T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ AYAKLI ROBOTLARIN MODELLENMESİ VE KONTROLÜ

KENAN MÜDERRİSOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MEKATRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
MEKATRONİK MÜHENDİSLİĞİ PROGRAMI

DANIŞMAN
DOÇ. DR. AYDIN YEŞİLDİREK

İSTANBUL, 2016

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ AYAKLI ROBOTLARIN MODELLENMESİ VE KONTROLÜ

Kenan MÜDERRİSOĞLU tarafından hazırlanan tez çalışması 12.08.2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Mekatronik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Aydın YEŞİLDİREK

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Aydın YEŞİLDİREK

Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Doç. Dr. Vasfi Emre ÖMÜRLÜ

Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Murat DOĞRUEL

Marmara Üniversitesi _____

Bu çalışma, TÜBİTAK 2211 Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı tarafından 1649B021752398 numaralı başvuru numarası ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Tez süresince ilgisi ve yardımları için danışman hocam Doç. Dr. Aydın YEŞİLDİREK'e sonsuz teşekkürü bir borç bilirim. Sağlık problemleri yaşamasına rağmen ilgi ve özverisini hiç eksiltmedi. Özellikle teknik konulardaki desteği sayesinde kendisinden çok şey öğrendim. Böylesine değerli bir insanla tanıştığıma çok memnun oldum.

Yüksek lisans eğitimim boyunca verdikleri akademik eğitim ve kattıkları değerler için Doç. Dr. Vasfi Emre Ömürlü ve Doç. Dr. Erhan Akdoğan'a çok teşekkür ederim. Robotik alanında ve akademik yayın oluşturma konusunda çok şey öğrendim.

Lise, Lisans ve Yüksek Lisans öğrenimlerim boyunca hep yanımda olan gerek teknik gerek manevi desteklerini esirgemeyen dostlarım Doğan Onur ARISOY, A. Oğuzhan AHAN ve Berkay VOLKANER'e çok ama çok teşekkür ederim.

Hep yanımda olan ve eğitim hayatımda beni hep destekleyen, bana güvenen ve mutlu olmamı isteyen annem Aynur MÜDERRİSOĞLU'na, babam Mustafa MÜDERRİSOĞLU'na ve kardeşim Neslihan MÜDERRİSOĞLU'na çok teşekkür ederim ve her zaman teşekkür etmeye devam edeceğim.

Bu tez iki ayaklı bir robotun bilgisayar ortamında oluşturulması ve dengeli yürüyüşünün simülasyonu üzerinedir.

Gönlünüzden geçen hayırlısı olsun.

Temmuz, 2016

Kenan MÜDERRİSOĞLU

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ vii

KISALTMA LİSTESİ ix

ŞEKİL LİSTESİ x

ÇİZELGE LİSTESİ xi

ÖZET xii

ABSTRACT xiv

BÖLÜM 1

GİRİŞ 1

1.1 Literatür Özeti 1
1.2 Tezin Amacı 3
1.3 Hipotez 4

BÖLÜM 2

KİNEMATİK ANALİZ 5

2.1 Kinematik Modelleme 5
2.1.1 Düz Kinematik 5
2.1.2 Ters Kinematik 10

BÖLÜM 3

DİNAMİK MODEL 16

3.1 Jacobian Matrisleri 17
3.2 Euler-Lagrange Denklemi 19
3.3 D'Alembert Prensibi 23
3.4 Genelleştirilmiş D'Alambert Prensibi ile 7 SD'li Sistemin Dinamik Denklemlerinin Oluşturulması 25
3.4.1 D'Alembert Prensibinin Uygulanması 26
3.5 Pasif ve Dinamik Yürüyüş 30
3.6 Optimum Yürüyüş Yörüngeleri 30
3.6.1 Sıfır Moment Noktası (SMN) 31
3.6.2 Arzulanan Yürüyüşün Belirlenmesi 32
3.7 7 SD'li İki Ayaklı Robot Modelinin Yapısı 33

3.7.1 7 SD'li İki Ayaklı Robot Dinamiği 33
3.7.2 Yer Tepki Kuvvetleri 33

BÖLÜM 4

KONTROL YÖNTEMLERİ 35

4.1 PD Kontrol 35
4.2 Hesaplanmış Tork Metodu 37

BÖLÜM 5

SİMÜLASYONLAR 38

5.1 On İki Serbestlik Dereceli Sistemin İki Boyutlu Yürüyüşü 38
5.2 Yedi Serbestlik Dereceli Sistemin MATLAB Simulink Modelinin Açıklanması 41
5.3 MATLAB Simulasyonu İçin Kullanıcı Arayüzü Oluşturulması 44

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER 47

6.1 On İki Serbestlik Dereceli Sistemden Elde Edilen Sonuçlar 47
6.2 Yedi Serbestlik Dereceli Sistemden Elde Edilen Sonuçlar 49

KAYNAKLAR 52

EK-A

6 SERBESTLİK DERECELİ BACAĞIN ATALET MATRİSİNİN ELEMANLARI 57

EK-B

6 SERBESTLİK DERECELİ BACAĞIN CHRISTOFFEL SEMBOLLERİ 61

EK-C

7 SERBESTLİK DERECELİ SİSTEMİN DİNAMİK DENKLEMLERİ 69

Ek-D

SİMULASYON PARAMETRELERİ 74

ÖZGEÇMİŞ 77

SİMGE LİSTESİ

x, y, z	Yuvarlanma, yunuslama ve sapma eksenleri
i	Hareketli eksen takımı indeksi
α	Eksen takımları arasındaki açı
a_i	İki eksen arası uzaklıklar
d_i	Eklemler arası uzaklıklar
θ_i	Eklem açıları
θ_1	6 serbestlik dereceli robotun kalça ekseni sapma açısı
θ_2	6 serbestlik dereceli robotun kalça ekseni yuvarlanma açısı
θ_3	6 serbestlik dereceli robotun kalça ekseni yunuslama açısı
θ_4	6 serbestlik dereceli robotun diz ekseni yunuslama açısı
θ_5	6 serbestlik dereceli robotun bilek ekseni yunuslama açısı
θ_6	6 serbestlik dereceli robotun bilek ekseni yuvarlanma açısı
H_i^{i-1}	Hareketli eksen takımları arasındaki homojen dönüşüm matrisleri
m_3, m_4, m_6	6 serbestlik dereceli bacağın bağlantı kütleleri
l_3, l_4, l_6	6 serbestlik dereceli bacağın bağlantı uzunlukları
J	Jacobian matrisi
J_{vi}	Lineer hız jacobian matrisleri
J_{wi}	Açısal hız jacobian matrisleri
L	Lagrange
K, T	Kinetik enerji
P	Potansiyel enerji
τ	Tork
v	Çizgisel hız vektörü
w	Açısal hız vektörü
q	Genelleştirilmiş koordinatlar durum vektörü
I_i	i numaralı çubuğun atalet momenti
$M(q)$	6 serbestlik dereceli bacağın atalet matrisi
g	Yerçekimi ivmesi
h	Yerden yükseklik
C_{ijk}	6 serbestlik dereceli bacağın Christoffel sembolleri
G	6 serbestlik dereceli bacak için yerçekimi vektörü

