + px\partial_x + (p-1)\theta\partial_\theta \tag{4.17a}$$

$$\partial_x \theta = pq^{-1}\theta\partial_x \tag{4.17b}$$

$$\partial_\theta x = qx\partial_\theta \tag{4.17c}$$

$$\partial_\theta \theta = 1 - \theta\partial_\theta \tag{4.17d}$$

komutasyon bağıntılarını sağlar.

İspat Görülebilir ki, ∂_x ve ∂_θ kısmi türevleri $\mathbb{Z}_2$-dereceli Leibniz kuralını sağlar. Yani, kısmi türevler ile ω homomorfizmi her $u, v \in O(\mathbb{R}_q(1|1))$ için

$$\partial_j(u \cdot v) = \partial_j(u) \cdot v + (-1)^{|u|} \sum_{i=1}^{2} \omega(u)_j^i \cdot \partial_i(v) \tag{4.18}$$

ile bağlıdır. Şimdi, istenilen bağıntılar bağıntılar (4.16) ve (4.18) den elde edilir.

Teorem 4.4 $O(\mathbb{R}_q(1|1))$ in jeneratörlerinin kısmi türevleri arasında

$$\partial_x \partial_\theta = p^{-1} q \partial_\theta \partial_x \quad , \qquad \partial_\theta^2 = 0 \tag{4.19}$$

komutasyon bağıntısı vardır.

İspat $\mathrm{d}^2 = 0$ olduğu gerçeği kullanılarak istenilen bağıntıya ulaşılabilir.

Teorem 4.3 ve 4.4 ün benzerleri , (4.11) bağıntıları için de verilebilir.

BÖLÜM 5

R-MATRİSİ

5.1 Giriş

$O(\mathbb{R}_q(1|1))$ süper cebirinin jeneratörleri tarafından sağlanan (3.1) bağıntıları ve onların diferansiyelleri ile sağladıkları (4.10) bağıntıları, cebirin asosyatifliğini garanti eden bir R-matrisi ile çok kompakt ancak son derece mükemmel iki eşitlik ile verilebilir. Bu 4×4-tipindeki R-matrisi

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12} \tag{5.1}$$

şeklindeki $\mathbb{Z}_2$-dereceli Yang-Baxter denkleminin bir çözümü olacaktır [13]. Burada I, 2×2-tipindeki birim matris olmak üzere $R_{12} = R\otimes I$, $R_{23} = I\otimes R$ ve R_{13}, 1. ve 3. uzaylara etki eden 8×8-tipindeki matrislerdir.

5.2 Kuantum R-Matrisi

Biz, (5.1) denklemini gerçekleyen *R*-matrisini bulmak için (4.10) bağıntılarını kullanacağız. O nedenle,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

süper permütasyon matrisi ile

$$\hat{R} = PR \tag{5.2}$$

yazalım. Eğer $O(\mathbb{R}_q(1|1))$ cebirinin jeneratörleri ile diferansiyelleri arasında sağlanan bağıntıların, $\hat{R}$ -matrisi ile

$$(-1)^{|x_i|}x_i\cdot \mathrm{d}\,x_j=\sum_{k,l=1}^{2}\hat{R}_{kl}^{ij}\,\mathrm{d}\,x_k\cdot x_l,\qquad i,j=1,2 \tag{5.3}$$

şeklinde yazılabildiğini kabul edersek (ki buna, (4.6) bağıntıları yazılırken ileri sürülen gerçeklerden dolayı hakkımız vardır) $\hat{R}$ -matrisininin

$$\hat{R}_I=\begin{bmatrix} p & 0 & 0 & 0\\ 0 & p-1 & q & 0\\ 0 & pq^{-1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}=(\hat{R}_{kl}^{ij}) \tag{5.4}$$

şeklinde olması gerektiğini görüyoruz [8]. (5.3) deki eşitlik, kapalı formda

$$(-1)^{|X|}X\otimes \mathrm{d}\,X=\hat{R}_I\;\mathrm{d}\,X\otimes X \tag{5.5}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\hat{R}_I=PR_I$ olduğundan, R_I -matrisi

$$R_I=\begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 0\\ 0 & pq^{-1} & 0 & 0\\ 0 & p-1 & q & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{5.6}$$

şeklindedir. Yazım kolaylığı açısından $R_I=:R$ ve $\hat{R}_I=:\hat{R}$ yazacağız.

Teorem 5.1 (5.4) ile verilen $\hat{R}$ matrisinin özdeğerleri -1 ve p dir.

İspat Gerçekten,

$$\hat{R}+I_4=\begin{bmatrix} p+1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & p & q & 0\\ 0 & pq^{-1} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\qquad \text{ve}\qquad \hat{R}-pI_4=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & q & 0\\ 0 & pq^{-1} & -p & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1-p\end{bmatrix}$$

olup,

$$\hat{R}^2+(1-p)\hat{R}-pI_4=0\quad \text{ve}\quad (\hat{R}+I_4)(\hat{R}-pI_4)=0$$

dır.

Not 5.1 $O(\mathbb{R}_q(1|1))$ cebirinin jeneratörleri arasında sağlanan (3.1) bağıntıları, yukarıdaki $\hat{R}$ -matrisi ile, kompakt ancak çok mükemmel formda

$$\hat{R}X \otimes X = pX \otimes X \tag{5.7}$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 5.2 (5.6) da verilen R -matrisi $\mathbb{Z}_2$ -dereceli Yang Baxter denklemini sağlar.