(x_0, y_0)	Gövdenin ağırlık merkezinin koordinatları
r_0, r_1, r_2	7 serbestlik dereceli sistem bağlantılarının ağırlık merkezlerinin bağlantının uç noktasına olan uzaklıkları
l_0, l_1, l_2	7 serbestlik dereceli sistemin bağlantı uzunlukları
m_0, m_1, m_2	7 serbestlik dereceli sistemin bağlantı kütleleri
α	7 serbestlik dereceli sistemde gövdenin açısı
β_L, β_R	7 serbestlik dereceli sistemde sol ve sağ bacağın uyluk açısı
γ_L, γ_R	7 serbestlik dereceli sistemde sol ve sağ bacağın diz açısı
F_q	Genelleştirilmiş koordinatlardaki kuvvetlerin vektörü
(x_{L1}, y_{L1})	7 serbestlik dereceli sistemde sol uyluk bağlantısının ağırlık merkezi
(x_{R1}, y_{R1})	7 serbestlik dereceli sistemde sağ uyluk bağlantısının ağırlık merkezi
(x_{L2}, y_{L2})	7 serbestlik dereceli sistemde sol kaval bağlantısının ağırlık merkezi
(x_{R2}, y_{R2})	7 serbestlik dereceli sistemde sağ kaval bağlantısının ağırlık merkezi
(x_{LG}, y_{LG})	7 serbestlik dereceli sistemde sol ayakucunun ağırlık merkezi
(x_{RG}, y_{RG})	7 serbestlik dereceli sistemde sağ ayakucunun ağırlık merkezi
F_{q_i}	Genelleştirilmiş koordinatlardaki kuvvetler
$\Delta\beta$	7 serbestlik dereceli sistemde sol ve sağ uyluk açılarının farkı
$M(q), A(q)$	Atalet matrisleri
$b(q, \dot{q}, F)$	Genelleştirilmiş koordinatlar ve zemin kuvvet değerlerini içeren vektör
F_n	Normal kuvvet vektörü
μ_k, μ_s	Kinetik ve statik sürtünme katsayıları
M	Moment vektörü
xz	Yanal düzlem
m_i	i numaralı çubuğun ağırlık merkezine indirgenmiş kütlesi
k_x, k_y	Zemin ayak arasındaki yay katsayısı
b_x, b_y	Zemin ayak arasındaki sönüm oranı

KISALTMA LİSTESİ

BIPED	İki ayaküstünde yürüyen
c	Kosinüs
DH	Denavit-Hertenberg
İAF	İki ayak fazı
KM	Kütle merkezi
LHS	Sol el tarafı (left hand side)
LTSM	Lineer ters sarkaç modeli
RHS	Sağ el tarafı (right hand side)
s	Sinüs
SD	Serbestlik derecesi
SMN	Sıfır moment noktası
TAF	Tek ayak fazı

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 Robot bacağının koordinatları ve eklem tanımlamaları…… 6
Şekil 2.2 Eksen hareketleri…… 10
Şekil 2.3 z_2, z_3, z_4 eksenlerinin dikey düzlemdeki ilişkileri…… 11
Şekil 2.4 Bacağın z_5 eksenine dik geometrik gösterimi…… 12
Şekil 3.1 6 SD'li bacağın eklemleri ve kütle merkezleri…… 17
Şekil 3.2 D'Alambert prensibine göre serbest cisim diyagramı…… 23
Şekil 3.3 Basit ters sarkaç modeli……24
Şekil 3.4 İki ayaklı robotun koordinatları ve sabitleri (a) ve dış kuvvetler (b)……..26
Şekil 3.5 SMN ayak tabanı gösterimi……31
Şekil 3.6 SMN genel gösterimi…… 32
Şekil 3.7 Yer modeli ve bir ayağın yer ile temasının şeması…… 34
Şekil 4.1 İki ayaklı robotun Simulink PD kontrol modeli…… 36
Şekil 5.1 Eklem açılarının bir periyotluk değişimi ……..39
Şekil 5.2 Eklem hareketlerinin fonksiyon çıktısı modeli…… 39
Şekil 5.3 6 SD'li bacağın SimMechanics modeli…… 40
Şekil 5.4 12 SD'li sistemin Simulink modeli……40
Şekil 5.5 Sistemin Simulink genel gösterimi …… 41
Şekil 5.6 Sistemin $A(q)$, $b(q,\dot{q},F)$ ve M ifadelerinin yer aldığı Simulink diyagramı.. 41
Şekil 5.7 Yürüme fazları…… 42
Şekil 5.8 Ayakların yere basma zamanları…… 43
Şekil 5.9 7 SD'li sistem için Simulink PD kontrol bloğu…… 43
Şekil 5.10 Simulasyon arayüzü…… 45
Şekil 6.1 Eklemlerin Açısal Hızları…… 48
Şekil 6.2 Eklemlerin Açısal İvmeleri…… 48
Şekil 6.3 Eklemlerde oluşan tork değerleri…… 49
Şekil 6.4 Referans açı değerleri ve kontrol edilmiş açı değerleri…… 50
Şekil 6.5 Zemin kuvvetleri……50
Şekil 6.6 Düz zeminde yürüyüş…… 51

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 2.1 6 SD'li bacağın serbestlik dereceleri…… 7
Çizelge 2.2 6 SD'li bacak eklemleri için DH parametreleri…….. 7
Çizelge 2.3 6 SD'li bacağın bağlantı uzunlukları ve kütle değerleri……..8
Çizelge 3.1 7 SD'li bacağın serbestlik dereceleri…… 27
Çizelge 3.2 7 SD'li bacağın kütle ve uzunlukları…… 27
Çizelge 4.1 7 SD'li robotun PD kontrolcü değerleri…… 36
Çizelge 5.1 7 SD'li sistemin başlangıç koşulları…… 44

ÖZET

İKİ AYAKLI ROBOTLARIN MODELLENMESİ VE KONTROLÜ

Kenan MÜDERRİSOĞLU

Mekatronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Aydın YEŞİLDİREK

İnsansı robotlar ve dış iskelet sistemleri günümüzde popülerlik kazanmış bilimsel araştırma konularıdır. Tek bacaklı zıplayabilen robotlardan, iki ayaklı insansı ve çok bacaklı robotlara araştırma çalışmaları hızla devam etmektedir. Bu çalışmada iki ayaklı robotlar ele alınmıştır.

Bu tezde iki bacaktan oluşan insansı bir robotun kinetik analizleri yapılarak insan yürüyüşüne yakın bir hareket sağlamak amacıyla değişik yürüme düzenleri incelenmiştir. İki ve üç boyutlu uzaylarda dinamik modeller elde edilmiştir. Önce on iki serbestlik dereceli bir robotun kinematik analizleri yapılmış ve yürüyüş düzeni gerçek insan verilerine dayanarak belirlenmiştir. Ayrıca iki alt uzuv ve bir gövdeden oluşan 7 serbestlik dereceli (7-SD) iki ayaklı bir robotun MATLAB/Simulink ortamında kurulması ve yürüme simülasyonu yapılmıştır.

İki ayaklı robot hareketini tanımlamadan önce bacağın hareket kabiliyetinin gözlemlendiği kinematik analiz yapılmıştır. Ardından sisteme ait dinamik denklemler çıkarılmıştır. Sistemin hareketi için referans değerlere dayanan kontrole ihtiyaç duyulmuştur. Ayrıca iki ayaklı bir robot sistemi yürüyüşü esnasında farklı durumlar ihtiva ettiğinden hareket farklı fazlara ayrılmıştır. Bunlar sistemdeki yerle temas noktası noktasal olduğundan iki ayak destekli faz ve tek ayak destekli fazdır.

İlk sistem insan bacağının hareket kabiliyetine göre üç boyutlu olarak modellenmiş ve kinematik analizi yapılmıştır. Daha sonra sistem iki boyutlu olarak MATLAB/Simulink programı altında SimMechanics aracı ile görselleştirilmiştir. Gerçek insanın sagittal

düzlemde yürüyüşü sırasında bacak eklemlerinin açı değişimleri literatürden alınarak iki boyutlu yürüyüş için kullanılmıştır. Fourier yöntemi kullanılarak, eğri oturtmak suretiyle periyodik gerçek açı değişimi ve bunun türevlerinin alınmasıyla alarak açısal hız ardından açısal ivme değerleri de yine periyodik sinyaller şeklinde elde edilmiştir. Bu değerlerin sisteme girilmesiyle döngüsel bacak hareketleri gözlemlenmiştir.