İspat İstenileni gerçekleştirmek için önce R matrisini $\mathbb{R}^2$ nin taban elemanları cinsinden

$$R = p\,e_{11} \otimes e_{11} + pq^{-1}\, e_{11} \otimes e_{22} + (p-1)e_{21} \otimes e_{12} + q\, e_{22} \otimes e_{11} + e_{22} \otimes e_{22}$$

şeklinde yazalım. Bu takdirde,

$$R_{12} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & pq^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & pq^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p-1 & 0 & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p-1 & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; R_{23} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & pq^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & pq^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p-1 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$R_{13} = pe_{11} \otimes I \otimes e_{11} + pq^{-1}e_{11} \otimes I \otimes e_{22} + (p-1)e_{21} \otimes I \otimes e_{12} + qe_{22} \otimes I \otimes e_{11} + e_{22} \otimes I \otimes e_{22}$$

$$= \begin{bmatrix} p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & pq^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & pq^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-p & 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olup, bu üç matris istenilen şekilde çarpıldığında (5.1) Yang-Baxter denkleminin sağlandığı görülür. □

$O(\mathbb{R}_q(1|1))$ cebirinin jeneratörleri ve diferansiyelleri tarafından sağlanan (4.11) bağıntıları kullanılarak, $\mathbb{Z}_2$-dereceli Yang-Baxter denkleminin çözümü olan ikinci bir *R*-matrisi de

$$R_{II} = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^{-1} & r-1 & 0 \\ 0 & 0 & rq & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde bulunmuştur [8].

Her iki *R*-matrisi de, aynı zamanda

$$\hat{R}_{12}\hat{R}_{23}\hat{R}_{12} = \hat{R}_{23}\hat{R}_{12}\hat{R}_{23}$$

şeklindeki dereceli *örgü-grup* bağıntısını sağlar.

BÖLÜM 6

$GL(1|1)$ SÜPER GRUBUNUN DEFORMASYONLARI

Bu bölümde, önceki bölümde elde edilen *R*-matrisleri kullanılarak, $GL(1|1)$ süper grubunun iki adet 2-parametreli deformasyonu verilecektir.

6.1 $M(1|1)$ Süper Matris Uzayı

Bu kısımda $\mathbb{Z}_2$-dereceli matris uzayları hakkında bazı kısa bilgiler verilecektir. $\mathcal{A}$, birim elemanlı (komutatif olması gerekmeyen) asosyatif bir süper cebir ve $a,d,\beta,\gamma,$ hepsi $\mathcal{A}$ nın jeneratörleri olmak üzere a ve d nin çift yani $|a|=|d|=0$ ve β ile γ nın da tek olduklarını kabul edelim. $k[a,d,\beta,\gamma]$ polinom cebirini $O(M(1|1))$ ile gösterelim. Bu durumda, $O(M(1|1))$ cebirindeki bir (a,d,β,γ) noktasını matris formunda yani bir süper matris olarak

$$T=\begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & d \end{pmatrix}=(t_{ij})\in M(1|1) \tag{6.1}$$

şeklinde yazabiliriz.

6.2 $M_{p,q}(1|1)$ Kuantum Süper Matris Uzayı

Yukarıda verilen *T* matrisinin matris elemanları, komutatif olması gerekmeyen bir $\mathcal{A}$ cebirine ait olduğundan, matris elemanları arasında muhtemel bazı (p,q)-komutasyon bağıntıları vardır.

Bu kısımda, (6.1) de verilen *T* matrisinin matris elemanları arasında sağlanan komutasyon bağıntıları *RTT*-yaklaşımı [14] ile elde edilecektir.

Teorem 6.1 $T \in M(1|1)$ matrisinin bir kuantum süper matris olması için gerek ve yeter şart, $T_1 = T \otimes I$ ve $T_2 = I \otimes T$ olmak üzere

$$RT_1T_2 = T_2T_1R \tag{6.2}$$

şeklindeki *kuantum grup* bağıntısının sağlanmasıdır.

Sonuç 6.1 T matrisinin matris elemanları

$$\begin{aligned} &a\beta = pq^{-1}\beta a, \quad a\gamma = q\gamma a \\ &d\beta = pq^{-1}\beta d, \quad d\gamma = q\gamma d \\ &ad = da + q^{-1}(1-p)\beta\gamma \\ &\beta\gamma = -p^{-1}q^2\gamma\beta, \ \beta^2 = \gamma^2 = 0 \end{aligned} \tag{6.3}$$

şeklindeki (p,q) -komutasyon bağıntılarını sağlar.

İspat T_1 ve T_2 matrisleri, açık olarak

$$T_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & \beta & 0 \\ 0 & a & 0 & \beta \\ \gamma & 0 & d & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & d \end{pmatrix}, \qquad T_2 = \begin{pmatrix} a & \beta & 0 & 0 \\ \gamma & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -\beta \\ 0 & 0 & -\gamma & d \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Şimdi, (6.2) deki eşitlik (6.3) deki bağıntıları verecektir. □

Tanım 6.1 $k\{a,\beta,\gamma,d\}$ bir serbest cebir ve $J_{p,q}$, $k\{a,\beta,\gamma,d\}$ serbest cebirinin (6.3) bağıntılarıyla oluşturulmuş bir iki yanlı ideali olsun. $k\{a,\beta,\gamma,d\}$ cebirinin $J_{p,q}$ idealine bölünmesiyle elde edilen cebire $M_{p,q}(1|1)$ kuantum matris süper uzayının **koordinat cebiri** denir ve $O(M_{p,q}(1|1))$ ile gösterilir.

6.3 $O(M_{p,q}(1|1))$ Süper Bi-cebiri

Bu kısımda, $O(M_{p,q}(1|1))$ süper cebirinin bir süper bi-cebir olduğu gösterilecektir.