Bu tezde kabul edilip ele alınan sınırlamalar doğrultusunda sistem, kaymadan sıfır eğimli düz bir yüzeyde iki boyutlu uzayda düzlemsel bir yürüyüş yapmaktadır. Buradaki yürüme düzeni tek ayak destekli ve iki ayak destekli faz olarak ayrılmıştır. Yürüyüş çevrimindeki fazlar ele alındığında farklı holonomik ve holonomik olmayan durumlar oluşmaktadır. Ağırlık merkezinin denge kontrolü için sıfır moment noktası hesaplaması kullanılmış ve gerekli tepki kuvvetleri hesaplanmıştır.

İki boyutlu uzayda, saggital düzlemde hareket eden robotun holonomik olan ve olmayan kısıtları göz önünde tutularak 7 serbestlik dereceli olarak kurulan ikinci sistem Newton mekaniği ve d'Alembert prensibinden faydalanılarak hareket denklemleri çıkarılıp dinamik hareket ve kontrol sistemleri tanımlanmıştır. Sonuç olarak PD kontrol hesaplanmış tork (computed torque) uygulanarak düz bir zemin üzerinde yürüyüş başarıyla gerçekleştirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: İki ayaklı robot, robot kontrol, kinematik, dinamik, MATLAB-Simulink

ABSTRACT

MODELLING AND CONTROLLING OF BIPED ROBOTS

Kenan MÜDERRİSOĞLU

Department of Mechatronic Engineering

MSc. Thesis

Adviser: Assoc. Prof. Aydın Yeşildirek

Humanlike robots and exoskeleton systems are popular scientific research topics. From one legged hopping robots to two legged humanlike and multi-legged robots research are being conducted rapidly. In this study, two legged robots are discussed.

In this thesis, kinematic analysis of a two legged humanlike robot has been done and its dynamic models have been developed in two and three dimensional spaces after the evaluation of different patterns to acquire motion similar to human walking. First, kinematical analysis of twelve degrees of freedom robot has been studied and its gait path defined based on real human gait cycle data. Additionally, a 7 degrees of freedom (7-DOF) robot with two lower limbs and a torso has been modeled and its walk simulated in MATLAB/Simulink environment.

Firstly kinematic analysis of a lower limb has been done which revealed its motion capabilities. Thence dynamic equations of the system have been derived. A reference based control was needed for movement of the system. Additionally, walking of the two legged robot consist of different conditions, movement has been divided into different phases. These phases may be defines as two leg supported phase and one leg supported phase with the limitation of point connections between the system and ground.

First system has been modeled to mimic 3D humanlike and its kinematic analysis has been realized. Thence system has been visualized in 2D with SimMechanics toolbox under

MATLAB/Simulink. Real human gait cycle data on sagittal plane which contain leg angle changes during walk have been used for 2D walking simulations. These angle changes which are taken from literature have been turn into functions with Fourier curve fitting method, then angular velocity and angular acceleration have been found via derivation. After these values have been presented to the system, rotational leg movements have been gathered.

In this thesis, system has been walked in 2D on a flat plane without slip under given restrictions. When walking phases in a cycle are investigated, one may observe holonomic and nonholonomic conditions. Zero moment point calculation has been used for the balance of the center of gravity and for the calculations of the needed reaction forces.

The second system is established in seven degree of freedom and taken in to account the motion on saggital plane, in 2D, under holonomic and nonholonomic restrictions. Equations of motion of this system have been obtained via Newton mechanics and d'Alembert principle and dynamic movement and control systems have been defined. Walk on a flat plane has been successfully realized with the application of PD control computed torque.

Keywords: BIPED robot, robot control, kinematic, dynamic, MATLAB-Simulink

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

BIPED robot nedir? BIPED robot, destek ve hareket için iki ayak kullanan herhangi bir sistemdir. İki ayaklı robotların geçmişi 1966 senesinde Waseda Üniversitesi'ndeki insansı robot araştırma grubunun çalışmalarına dayanıyor. Bu işin babası olarak yine aynı üniversiteden Prof. Dr. Ichiro Kato anılmaktadır. 1973'te bilinen ilk insansı robot olan 'Wabot', Waseda Üniversitesi tarafından geliştirilmiştir [1]. 2000li yıllara gelindiğinde Honda'nın ASIMO adlı robotu sahneye çıkmıştır. Bu robot başlarda sadece yürürken asıl amacı olan insanın günlük işlerini yapabilmesi için geliştirilmesine devam edilmektedir. Şu anda merdiven inip çıkma, koşma ve zıplama gibi karmaşık hareketleri yapabilmekle birlikte çevresini görerek hareket edebilmektedir [2], [3]. Daha sonrasında AIST ve Kawada Endüstri Şirketi tarafından HRP (İnsansı Robot Projesi) ile geliştirilen HRP-2 robotu kendi kendine ayağa kalkabilmesiyle ASIMO'ya üstünlük sağlamıştır [4], [5]. HRP-4C ile insansı mimikler robotlarda görülmeye başlanmıştır [6], [7].

2003 yılında Münih Teknik Üniversitesi, JOHNNIE adlı otonom yürüyebilen bir robot yapmıştır [8], [9]. Daha sonra 2009 yılında antropomorfik 25 serbestlik dereceli (SD), insan gibi stabil yürüyebilen bir robot olan LOLA duyurulmuştur [10], [11]. Aynı sene Boston Dynamic'in geliştirdiği dört ayaklı BigDog adlı robot dengesi ve hareket kabiliyetiyle tüm dünyanın ilgisini çekmiştir [12]. Aynı grup PETMAN isimli iki ayaklı robotu da duyurmuştur. Fakat bu prototipin teknik rapor ve detayları askeri bir projenin bir parçası olduğundan açıklanmamıştır. Bu robotu yine aynı ekibin geliştirdiği, iki ayağı üzerinde oldukça güçlü

bir şekilde durabilen ATLAS isimli robot izlemiştir [13], [14], [15]. İtalya Teknoloji Enstitüsü'nün (IIE) 10 seneyi aşkın bir süredir üzerinde çalıştığı ve sosyal medyada da takip edilen iCUB isimli robotları, bebek gibi neredeyse her şeyi sıfırdan öğrenecek şekilde çalışmaktadır. Görme özelliği ile denge ve bir cismi tanıma veya eliyle gördüğü cisme uzanabilmektedir. Dokunma özelliği ile de cisimleri tanıyabilmektedir [16], [17], [18], [19] [20]. Bir Fransız firması olan Aldebaran-Robotics tarafından yapılan NAO isimli robot 2008 yılında Robot Standart Liginde Sony'nin geliştirdiği dört ayaklı AIBO isimli robotların yerini almış ve robot futbolunda iki ayakların dönemi başlamıştır. NAO, kompaktlığı ve hareket kabiliyeti ile kendinden söz ettirirken, eğitim amaçlı ve hobi robotu olarak da kullanılabilecek hale getirilmiştir. Otizmli çocukların tedavisi içinde kullanılmıştır [21], [22] [23], [24], [25], [26], [27]. DARWIN isimli robot da futbol turnuvaları için tasarlanmış iki ayaklı bir robottur[28]. 2013 yılında POPPY isimli robot hem insana boyut ve iskelet yapısı olarak benzemesiyle hem de 3 boyutlu yazıcıdan çıkarılarak yapılan bir robottur. Bu robot açık kaynak kodlu olarak yapılmıştır ve geliştirilmeye devam edilmektedir [29], [30].