Teorem 6.2 $O(M_{p,q}(1|1))$ süper cebiri

$$\Delta:\ O(M_{p,q}(1|1)) \to\ O(M_{p,q}(1|1))\ \otimes O(M_{p,q}(1|1)), \qquad \Delta(t_j^i) = \sum_{i=1}^{2} t_k^i \otimes t_j^k$$

ko-çarpması ve

$$\varepsilon:\ O(M_{p,q}(1|1)) \to \mathbb{C}, \quad \varepsilon(t_j^i) = \delta_j^i$$

ko-birimi ile bir tek süper bi-cebir yapısına sahiptir.

İspat Önermenin ispatı için aşağıda söylenilenler gerçekleştirilir:

1. Δ ve ε tasvirlerinin sırasıyla (2.3) ve (2.4) aksiyomlarını sağlar.

2. (6.3) bağıntıları Δ ve ε tasvirleri altında korunur.

1. $(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(a) = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta(a)$ ve $\mu \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(a) = \mathrm{id(a)} = \mu \circ (\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta(a)$ olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(a) &= (\Delta \otimes \mathrm{id})(a \otimes a + \beta \otimes \gamma) \\
&= \Delta(a) \otimes \mathrm{id}(a) + \Delta(\beta) \otimes \mathrm{id}(\gamma) \\
&= (a \otimes a + \beta \otimes \gamma) \otimes a + (a \otimes \beta + \beta \otimes d) \otimes \gamma \\
&= (a \otimes a) \otimes a + (\beta \otimes \gamma) \otimes a + (a \otimes \beta) \otimes \gamma + (\beta \otimes d) \otimes \gamma \\
&= a \otimes (a \otimes a) + \beta \otimes (\gamma \otimes a) + a \otimes (\beta \otimes \gamma) + \beta \otimes (d \otimes \gamma) \\
&= a \otimes (a \otimes a + \beta \otimes \gamma) + \beta \otimes (\gamma \otimes a + d \otimes \gamma) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \Delta)(a \otimes a) + (\mathrm{id} \otimes \Delta)(\beta \otimes \gamma) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \Delta)(a \otimes a + \beta \otimes \gamma) = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta(a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(a) &= \mu\big((\varepsilon \otimes \mathrm{id})\big)(a \otimes a + \beta \otimes \gamma) \\
&= \mu\big(\varepsilon(a) \otimes \mathrm{id}(a) + \varepsilon(\beta) \otimes \mathrm{id}(\gamma)\big) \\
&= \mu(1 \otimes a + 0 \otimes \gamma) \\
&= a = \mathrm{id}(a) \\
&= \mu\big(\mathrm{id}(a) \otimes \varepsilon(a) + \mathrm{id}(\beta) \otimes \varepsilon(\gamma)\big) \\
&= \mu\big((\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\big)(a \otimes a + \beta \otimes \gamma) \\
&= \mu \circ (\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta(a)
\end{aligned}$$

Benzer şekilde, β, γ ve d için de aynı aksiyomların sağlandığı gösterilir.

2. Δ ve ε tasvirleri, birer cebir homomorfizmidir, yani Δ ve ε tasvirleri (6.3) bağıntılarını korur. Bunu göstermek oldukça kolaydır. Birkaçı, aşağıda gösterilmiştir:

$$\begin{aligned}\Delta(\beta^2) &= \Delta(\beta)\Delta(\beta)\\ &= (a\otimes\beta+\beta\otimes d)(a\otimes\beta+\beta\otimes d)\\ &= a^2\otimes\beta^2 - a\beta\otimes\beta d+\beta a\otimes d\beta+\beta^2\otimes d^2\\ &= -a\beta\otimes\beta d+p^{-1}q\ a\beta\otimes pq^{-1}\ \beta d\\ &= -a\beta\otimes\beta d+a\beta\otimes\beta d\\ &= 0\end{aligned}$$

$\varepsilon(\beta^2)=\varepsilon(\beta)\varepsilon(\beta)=0$,

$$\begin{aligned}\Delta(a\beta-pq^{-1}\beta a) &= \Delta(a)\Delta(\beta)-pq^{-1}\ \Delta(\beta)\Delta(a)\\ &= (a\otimes a+\beta\otimes\gamma)(a\otimes\beta+\beta\otimes d)-pq^{-1}\ (a\otimes\beta+\beta\otimes d)(a\otimes a+\beta\otimes\gamma)\\ &= a^2\otimes a\beta+a\beta\otimes ad+\beta a\otimes\gamma\beta-pq^{-1}(a^2\otimes\beta a-a\beta\otimes\beta\gamma+\beta a\otimes da)\\ &= a^2\otimes(a\beta-pq^{-1}\beta a)+a\beta\otimes ad-q^{-1}a\beta\otimes\beta\gamma+pq^{-1}a\beta\otimes\beta\gamma-a\beta\otimes da\\ &= a^2\otimes(a\beta-pq^{-1}\beta a)+a\beta\otimes[ad-da-q^{-1}(1-p)\beta\gamma]\\ &= 0\end{aligned}$$

$\varepsilon(a\beta-pq^{-1}\beta a)=\varepsilon(a)\varepsilon(\beta)-pq^{-1}\ \varepsilon(\beta)\varepsilon(a)=0$.

Aynı şekilde, (6.3) deki diğer bağıntıların da Δ ve ε tasvirleri altında korunduğu gösterilir.

Not 6.1 (6.3) deki bağıntılar $p=q^2$ için [15] deki ve $p=pq$ için [16] daki bağıntılarla aynı olur.

6.4 T Süper Matrisinin Tersi

Matris elemanları (6.3) bağıntılarını sağlayan T kuantum süper matrisinin tersini bulmak istiyoruz. Klasik durumda olduğu gibi, matrisin sağ tersi ve sol tersi bulunup, bu matrislerin eşitliği gösterilecektir.

Eğer $T_R^{-1}=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$ olmak üzere $T.T_R^{-1}=I$ ise T_R^{-1}, T matrisinin sağ tersidir. Öyleyse, A,B,C,D matris elemanlarını belirlemek gerekiyor. İşlemleri kolaylaştırmak için,

$\Delta_1=da-pq^{-1}\beta\gamma$ ve $\Delta_2=ad-q\gamma\beta$

diyelim. Eğer a ve d elemanlarının (sembolik) terslerinin mevcut olduğunu kabul edersek, $T.T_R^{-1} = I$ eşitliği,

$$aA + \beta C = 1, \quad aB + \beta D = 0,$$
$$\gamma A + dC = 0, \quad \gamma B + dD = 1$$

eşitliklerine denk olduğundan, Δ_1^{-1} ve Δ_2^{-1} in mevcut yani

$$\Delta_1^{-1} = (da - pq^{-1}\beta\gamma)^{-1} = a^{-1}d^{-1} + pq^{-1}a^{-1}d^{-1}\beta\gamma a^{-1}d^{-1}$$

ve

$$\Delta_2^{-1} = (ad - q\gamma\beta)^{-1} = d^{-1}a^{-1} + qd^{-1}a^{-1}\gamma\beta d^{-1}a^{-1}$$

olması, T_R^{-1} in matris elemanlarının

$$A = a^{-1} + pq^{-1}a^{-1}d^{-1}\beta\gamma a^{-1} \qquad B = -pq^{-1}a^{-1}d^{-1}\beta$$
$$C = -qd^{-1}a^{-1}\gamma \qquad D = d^{-1} + qd^{-1}a^{-1}\gamma\beta d^{-1}$$

şeklinde olmasını gerektirir. Yani

$$T_R^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} + pq^{-1}a^{-1}d^{-1}\beta\gamma a^{-1} & -pq^{-1}a^{-1}d^{-1}\beta \\ -qd^{-1}a^{-1}\gamma & d^{-1} + qd^{-1}a^{-1}\gamma\beta d^{-1} \end{pmatrix}$$

dir. Benzer düşünce ve işlemler ile $T_L^{-1}.T = I$ olacak şekildeki T_L^{-1} matrisi

$$T_L^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} + q^{-1}a^{-1}\beta\gamma d^{-1}a^{-1} & -p^{-1}q\beta a^{-1}d^{-1} \\ -q^{-1}\gamma d^{-1}a^{-1} & d^{-1} + p^{-1}qd^{-1}\gamma\beta a^{-1}d^{-1} \end{pmatrix}$$

şeklinde bulunur.

Aşağıdaki eşitlikler gösterir ki $T_L^{-1} = T_R^{-1}$ dir:

- $a^{-1} + pq^{-1}a^{-1}d^{-1}\beta\gamma d^{-1} = a^{-1} + a^{-1}\beta d^{-1}\gamma a^{-1} = a^{-1} + q^{-1}a^{-1}\beta\gamma d^{-1}a^{-1}$
- $-pq^{-1}a^{-1}d^{-1}\beta = -a^{-1}\beta d^{-1} = -p^{-1}q\beta a^{-1}d^{-1}$
- $-qd^{-1}a^{-1}\gamma = -d^{-1}\gamma a^{-1} = q^{-1}\gamma d^{-1}a^{-1}$
- $d^{-1} + qd^{-1}a^{-1}\gamma\beta d^{-1} = d^{-1} + d^{-1}\gamma a^{-1}\beta d^{-1} = d^{-1} + p^{-1}qd^{-1}\gamma\beta a^{-1}d^{-1}$

O halde,

$$T^{-1}=\begin{pmatrix} a^{-1}+a^{-1}\beta d^{-1}\gamma a^{-1} & -a^{-1}\beta d^{-1} \\ -d^{-1}\gamma a^{-1} & d^{-1}+d^{-1}\gamma a^{-1}\beta d^{-1} \end{pmatrix} \tag{6.4}$$

olur. Bu ters matris

$$\begin{aligned} T^{-1} &= \begin{pmatrix} \Delta_1^{-1}d & -pq^{-1}\Delta_1^{-1}\beta \\ -q\Delta_2^{-1}\gamma & \Delta_2^{-1}a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Delta_1^{-1}d^2 & 0 \\ 0 & \Delta_2^{-1}a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d^{-1} & -d^{-1}\beta d^{-1} \\ -a^{-1}\gamma a^{-1} & a^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde de yazılabilir.

6.5 T Süper Matrisinin Kuantum Süper Determinantı

Eğer T matrisinin a ve d matris elemanlarının a^{-1} ve d^{-1} formal terslerinin mevcut olduğunu kabul ederek, onu

$$T=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma a^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d-\gamma a^{-1}\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a^{-1}\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazarsak (Gauss ayrışımı) T nin süper determinantı

$$sD_q(T)=a(d-\gamma a^{-1}\beta)^{-1}=ad^{-1}-\beta d^{-1}\gamma d^{-1} \tag{6.5}$$

olarak tanımlanır [15].