İnsansı robotların 50 yıllık geçmişi, insanlık tarihi düşünüldüğünde oldukça kısa bir süre gibi görülmektedir. İnsanların arzusu, robotların gündelik işlerin tamamını yapabilecek teknolojiye sahip olmasıdır. Dolayısıyla robotlardan insan gibi yürüyebilmesi ve koşabilmesi beklenmektedir. Çok az bir araştırma grubunun böylesi bir sistemi oluşturma imkânı olsa da iki ayaküstünde yürümek, robot çalışmalarındaki ana teknik problemdir. Burada sıkıntı yaratan durum yüksek performanslı sensör ve eyleyicilerin pahalılığı ve uygulanabilir özel kontrol metotlarının oluşturulmasının zorluğudur.

Duruma farklı bir bakış açısından bakarsak, çözüm arayışını kolaylaştıracak ve aynı zamanda verimli çalışacak görece basit bir modelin oluşturulması gerekmektedir. Bunun için özel bir yönteme başvurmadan iki ayaküstünde yürümeyi genelleştirilmiş bir metotla gösterebilmek gerekmektedir. Metodun kullanışlılığı ve tutarlılığı, teorik ve pratik olarak kanıtlanmalıdır. Robot kinematiğinin anlaşılması ve sistemlerin simüle edilebilmesi için kullanılan DH (Denavit-Hertenberg) metodunun temeli 1955 yılında atılmıştır. Ancak bunun robotlar için kullanılması ve kitap haline getirilmesi Paul Richard tarafından 1981 yılında gerçekleşmiştir [31]. Günümüzde robotların modellenmesinde bu yöntem kullanılmaktadır. Miomir Vukobratovic'in önerdiği SMN (Sıfır Moment Noktası) yöntemi iki ayaklı robot yürüyüşündeki en önemli metottur [32], [33]. DH ve SMN metotlarının

anlatıldığı birçok kitap bulunmaktadır [34], [35]. BIPED robot modellemesinde bir diğer yardımcı yöntem de LTSM (Lineer Ters Sarkaç Modeli)'dir [36], [37]. LTSM ile denge sorununa çözüm getirilirken yürüyüş yolu belirlemesi de yapılabilmektedir. BIPED robotlarda farklı bacak modelleri ve serbestlik dereceleri sürekli denenmiştir. 3 SD, 5 SD, 6 SD, 7 SD, 8 SD'li bacak modelleri denenmiştir. [38], [39], [40]. Bu çalışmada 6 SD'li bacak modeli kullanılmıştır. BIPED robotlar fizik tedavi ve rehabilitasyon ve güç arttırıcı destek sistemi gibi birçok farklı alanda kullanılmaktadırlar [41]. Bu noktada sistemin ismi dış iskelet olarak geçmektedir.

Robot kontrolünde kullanılan birbirlerinden oldukça farklı kontrol metodu vardır. Bunlarda bazıları; hesaplanmış tork metodu, PID, PD kontrolcüler, bulanık mantık [42], yapay sinir ağı [43], modern kontrol yöntemlerinden H∞ kontrolü [44] ve adaptif gürbüz kontrol [45] olarak karşımıza çıkmaktadır. Bir başka önemli konu da enerji ihtiyacının tayini ve optimizasyonudur. Bir sistemin enerji ihtiyacı onun çalışma süresini ve menzilini belirlemektedir. Bunun üzerine yapılmış çalışmalarda literatürde bulunabilmektedir [46].

Bu çalışmada DH yöntemi ile kinematik modeli elde edilen 12 serbestlik dereceli sistemin yürüme analizi ve d'Alembert prensibi ve virtüel iş yöntemi ile sistem modellenmiş 7 SD'li ikinci bir sistemin düz bir zemin üzerinde yürümesi PD kontrolü ile yapılmıştır.

1.2 Tezin Amacı

Gelişen teknoloji ile birlikte insanlığa daha faydalı işler yapmak mümkün hale gelmektedir. Bu çalışmanın da altında bu düşünce ile örtüşen bir yapı bulunmaktadır. İki ayaklı robotik sistemler günümüzde giderek yaygınlaşmakta ve birçok farklı amaçta kullanılmaktadırlar. Bunların bir bölümü otonom olarak yine farklı amaçlar için kullanılabildiği gibi insanlar için destek ve güçlendirici sistemler dış iskelet olarak da kullanılabilmektedirler. Özellikle dış iskelet sistemleri ilgimi çeken bir teknoloji sınıfı olduğundan tezimi iki ayaklı robotlar üzerine yapmak istedim. Bu tez kapsamında bir insan bacağının lokomasyonun incelenmesi, gerçek insan yürüyüşünün model üzerinde gerçeklenmesi ve düz bir zeminde yürüyüş modelinin kontrol edilmesi amaçlanmıştır.

1.3 Hipotez

Bu çalışmada iki farklı iki ayaklı robot sisteminin matematiksel modeli oluşturulmuş ve oluşturulan ikinci model için geri beslemeli kontrol yolu ile dengeli bir yürüme düzeni sağlanmıştır. İki farklı matematiksel yaklaşım yapılmıştır. Denavit Hertenberg ve Lagrange enerji metotları ilk model için kullanılmış ve insan bacağının hareket kabiliyetinde bir sistem kurulmuştur. Yürüyüş hareketinin gözlemlenmesi için yürüyüş esnasında sagittal düzlemde eklem açılarının gerçek bir insandan alınan değerlerinden faydalanılmıştır. Denklemlerin çıkarımında elde edilecek sinyalin periyodik olması önem arz etmektedir. İkinci sistemde 7 serbestlik dereceli iki ayaklı bir model oluşturulmuştur. Bu modelde kullanılan D'Alambert metodu ile zeminden oluşacak tepki kuvvetleri elde edilmiş ve düz zeminde PD kontrolü ile yürütülmesi simule edilmiştir. Sistemler her ne kadar basitleştirilerek kurulsalar da yürüyüş esnasındaki faz değişimleri, kontrolü kademelendirmeyi gerektirmiştir. Çalışmada kullanılan modellerde noktasal ayak kullanılması bu faz değişimini iki ile sınırlamıştır. Tek ayak ve iki ayak üzerinde durulan süreler, fazları ifade ederken fazların değişimi ise uygulanan kontrolcünün değişeceğini göstermektedir. Dolayısıyla yürüyüş modelinin kontrolü için iki farklı PD kontrol katsayısı her bir eklem için çıkarılmış ve faz değişim durumlarında değişmek suretiyle model üzerinde uygulanmıştır. Arzulanan hareketler her ne kadar önceden belirlenmiş ve kontrol sağlanacak olsa da diz eklemi için bir hareket kısıtlayıcı oluşturulması gerek görülmüştür.

BÖLÜM 2

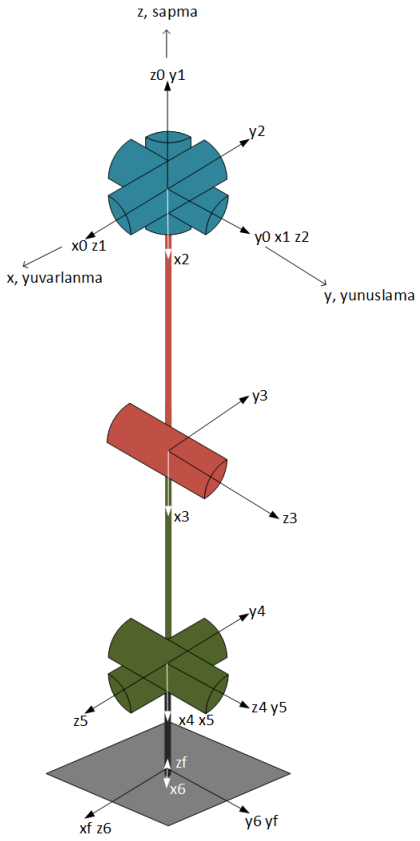
KİNEMATİK ANALİZ

Robotlarda kinematik modelin çıkarılması en önemli aşamalardan biridir. Bunun sebebi robotun eyleyicilerinde ve algılayıcılarında oluşan verilerin benzetim ile elde edebilmesini sağlamasıdır. Böylece robotun çalışma uzayı bilinerek hareket tanımlamları modele özgü bir şekilde yapılabilmektedir. Maxwell'in noktasal vektörleri Kartezyen Uzay'ında 4x4 homojen dönüşüm matrisi olarak tanımlanmıştır [31]. Denavit-Hertenberg bu matrisleri kullanarak bir koordinatın konumunu ve oryantasyonunu başka bir koordinat sistemine göre tanımlamıştır. Bu çalışmada iki ayaklı bir robot için DH yöntemiyle düz ve ters kinematik modeller oluşturulmuştur.