Şüphesiz, kuantum süper determinant, başka şekilde de elde edilebilir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \Delta_2^{-1}a^2 &= (d^{-1}a^{-1}+qd^{-1}a^{-1}\gamma\beta d^{-1}a^{-1})a^2 \\ &= d^{-1}a+qd^{-1}a^{-1}\gamma\beta d^{-1}a \\ &= ad^{-1}+q^{-1}(1-p)d^{-1}\beta\gamma d^{-1}+qd^{-1}a^{-1}\gamma\beta d^{-1}a \\ &= ad^{-1}+q^{-1}(1-p)d^{-1}\beta\gamma d^{-1}+p^{-1}q^2d^{-1}a^{-1}\gamma a\beta d^{-1} \\ &= ad^{-1}+q^{-1}(1-p)d^{-1}\beta\gamma d^{-1}+p^{-1}qd^{-1}\gamma\beta d^{-1} \\ &= ad^{-1}+q^{-1}(1-p)d^{-1}\beta\gamma d^{-1}-q^{-1}d^{-1}\beta\gamma d^{-1} \\ &= ad^{-1}-pq^{-1}d^{-1}\beta\gamma d^{-1}=ad^{-1}-\beta d^{-1}\gamma d^{-1} \\ &= sD_q(T) \end{aligned}$$

dir.

Teorem 6.3 $sD_q(T)$ süper kuantum determinantı T süper matrisinin matris elemanları ile değişmelidir.

İspat Her *i,j*=1,2 için $[sD_q(T), t_{ij}] = 0$ olduğu gösterilmelidir. İkisi aşağıda gösterilmiştir:

$$[sD_q(T), a] = (ad^{-1} - \beta d^{-1}\gamma d^{-1})(a) - (a)(ad^{-1} - \beta d^{-1}\gamma d^{-1})$$

$$= (ad^{-1}a - \beta d^{-1}\gamma d^{-1}a) - (a^2 d^{-1} - a\beta d^{-1}\gamma d^{-1}) \quad ; ad^{-1} = d^{-1}a + q^{-1}(p-1)d^{-1}\beta\gamma d^{-1}$$

$$= ad^{-1}a - \beta d^{-1}\gamma d^{-1}a - \{a[d^{-1}a + q^{-1}(p-1)d^{-1}\beta\gamma d^{-1}] - pq^{-1}ad^{-1}\beta\gamma d^{-1}\}$$

$$= -\beta d^{-1}\gamma d^{-1}a + q^{-1}ad^{-1}\beta\gamma d^{-1} \qquad ; \beta d^{-1} = pq^{-1}d^{-1}\beta$$

$$= -\beta d^{-1}\gamma d^{-1}a + \beta d^{-1}\gamma d^{-1}a$$

$$= 0;$$

$$[sD_q(T), \beta] = (ad^{-1} - \beta d^{-1}\gamma d^{-1})(\beta) - (\beta)(ad^{-1} - \beta d^{-1}\gamma d^{-1})$$

$$= (ad^{-1}\beta - \beta d^{-1}\gamma d^{-1}\beta) - (\beta ad^{-1} - \beta^2 d^{-1}\gamma d^{-1})$$

$$= ad^{-1}\beta - \beta ad^{-1} \qquad ; \beta a = p^{-1}qa\beta$$

$$= ad^{-1}\beta - p^{-1}qa\beta d^{-1} \qquad ; \beta d^{-1} = pq^{-1}d^{-1}\beta$$

$$= ad^{-1}\beta - ad^{-1}\beta$$

$$= 0.$$

γ ve d için de benzer işlemlerle, $[sD_q(T), \gamma] = 0$ ve $[sD_q(T), d] = 0$ oldukları görülür.□

6.6 $O(GL_{p,q}(1|1))$ Süper-Hopf Cebiri

Yukarıda elde edilen $sD_q(T)$ kuantum determinantı kullanılarak, $O(M_{p,q}(1|1))$ cebirine onun tersinin eklenmesiyle bir süper-Hopf cebiri tanımlanabilir.

$O(GL_{p,q}(1|1))$, $O(M_{p,q}(1|1))$ cebirinin $t(sD_q)-1$ elemanıyla üretilen iki yanlı idealinin bir bölümü olsun:

$O(GL_{p,q}(1|1)) =: O(M_{p,q}(1|1))[t] \,/\, \langle t\ sD_q - 1\rangle$.

Bu durumda, $O(GL_{p,q}(1|1))$ cebiri yine bir bi-cebirdir.

Teorem 5.3 $O(GL_{p,q}(1|1))$ bi-cebiri, jeneratörlere etkisi

$$\mathrm{S}(a) = a^{-1} + a^{-1}\beta d^{-1}\gamma a^{-1}$$

$$\mathrm{S}(\beta) = -a^{-1}\beta d^{-1}$$

$$\mathrm{S}(\gamma) = -d^{-1}\gamma a^{-1}$$

$$\mathrm{S}(d) = d^{-1} + d^{-1}\gamma a^{-1}\beta d^{-1}$$

olan

$$\mathrm{S}:\ O(GL_{p,q}(1|1)) \ \rightarrow\ O(GL_{p,q}(1|1))$$

ko-tersi ile bir süper-Hopf cebiridir.