2.1 Kinematik Modelleme

2.1.1 Düz Kinematik

Düz kinematik, bir robotun eklem açılarını kullanarak, robotun hareketli ucu ile orijini arasındaki konum ve oryantasyonu veren bir yöntemdir [34]. Bu çalışmada modellenen robotun her bir bacağı 6-SD (Serbestlik Dereceli)'dir. Robota ait detaylar Çizelge 2.1'de gösterilmiştir. Şekil 2.1'de gösterilen şema ve eksen takımlarından yola çıkarak DH (Denavit-Hertenberg) tanımlaması yardımıyla birbirini takip eden her bir eksen, sabit bir orijine göre zincir şeklinde hareket etmek üzere bağlanmıştır.



Şekil 2.1 Robot bacağının koordinatları ve eklem tanımlamaları

Denavit-Hertenberg yöntemi, robotların kinematik modelinin çıkarımı için en çok kullanılan yöntemdir. Bu yöntemde 4 ana değişken vardır. Bunlar, iki eksen uzaklığı a_i, $i-1$ ve i eksenleri arasındaki bağ açısı α_i, bağlar arasındaki uzuv uzunlukları d_i ve iki bağ arasındaki eklem açısı da θ_i'dir. Eşitlik (2.1)'de homojen transformasyon matrisi verilmiştir [34].

$$H_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -c\alpha_i s\theta_i & s\alpha_i s\theta_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\alpha_i c\theta_i & -s\alpha_i c\theta_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Yöntem gereği ilk olarak dönme eksenleri belirlenir. z ekseni, noktasal koordinat takımları için dönme ekseni olarak kabul edilir. Dönme eksenleri bağlardan bir fazla olacak şekilde numaralandırılır. Bu numaralandırma Şekil 2.1'de görülmektedir. (x_0, y_0, z_0) olarak

tanımlanan sabit eksen takımı orijini ifade etmektedir. Ardından gelen numaralandırılmış eksen takımları sırasıyla; kalça sapma ekseni, kalça yuvarlanma ekseni, kalça yunuslama ekseni, diz yunuslama ekseni, bilek yunuslama ekseni ve bilek yuvarlanma eksenidir.

Çizelge 2.1 6 SD'li bacağın serbestlik dereceleri

Kalça	3 SD
Diz	1 SD
Bilek	2 SD

DH yönteminde homojen dönüşüm matrisleri kullanılmaktadır. Eşitlik (2.1)'de homojen dönüşüm matrisinin genel gösterimi verilmiştir. Bu matrisler Çizelge 2.2'de [46]'den alınan parametreler ile oluşturularak zincir şeklinde bir sistemi oluşturmuşlardır.

Çizelge 2.2 6 SD'li bacak eklemleri için DH parametreleri

$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{\theta_i}$	$\boldsymbol{\alpha_i}$	$\boldsymbol{a_i}$	$\boldsymbol{d_i}$
1	90	90	0	0
2	-90	-90	0	0
3	0	0	$\boldsymbol{l_3}$	0
4	0	0	$\boldsymbol{l_4}$	0
5	0	90	0	0
6	0	0	$\boldsymbol{l_6}$	0

θ_i açıları eklemler arası açıları, α_i eklemlerdeki hareketli noktasal koordinat eksenlerinin arasındaki açıyı, d_i uzuvların uzunluklarını, s sinüs ve c ise kosinüs'ün kısaltmalarıdır. Yukarıdaki çizelgelerde verilen uzunluk ve kütle değerleri [46]'ye göre Çizelge 2.3'te belirtilmiştir. Bacağa ait matris eşitlikleri sırasıyla (2.2)'den (2.7)'ye kadardır.

Çizelge 2.3 6 SD'li bacağın bağlantı uzunlukları ve kütle değerleri

	Uzunluklar (m)	Kütleler (kg)
Üst bacak l_3, m_3	0.350	1.729
Alt bacak l_4, m_4	0.350	0.783
Bilekten yere kadar l_6, m_6	0.100	0.886

H_1^0'den H_F^6'e kadar olan sürekli homojen dönüşüm matrisleriyle ayağın koordinatları orijine göre (2.9)'da gösterildiği şekilde yazılmıştır. (2.2)'de kalçanın sapma hareketi yapan hareketli eksen takımı orijindeki sabit eksen takımına göre tanımlanmıştır.

$$H_1^0 = \begin{bmatrix} c(\theta_1+90°) & 0 & s(\theta_1+90°) & 0 \\ s(\theta_1+90°) & 0 & -c(\theta_1+90°) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s\theta_1 & 0 & c\theta_1 & 0 \\ c\theta_1 & 0 & s\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

(2.3)'teki gösterim hareketli kalça sapma eksenin yuvarlanma eksenine göre tanımlamasını vermektedir.

$$H_2^1 = \begin{bmatrix} c(\theta_2-90°) & 0 & -s(\theta_2-90°) & 0 \\ s(\theta_2-90°) & 0 & c(\theta_2-90°) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\theta_2 & 0 & c\theta_2 & 0 \\ -c\theta_2 & 0 & s\theta_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Eşitlik (2.4)'te ise kalçadaki yunuslama hareketini sağlayan hareketli eksen takımının konumunu ve yönelimini yuvarlanma eksenine göre belirtmektedir. Buradaki l_3 uzunluğu kalçanın dönme hareketi sonrasında dizin orijine olan uzaklığını belirtmektedir.

$$H_3^2 = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & l_3c\theta_3 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & l_3s\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Eşitlik (2.5) diz açısındaki dönme hareketini yunuslama eksen takımına göre tanımlanmaktadır. l_4 uzunluğu, dizin dönmesi socunda ayak bileğinin konumunu

belirtirken, matrisin sağ üst bölümünde yer alan $3x3$'lük matris bileğin bulunduğu konuma uzanma durumunu belirtmektedir.

$$H_4^3 = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & l_4 c\theta_4 \\ s\theta_4 & c\theta_4 & 0 & l_4 s\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

(2.6) ve (2.7) ise, ayak ucunun konumunu ve uzanımını bilekteki eksen takımına göre belirtmektedir. l_6, bilek ile yer arasındaki mesafedir.

$$H_5^4 = \begin{bmatrix} c\theta_5 & 0 & s\theta_5 & 0 \\ s\theta_5 & 0 & -c\theta_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

$$H_6^5 = \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & l_6 c\theta_6 \\ s\theta_6 & c\theta_6 & 0 & l_6 s\theta_6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

Eşitlik (2.8)'de ayak ucunun oryantasyonunu orijindeki eksen takımına göre düzenlemek için eksenler arasında bir dönüşüm uygulaması yapılmıştır. Burada x ekseni z ekseni olarak ve z ekseni de $-x$ ekseni olacak şekilde bir düzenleme yapılmıştır.

$$H_F^6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

Bu matrislerin sırayla çarpılması sonucunda oluşan H_F^0, orijinden ayakucuna kadar trigonometrik açılım özelliklerinden faydalanılarak elde edilmiş olur. Eşitlik (2.9)'daki matris, ayakucunun konum ve rotasyon bilgilerini orijine göre vermektedir. Buna ileri yön kinematiği de denmektedir.