İspat Teoremin ispatı için S cebir anti-homomorfizminin (6.3) bağıntılarını koruduğu ve (2.5) özdeşliğinin gerçeklendiği gösterilmelidir. Örneğin,

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}(\beta^2) &= -\mathrm{S}(\beta)S(\beta) \\
&= -(-a^{-1}\beta d^{-1})(-a^{-1}\beta d^{-1}) \\
&= -a^{-1}d^{-1}\beta^2 a^{-1}d^{-1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}(a\beta - pq^{-1}\beta a) &= +\mathrm{S}(\beta)\mathrm{S}(a) - pq^{-1}\mathrm{S}(a)\mathrm{S}(\beta) \\
&= (-a^{-1}\beta d^{-1})(a^{-1} + a^{-1}\beta d^{-1}\gamma a^{-1}) \\
&\quad - pq^{-1}(a^{-1} + a^{-1}\beta d^{-1}\gamma a^{-1})(-a^{-1}\beta d^{-1}) \\
&= -pq^{-1}a^{-1}a^{-1}\beta d^{-1} + pq^{-1}a^{-1}a^{-1}\beta d^{-1} \\
&= -a^{-2}d^{-1}\beta + a^{-2}d^{-1}\beta \\
&= 0
\end{aligned}$$

dir. Diğer bağıntılar için de benzer işlemler yapılarak (6.3) bağıtılarının S tasviri altında korunduğu görülebilir.

Şimdi, (2.5) özdeşliğinin gerçeklendiğini de gösterelim:

$$\begin{aligned}\mu\circ(\mathrm{id}\otimes \mathrm{S})\circ\Delta(a) &= \mu\big((\mathrm{id}\otimes \mathrm{S})(a\otimes a+\beta\otimes\gamma)\big)\\ &= \mu\big(\mathrm{id}(a)\otimes \mathrm{S}(a)+\mathrm{id}(\beta)\otimes \mathrm{S}(\gamma)\big)\\ &= \mu\big(a\otimes(a^{-1}+a^{-1}\beta d^{-1}\gamma a^{-1})+\beta\otimes(-d^{-1}\gamma a^{-1})\big)\\ &= \mathbf{1}+pq^{-1}d^{-1}\beta\gamma a^{-1}-q\beta d^{-1}a^{-1}\gamma \;;\beta d^{-1}=pq^{-1}d^{-1}\beta\;;\gamma a^{-1}=qa^{-1}\gamma\\ &= \mathbf{1}+pd^{-1}\beta a^{-1}\gamma-pd^{-1}\beta a^{-1}\gamma\\ &= \mathbf{1}=\eta(\varepsilon(a))\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mu\circ(\mathrm{S}\otimes \mathrm{id})\circ\Delta(a) &= \mu\big((\mathrm{S}\otimes \mathrm{id})(a\otimes a+\beta\otimes\gamma)\big)\\ &= \mu\big(\mathrm{S}(a)\otimes \mathrm{id}(a)+\mathrm{S}(\beta)\otimes \mathrm{id}(\gamma)\big)\\ &= \mu\big((a^{-1}+a^{-1}\beta d^{-1}\gamma a^{-1})\otimes a+(-a^{-1}\beta d^{-1})\otimes\gamma\big)\\ &= \mathbf{1}+pq^{-1}a^{-1}d^{-1}\beta\gamma-pq^{-1}a^{-1}d^{-1}\beta\gamma)\\ &= \mathbf{1}=\eta(\varepsilon(a))\end{aligned}$$

olup (2.5) özdeşliği a jeneratörü için gösterilmiş olur. Benzer işlemler, diğer jeneratörler için tekrarlanır. □

6.7 $O(GL_{r,q}(1|1))$ Süper-Hopf Cebiri

Önceki bölümde elde ettiğimiz R_I-matrisinden yararlanılarak, $GL(1|1)$ süper grubunun 2-parametreli (p,q)–deformasyonu olan $GL_{p,q}(1|1)$ kuantum süper grubu elde edildi ve $O(GL_{p,q}(1|1))$ cebirinin bir süper-Hopf cebiri olduğu gösterildi. Benzer şekilde, R_{II}-matrisinden yararlanılarak, $GL(1|1)$ grubunun 2-parametreli (r,q)-deformasyonu olan $GL_{r,q}(1|1)$ kuantum süper grubu yapısı oluşturulabilir.

$M_{r,q}(1|1)$ kuantum matris süper uzayındaki T süper matrisinin matris elemanları arasındaki komutasyon bağıntıları, Teorem 6.1 gözönüne alınarak,

$$\begin{aligned}&a\beta=r^{-1}q^{-1}\beta a, \quad a\gamma=q\gamma a\\ &d\beta=r^{-1}q^{-1}\beta d, \quad d\gamma=q\gamma d\\ &ad=da+r^{-1}q^{-1}(r-1)\beta\gamma\\ &\beta\gamma=-rq^{2}\gamma\beta, \qquad \beta^2=\gamma^2=0\end{aligned} \tag{6.6}$$

şeklindedir.

$k\{a,\beta,\gamma,d\}$ bir serbest cebir ve $J_{r,q}$, $k\{a,\beta,\gamma,d\}$ serbest cebirinin (6.6) bağıntılarıyla oluşturulmuş bir iki yanlı ideali olsun. $O(M_{r,q}(1|1))$ cebiri $k\{a,\beta,\gamma,d\}$ nin $J_{r,q}$ ideali ile bölümüdür.

$O(M_{r,q}(1|1))$ cebirine $M_{r,q}(1|1)$ kuantum matris süper uzayının **koordinat cebiri** denir.

Benzer şekilde, $O(M_{r,q}(1|1))$ cebirinin bir süper-Hopf cebir yapısına sahip olduğu gösterilir.

BÖLÜM 7

SOL KOVARYANT DİFERANSİYEL HESAP

7.1 Sol Kovaryant Diferansiyel Hesap

Bu kısımda, $O(\mathbb{R}_q(1|1))$ cebirinin elemanları ile onların diferansiyelleri arasındaki komutasyon bağıntılarının, $GL_{p,q}(1|1)$ kuantum süper grubunun etkisi altında invaryant kaldığı gösterilecektir. Bunun için, kuantum süper düzlem üzerine sol ko-etkiden yararlanılacaktır. Birçok durumda, bir Hopf cebiri bir cebire etki eder öyle ki bu ko-etki bu cebirin yapısına bağlıdır. Bu durum aşağıdaki tanım ile açıklanabilir.

Tanım 7.1 $\mathcal{A}$ süper-Hopf cebiri için bir sol kuantum düzlem yada, denk olarak, bir sol $\mathcal{A}$-ko-modül cebiri,

$$\left(\mathrm{id}\otimes\delta_L\right)\circ\delta_L=\left(\Delta\otimes\mathrm{id}\right)\circ\delta_L \qquad \text{ve} \qquad \left(\varepsilon\otimes\mathrm{id}\right)\circ\delta_L=\mathrm{id}$$

eşitliklerini sağlayan $\delta_L:\ \mathcal{X}\to\mathcal{A}\otimes\mathcal{X}$ cebir homomorfizmiyle birlikte bir $\mathcal{X}$ süper cebiridir.

Tanım 7.1 gereğince $\mathcal{F}(\mathbb{R}_q(1|1))$ süper-Hopf cebiri, ko-çarpmaya göre bir sol kuantum süper düzlem olarak düşünülebilir.

Teorem 7.1 $\mathcal{F}(\mathbb{R}_q(1|1))$ süper-Hopf cebiri $O(M_{p,q}(1|1))$ süper cebirinin sol ko-modül cebiridir. Sol ko-etki aşağıdaki gibidir:

$$\delta_L(x_i)=\sum_{i=1}^{2}t_{ik}\otimes x_k\ .$$

Tanım 7.2 (Γ,d), $\mathcal{X}$ üzerinde bir $\mathbb{Z}_2$-dereceli diferansiyel hesap ve $\delta_L:\Gamma\to\mathcal{A}\otimes\Gamma$ cebir homomorfizmi, Γ üzerinde $\mathcal{A}$ nın bir sol ko-etkisi olsun. Eğer δ_L tasviri aşağıdaki eşitlikleri sağlayacak şekilde mevcut ise (Γ,d) nin sol-kovaryant olduğu söylenir:

i) $\Delta_L(u)=\delta_L(u)\quad u\in\mathcal{X}$

ii) $\delta_L\circ\mathrm{d}=(\tau\circ\mathrm{d})\circ\delta_L$.

Teorem 7.2 (Γ,d), $O(GL_{p,q}(1|1))$ süper Hopf cebirine göre sol-kovaryant $\mathbb{Z}_2$-dereceli birinci mertebeden bir diferansiyel hesaptır. Burada $\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}\theta\}$, Γ nın bir serbest sağ $\mathcal{F}(\mathbb{R}_q(1|1))$-modül tabanıdır ve hesabın bimodül yapısı

$$x\cdot\mathrm{d}x=p\,\mathrm{d}x\cdot x,\qquad x\cdot\mathrm{d}\theta=q\,\mathrm{d}\theta\cdot x+(p-1)\,\mathrm{d}x\cdot x$$

$$\theta\cdot\mathrm{d}x=-q^{-1}p\,\mathrm{d}x\cdot\theta\ ,\quad \theta\cdot\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}\theta\cdot\theta$$

ile verilir.

İspat Belli ki, $\delta_L:\mathcal{F}(\mathbb{R}_q(1|1))\to O(GL_{p,q}(1|1))\otimes\mathcal{F}(\mathbb{R}_q(1|1))$ tasvirinin $O(\mathbb{R}_q(1|1))$ cebirinin jeneratörlerine etkisi

$$\begin{aligned}\delta_L(x)&=a\otimes x+\beta\otimes\theta\\ \delta_L(\theta)&=\gamma\otimes x+d\otimes\theta\end{aligned}\tag{7.1}$$

dir. Buna göre,

$$\begin{aligned}\delta_L(\mathrm{d}x)&=a\otimes\mathrm{d}x-\beta\otimes\mathrm{d}\theta\\ \delta_L(\mathrm{d}\theta)&=-\gamma\otimes\mathrm{d}x+d\otimes\mathrm{d}\theta\end{aligned}\tag{7.2}$$

olup, (4.10) bağıntılarının δ_L nin etkisi altında korunması gerekir. Eğer (4.10a) denklemine δ_L yi etki ettirirsek, sol taraf

$$\begin{aligned}\delta_L(x\cdot\mathrm{d}x)=\delta_L(x)\delta_L(\mathrm{d}x)&=(a\otimes x+\beta\otimes\theta)(a\otimes\mathrm{d}x-\beta\otimes\mathrm{d}\theta)\\ &=a^2\otimes x\cdot\mathrm{d}x-a\beta\otimes x\cdot\mathrm{d}\theta+\beta a\otimes\theta\cdot\mathrm{d}x+\beta^2\otimes\theta\cdot\mathrm{d}\theta\\ &=a^2\otimes\{p\,\mathrm{d}x\cdot x\}-a\beta\otimes\{q\,\mathrm{d}\theta\cdot x+(p-1)\,\mathrm{d}x\cdot\theta\}\\ &\quad-\beta a\otimes\{pq^{-1}\,\mathrm{d}x\cdot\theta\}+\beta^2\otimes\{\mathrm{d}\theta\cdot\theta\}\end{aligned}$$

ve sağ taraf

$$\delta_L(\mathrm{d}x\cdot x)=\delta_L(\mathrm{d}x)\delta_L(x)=(a\otimes\mathrm{d}x-\beta\otimes\mathrm{d}\theta)(a\otimes x+\beta\otimes\theta)$$
$$=a^2\otimes\mathrm{d}x\cdot x-a\beta\otimes\mathrm{d}x\cdot\theta-\beta a\otimes\mathrm{d}\theta\cdot x-\beta^2\otimes\mathrm{d}\theta\cdot\theta$$

olur. Öyleyse,

$$qa\beta-p\beta a=0,\ (1-p)a\beta-pq^{-1}\beta a+pa\beta=0,\ (1+p)\beta^2=0$$

olmalıdır ki, hakikaten böyle olduğu (6.3) bağıntılarından görülür. Benzer işlemler yapılarak, diğerleri de kontrol edilebilir. □

(4.11) bağıntılarının da $O(GL_{r,q}(1|1))$ süper-Hopf cebiri altında sol-kovaryant olduğu gösterilebilir.