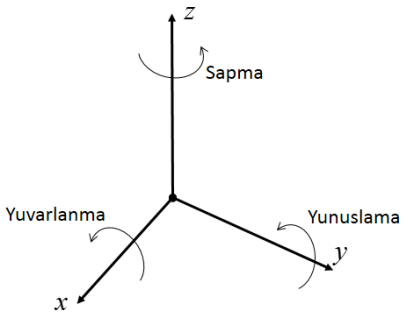
$$H_F^0 = H_1^0 H_2^1 H_3^2 H_4^3 H_5^4 H_6^5 H_F^6 \tag{2.9}$$

2.1.2 Ters Kinematik

Ters kinematik çözümün amacı ayakucunun çalışma uzayında erişebileceği bir konum ve rotasyon durumu için gerekli olan eklem açılarını hesaplamaktır [34]. Eşitlik (2.10)'da P matrisi Düz kinematik cevabını vermektedir. Matristeki $\{P_x, P_y, P_z\}$ vektörü ayağın x, y, z koordinatlarını, $\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$ yönelim matrisi ise ayağın hangi doğrultuda olduğunu belirtmektedir. P matrisinin elemanları bilindiği takdirde eklem açıları hesaplanabilir.

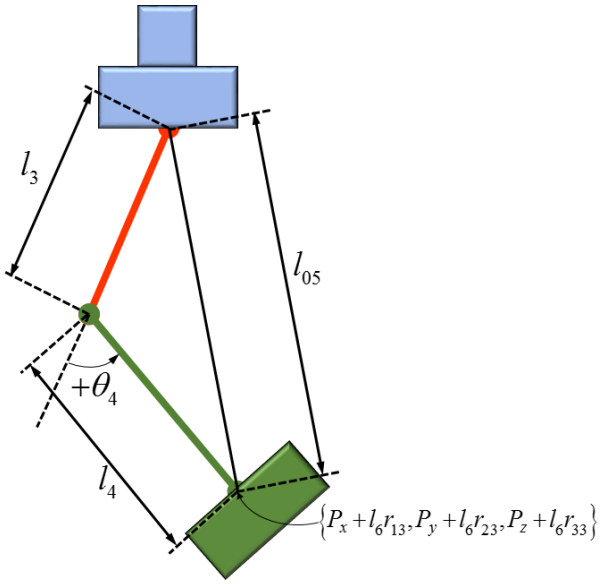
$$H_F^0 = H_1^0 H_2^1 H_3^2 H_4^3 H_5^4 H_6^5 H_F^6 = P = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Yönelim matrisi ayakucunun Şekil 2.2'deki gibi yuvarlanma, sapma ve yunuslama oryantasyonunu belirtmektedir. P matrisinin ilk sütunu x eksenine göre yönelimi belirtirken diğer sütunlar da sırasıyla y ve z eksenlerine göre ayakucunun yönelimini belirtmektedir.



Şekil 2.2 Eksen hareketleri

Elde edilen, doğrusal olmayan denklemler tekil çözüme sahip olmayabilirler. Bu nedenden ötürü geometrik çözüm için ters kinematiğin sadeleştirilmesi gerekmektedir. Şekil 2.3'teki gibi z_2, z_3, z_4 eksenleri dikey düzlemde çizilirse,



Şekil 2.3 z_2, z_3, z_4 eksenlerinin dikey düzlemdeki ilişkileri

Burada ayak bileğinin merkezi olan o_5, $H_6^5 H_F^6$ matrisinin tersinden elde edilir. Bu ters matrisi (2.10) ile çarptığımızda ortaya çıkan (2.11)'in sağ tarafındaki öteleme vektörü $\{P_x + l_6 r_{13}, P_y + l_6 r_{23}, P_z + l_6 r_{33}\}$ bize bileğin pozisyonunu verecektir.

$$H_5^0 = H_1^0 H_2^1 H_3^2 H_4^3 H_5^4 = P\left(H_6^5 H_F^6\right)^{-1} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & P_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & P_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(H_6^5 H_F^6\right)^{-1} = \begin{bmatrix} * & * & * & P_x + l_6 r_{13} \\ * & * & * & P_y + l_6 r_{23} \\ * & * & * & P_z + l_6 r_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

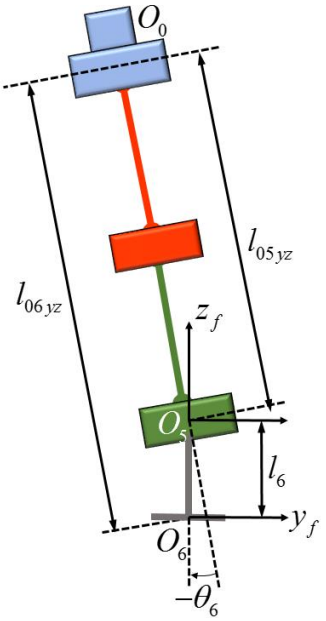
Kalçadan ayak bileğine kadar olan mesafe geometrik özelliklerden faydalanılarak (2.12) ile hesaplanabilir.

$$l_{05} = \sqrt{\left(P_x + l_6 r_{13}\right)^2 + \left(P_y + l_6 r_{23}\right)^2 + \left(P_z + l_6 r_{33}\right)^2} \tag{2.12}$$

θ_4 diz açısı, Eşitlik (2.13)'de verilen kosinüs teoremiyle hesaplanmaktadır. Bunun için (l_3, l_4) uzunlukları ve l_{05} mesafesi bilinmelidir.

$$\theta_4 = \cos^{-1}\left(\frac{{l_{05}}^2 - {l_3}^2 - {l_4}^2}{2 l_3 l_4}\right) \tag{2.13}$$

z_5 eksenine dik bir düzlemde Şekil 2.4'teki durum oluşmaktadır. P matrisinin tersinin alınması durumunda da ayağın orijine göre pozisyonunu veren Eşitlik (2.14)'teki $\{P^{-1}(2,4), P^{-1}(3,4)\}$ vektörü oluşmuştur.



Şekil 2.4 Bacağın z_5 eksenine dik geometrik gösterimi

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & \dfrac{P_x(r_{21}r_{33} - r_{23}r_{31}) - P_y(r_{11}r_{33} - r_{13}r_{31}) + P_z(r_{11}r_{23} - r_{13}r_{21})}{r_{11}r_{22}r_{33} - r_{11}r_{23}r_{32} - r_{12}r_{21}r_{33} + r_{12}r_{23}r_{31} + r_{13}r_{21}r_{32} - r_{13}r_{22}r_{31}} \\ * & * & * & \dfrac{-P_x(r_{21}r_{31} - r_{22}r_{31}) - P_y(r_{11}r_{32} - r_{12}r_{31}) + P_z(r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21})}{r_{11}r_{22}r_{33} - r_{11}r_{23}r_{32} - r_{12}r_{21}r_{33} + r_{12}r_{23}r_{31} + r_{13}r_{21}r_{32} - r_{13}r_{22}r_{31}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

Şekil 2.4'teki geometriden l_{06yz} ve l_{05yz} mesafeleri Eşitlik (2.15) ve (2.16)'nın yardımıyla hesaplanabilmektedir.

$$l_{06yz} = \sqrt{\{P^{-1}(2,4)\}^2 + \{P^{-1}(3,4)\}^2} \tag{2.15}$$

$$l_{05yz} = \sqrt{\{P^{-1}(2,4)\}^2 + \{P^{-1}(3,4) - l_6\}^2} \tag{2.16}$$

Bileğin yuvarlanma açısı, l_6 uzunluğu ve l_{06yz}, l_{05yz} mesafelerinden yola çıkarak kosinüs teoremiyle hesaplanabilmektedir.

$$\theta_6 = sign\left(P^{-1}(2,4)\right)\cos^{-1}\left(\frac{{l_{06yz}}^2 - {l_{05yz}}^2 - {l_6}^2}{2l_{05yz}l_6}\right) \tag{2.17}$$