Teorem 7.3 (Γ,d), $O(GL_{r,q}(1|1))$ süper Hopf cebiri üzerinde sol-kovaryant $\mathbb{Z}_2$-dereceli birinci mertebeden bir diferansiyel hesaptır. Burada $\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}\theta\}$, Γ nın bir serbest sağ $\mathcal{F}(\mathbb{R}_q(1|1))$-modül tabanıdır ve hesabın bimodül yapısı

$$x\cdot\mathrm{d}x=r\ \mathrm{d}x\cdot x\qquad x\cdot\mathrm{d}\theta=qr\ \mathrm{d}\theta\cdot x$$

$$\theta\cdot\mathrm{d}x=-q^{-1}\ \mathrm{d}x\cdot\theta+(1-r)\mathrm{d}\theta\cdot x\qquad \theta\cdot\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}\theta\cdot\theta$$

ile verilir.

İspat İstenilen Teorem 7.2 nin ispatına benzer şekilde yapılır. □

BÖLÜM 8

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, $\mathcal{F}(\mathbb{R}_q(1|1))$ süper-Hopf cebiri üzerine kovaryant hesaplar yapılarak, $O(\mathbb{R}_q(1|1))$ cebirinin elemanları ile onların diferansiyelleri arasındaki komutasyon bağıntıları elde edilmiş, buradan hareketle, kuantum R-matrisleri bulunmuştur. *R*-matris yaklaşımı ile $GL(1|1)$ süper grubunun iki adet 2-parametreli deformasyonuna ulaşılmış ve komutasyon bağıntılarının, bu kuantum süper gruplarının etkisi altında invaryant kaldığı gösterilmiştir.

Benzer düşüncelerle, farklı kuantum süper uzaylarda yeni çıkarımlar elde etmek mümkün olabilir.

KAYNAKLAR

[1] Drinfeld, V.G., (1986). “Quantum groups”, Amer. Math. Soc., 798–820.

[2] Connes, A., (1991). “Noncommutative Geometry”, New York: Academic Press.

[3] Woronowicz, S.L., (1989). “Differential Calculus on Compact Matrix Pseudo-groups (Quantum Groups)”, Comm. Math. Phys., 122: 125-170.

[4] Woronowicz, S.L., (1987). “Twisted SU(2) group. An example of noncommutative differential calculus”, Publ. RIMS Kyoto Univ. 23: 118-181.

[5] Manin, Yu,I., (1988). ‘’Quantum Groups and Noncommutative Geometry”, Montreal Univ. Preprint, CRM-1561.

[6] Wess, J. and Zumino, B., (1990). “Covariant Differential Calculus on the Quantum Hyperplane”, Nucl. Phys., 18: 302-312.

[7] Soni, S., (1990). “Differential Calculus on the Quantum Superplane”, J. Phys. A: Math. Gen., 24: 619–624.

[8] Celik, S., (1998). “Differential geometry of the q-superplane”, J. Phys. A: Math. Gen., 31:9695-9701.

[9] Celik, S., (2006). “Cartan Calculi On The Quantum Superplane”, J. Math. Phys., 47: 083501.

[10] Celik, S., (2015). “Bicovariant Differential Calculus on the Quantum Superspace $\mathbb{R}_q(1|2)$”, Journal of Algebra and Its Applications, 9: 1650172.

[11] Westra, D., www.mat.univie.ac.at/~westra/supermatrices, 26 Nisan 2018.

[12] Manin, Yu I., (1989). “Multiparametric Quantum Deformation of the General Linear Supergroup”, Communications in Mathematical Physics, 123: 163-175.

[13] Jimbo, M., (1986). “Quantum R-Matrix for the Generalized Toda System”, Commun. Math. Phys., 102: 537-547.

[14] Faddeev, L. D., Reshetikhin, N. Yu., and Takhtajan, L. A., (1990). ‘’Quantization of Lie Groups and Lie Algebras”, Leningrad Math. J., 1: 193-225.

[15] Schmidke, W.B., Vokos, S.P., Zumino, B., (1990). “Differential Geometry of the Quantum Supergroup $GL_q(1|1)$”, Z. Phys. C - Particles and Fields, 48: 249-255.

[16] Dabrowski, L., and Wang, L., (1991). ‘’Two-parameter Quantum Deformation of $GL(1|1)$”, Physics Letters B, 266: 51-54.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : İlknur TEMLİ

Doğum Tarihi ve Yeri : 03.01.1994 – İKİZCE

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : ilknurtemli0@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Lisans	Matematik	Marmara Üniversitesi	2015
Lise	Sayısal	Yunus Emre Lisesi	2011

YAYINLARI

Bildiri

1. Çelik, S. ve Temli, İ., (2018), ''Covariant Differential Calculi on $\mathcal{F}(\mathbb{R}_q(1|1))$ '', International Conference on Mathematical Advences And Applıcatıons (ICOMAA2018), 11-13 May 2018, Yildiz Technical University, ISTANBUL-TURKEY.