Yapılan geometrik çözümleme ters kinematiğin basitleştirilmesini sağlamaktadır. $H_5^4 H_6^5 H_F^6$ matrisinin tersini Eşitlik (2.10) ile çarpınca Eşitlik (2.18), (2.19) ve (2.20) kolaylıkla elde edilebilir. (2.18)'de görüldüğü gibi eşitlikten yararlanılarak θ_2 hesaplanabilmektedir.

$$H_1^0 H_2^1 H_3^2 H_4^3 = P\left(H_5^4 H_6^5 H_F^6\right)^{-1} \tag{2.18}$$

$$RHS = \begin{bmatrix} * & * & r_{12}\cos\theta_6 - r_{13}\sin\theta_6 & * \\ * & * & r_{22}\cos\theta_6 - r_{23}\sin\theta_6 & * \\ * & * & r_{32}\cos\theta_6 - r_{33}\sin\theta_6 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

$$LHS = \begin{bmatrix} * & * & -\sin\theta_1\cos\theta_2 & * \\ * & * & \cos\theta_1\cos\theta_2 & * \\ * & * & \sin\theta_2 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

(2.20)'deki θ_2, kalçanın yuvarlanma açısıdır ve çözümü Eşitlik (2.21)'deki gibidir.

$$\theta_2 = \sin^{-1}\left(r_{32}\cos\theta_6 - r_{33}\sin\theta_6\right) \tag{2.21}$$

Yine (2.20)'deki (1,3) ve (2,3) elemanları yardımıyla kalçanın sapma açısı Eşitlik (2.22)'deki gibi hesaplanabilmektedir.

$$\theta_1 = \alpha \tan 2\left(\frac{r_{12}\cos\theta_6 - r_{13}\sin\theta_6}{-\cos\theta_2}, \frac{r_{22}\cos\theta_6 - r_{23}\sin\theta_6}{\cos\theta_2} \right) \tag{2.22}$$

$H_1^0 H_2^1$ ve $H_6^5 H_F^6$'nın tersini alıp (2.10) ile çarparak Eşitlik (2.23), (2.24) ve (2.25)'i elde edilebilmektedir. Böylece θ_3'ü hesaplanabilmektedir.

$$H_3^2 H_4^3 H_5^4 = \left(H_1^0 H_2^1\right)^{-1} P \left(H_6^5 H_F^6\right)^{-1} \tag{2.23}$$

$$RHS = \begin{bmatrix} * & * & * & -P_x \sin\theta_1 \sin\theta_2 + P_y \cos\theta_1 \sin\theta_2 - P_z \cos\theta_2 - l_6\left(r_{13}\sin\theta_1\sin\theta_2 - r_{23}\cos\theta_1\sin\theta_2 + r_{33}\sin\theta_2\right) \\ * & * & * & -P_x\cos\theta_1 - P_y\sin\theta_1 - l_6\left(r_{13}\cos\theta_1 + r_{23}\sin\theta_1\right) \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

$$LHS = \begin{bmatrix} * & * & * & \left(l_3 + l_4\cos\theta_4\right)\cos\theta_3 - l_4\sin\theta_4\sin\theta_3 \\ * & * & * & l_4\sin\theta_4\cos\theta_3 + \left(l_3 + l_4\cos\theta_4\right)\sin\theta_3 \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

Eşitliğin sağ tarafını temsil eden RHS matrisinin (1,4) ve (2,4) elemanları sırasıyla α ve β ile gösterilirse,

$$\begin{aligned} \alpha &= -P_x \sin\theta_1 \sin\theta_2 + P_y \cos\theta_1 \sin\theta_2 - P_z \cos\theta_2 \\ &\quad -l_6\left(r_{13}\sin\theta_1\sin\theta_2 - r_{23}\cos\theta_1\sin\theta_2 + r_{33}\sin\theta_2\right) \\ \beta &= -P_x\cos\theta_1 - P_y\sin\theta_1 - l_6\left(r_{13}\cos\theta_1 + r_{23}\sin\theta_1\right) \end{aligned} \tag{2.26}$$

Aynı eşitlik sol taraftan da yazılabilir ve iki simultane denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} \left(l_3 + l_4\cos\theta_4\right)\cos\theta_3 - l_4\sin\theta_4\sin\theta_3 &= \alpha \\ l_4\sin\theta_4\cos\theta_3 + \left(l_3 + l_4\cos\theta_4\right)\sin\theta_3 &= \beta \end{aligned} \tag{2.27}$$

θ_3'ün çözümü için sinüs ve kosinüs değerleri de aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned} \sin\theta_3 &= \frac{-l_4\sin\theta_4\cdot\alpha + \left(l_3 + l_4\cos\theta_4\right)\beta}{{l_3}^2 + {l_4}^2 + 2l_3 l_3\cos\theta_4} \\ \cos\theta_3 &= \frac{\left(l_3 + l_4\cos\theta_4\right)\alpha + l_4\sin\theta_4\cdot\beta}{{l_3}^2 + {l_4}^2 + 2l_3 l_3\cos\theta_4} \end{aligned} \tag{2.28}$$

Payda kısmında verilen l_{05} Eşitlik (2.29)'u Şekil 2.3'te görülebilen üçgen kuralı gereği sağlamak zorundadır.

$$l_3{}^2 + l_4{}^2 + 2l_3 l_3 \cos\theta_4 = l_{05}{}^2 \geq 0 \tag{2.29}$$

Böylece kalçanın yuvarlanma açısı, eşitlik (2.30)'daki gibi hesaplanabilmektedir.

$$\theta_3 = \alpha \tan 2\left(-l_4 \sin\theta_4 \cdot \alpha + \left(l_3 + l_4 \cos\theta_4\right)\beta, \left(l_3 + l_4 \cos\theta_4\right)\alpha + l_4 \sin\theta_4 \cdot \beta\right) \tag{2.30}$$

Eşitlik (2.31) ve (2.32)'teki (1,3) ve (2,3) elemanlarından yola çıkarak toplam $\theta_{yunuslama}$ açısı tanımlanabilmektedir.

$$RHS = \begin{bmatrix} * & * & -r_{11}\sin\theta_1\sin\theta_2 + r_{21}\cos\theta_1\sin\theta_2 - r_{31}\cos\theta_2 & * \\ * & * & -r_{11}\cos\theta_1 - r_{21}\sin\theta_1 & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

$$LHS = \begin{bmatrix} * & * & \sin\left(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5\right) & * \\ * & * & -\cos\left(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5\right) & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

$$\theta_{yunuslama} = \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 \tag{2.33}$$

$$\theta_{yunuslama} = \alpha \tan 2\left(-r_{11}\sin\theta_1\sin\theta_2 + r_{21}\cos\theta_1\sin\theta_2 - r_{31}\cos\theta_2, r_{11}\cos\theta_1 + r_{21}\sin\theta_1\right) \tag{2.34}$$

θ_3 ve θ_4 yunuslama açılarının bilinmesi ile bilek eklemindeki yunuslama açısı da (2.35)'deki gibi bulunabilmektedir.

$$\theta_5 = \theta_{yunuslama} - \theta_3 - \theta_4 \tag{2.35}$$

Böylece 6 SD'li bir bacağa ait eklem açıları ters kinematik uygulaması yapılabilecek şekilde hesaplanmıştır. Bu hesaplamalar MATLAB programında kullanılarak bacağın ters kinematik analizi yapılmıştır.

BÖLÜM 3

DİNAMİK MODEL

Dinamik, sistemlerin hareket etmesine neden olan kuvvetlerin incelenmesi şeklinde tanımlanabilir. Bir robot manipülatörünü ivmelendirebilmek, uç noktasını sabit hızla hareket ettirebilmek ve sonunda durdurabilmek için eklemlere belli bir torkun uygulanması gereklidir. Eklemlere uygulanan tork ifadesi, robutun takip ettiği yörüngeye, eklemlerin kütlesine, manipülatörün kaldıracağı yük gibi birçok duruma, bağlıdır. Robot manipülatörünün istenen yörüngeyi takip edebilmesi için sistemin dinamik eşitliklerini kullanarak eklemlere uygulanacak tork ifadelerinin bulunması gereklidir. Bu bölümde de robot dinamiği için gerekli kuvvet, tork vb. değerlerin hesaplanması ile açıklanacaktır.

Bu bölümde sistemdeki Jacobian Matrisleri ve Euler-Lagrange denklemleri verilecektir. Jacobian matrisleri sisteme ait durumların parçalı türevlerini içermektedir. Bu matrisler sayesinde robotların eklemlerinde oluşan kuvvetler hesaplanabilmektedir. Ayrıca başka bir koordinat düzlemine dönüşüm yapabilmek için de kullanılmaktadır.

Dinamik denklemlerin çıkarımı için Euler-Lagrange ve genelleştirilmiş D'Alambert prensibi, Newton-Euler gibi metotlar vardır. Bu çalışmada 12 SD'lik sistem için çıkarım kolaylığı açısından Euler-Lagrange, 7 SD'li sistem için de genelleştirilmiş D'Alambert prensibi tercih edilmiştir. Bu şekilde sistemlerdeki hız, ivme ve torklar hesaplarak geri beslenecek ve kontrol sağlanabilecektir. İlk önce 12 serbestlik dereceli sisteme ait dinamikler tanımlanacak daha sonra serbestlik derecesi daha düşük (7 SD) olan sisteme ait dinamiklerin çıkarımı verilecektir.

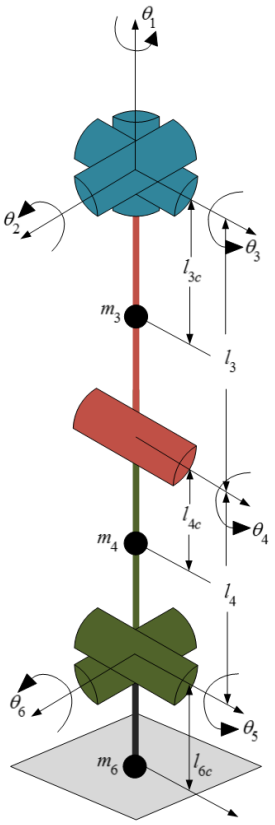
3.1 Jacobian Matrisleri

Jacobian matrisleri iki ayaklı bir robotun yürüyüş durumunun öngörülmesi ve dinamik modelinin oluşturulmasındaki temel yapı taşlarıdır [34]. Jacobian Matrislerinde hareket düz ve dönel olarak bölünerek gösterilebilir [46]. Bu çalışmadaki robotta tüm hareketler dönel olacağından genel Jacobian Matrisinin genel formu şu şekilde yazılabilir.

$$J_i = \begin{bmatrix} J_{vi} \\ J_{wi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{i-1} \times (o_n - o_{i-1}) \\ z_{i-1} \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

(3.1)'deki J_{vi} elemanı doğrusal ifadeleri gösterirken J_{wi} ise dönel ifadeleri belirtmektedir. z_i vektörleri orijinden başlayarak uç uca eklenen transformasyon matrislerinin üçüncü sütunlarının, o_i ise dördündü sütunlarının ilk üç elemanını ifade etmektedir. z_i vektörleri z eksenine göre rotasyonu, o_i vektörü de eklemlerin x, y, z konumlarını vermektedir.

Sistemdeki kütleleri uzuvların orta noktalarında yoğunlaşmış kabul edip ve dinamik sistemi tanımlarsak Şekil 3.1 ortaya çıkacaktır.



Şekil 3.1 6 SD'li bacağın eklemleri ve kütle merkezleri

Bacaktaki her bir kütle için Jacobian matrisi yazılmalıdır. Kütleleri uyluk, kaval ve ayak bölgeleri oluşturduğundan sırasıyla J_3, J_4 ve J_6 ifadeleri ile gösterileceklerdir. $\times$ işlemi vektör elemanlarının birebir çarpılması işlemini ifade etmektedir. Jacobian matrisinin elemanlarını doğrusal ve dönel olarak ayırarak yazacak olursak;

$$
\begin{aligned}
J_{v3} &= \begin{bmatrix} z_0 \times (o_{3C} - o_0) & z_1 \times (o_{3C} - o_1) & z_2 \times (o_{3C} - o_2) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
J_{w3} &= \begin{bmatrix} z_0 & z_1 & z_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
J_{v4} &= \begin{bmatrix} z_0 \times (o_{4C} - o_0) & z_1 \times (o_{4C} - o_1) & z_2 \times (o_{4C} - o_2) & z_3 \times (o_{4C} - o_3) & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

$$
\begin{aligned}
J_{w4} &= \begin{bmatrix} z_0 & z_1 & z_2 & z_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
J_{v6} &= \begin{bmatrix} z_0 \times (o_{6C} - o_0) & z_1 \times (o_{6C} - o_1) & z_2 \times (o_{6C} - o_2) \\ & z_3 \times (o_{6C} - o_3) & z_4 \times (o_{6C} - o_4) & z_5 \times (o_{6C} - o_5) \end{bmatrix} \\
J_{w6} &= \begin{bmatrix} z_0 & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

Yukarıdaki matrislerin elemanlarını tanımlayacak olursak,

$$
\begin{aligned}
z_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \\
z_1 &= \begin{bmatrix} H_1^0(1,3) \\ H_1^0(2,3) \\ H_1^0(3,3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
z_2 &= \begin{bmatrix} H_2^0(1,3) \\ H_2^0(2,3) \\ H_2^0(3,3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta_1 \cos\theta_2 \\ \cos\theta_1 \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 \end{bmatrix} \\
z_3 &= \begin{bmatrix} H_3^0(1,3) \\ H_3^0(2,3) \\ H_3^0(3,3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta_1 \cos\theta_2 \\ \cos\theta_1 \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 \end{bmatrix} \\
z_4 &= \begin{bmatrix} H_4^0(1,3) \\ H_4^0(2,3) \\ H_4^0(3,3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta_1 \cos\theta_2 \\ \cos\theta_1 \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 \end{bmatrix} \\
z_5 &= \begin{bmatrix} H_5^0(1,3) \\ H_5^0(2,3) \\ H_5^0(3,3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 \cos\theta_{345} - \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_{345} \\ \sin\theta_1 \cos\theta_{345} + \cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_{345} \\ -\cos\theta_2 \sin\theta_{345} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
o_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\
o_1 &= \begin{bmatrix} H_1^0(1,4) & H_1^0(2,4) & H_1^0(3,4) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\
o_2 &= \begin{bmatrix} H_2^0(1,4) & H_2^0(2,4) & H_2^0(3,4) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T
\end{aligned}
$$

$$o_3 = \begin{bmatrix} H_3^0(1,4) \\ H_3^0(2,4) \\ H_3^0(3,4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_3 \cos\theta_1 \sin\theta_3 - l_3 \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 \\ -l_3 \sin\theta_1 \sin\theta_3 + l_3 \cos\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 \\ -l_3 \cos\theta_2 \cos\theta_3 \end{bmatrix}$$

$$o_4 = \begin{bmatrix} H_4^0(1,4) \\ H_4^0(2,4) \\ H_4^0(3,4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\theta_1 (l_3 \sin\theta_3 + l_4 \sin\theta_{34}) - \sin\theta_1 \sin\theta_2 (l_3 \cos\theta_3 + l_4 \cos\theta_{34}) \\ -\sin\theta_1 (l_3 \sin\theta_3 + l_4 \sin\theta_{34}) + \cos\theta_1 \sin\theta_2 (l_3 \cos\theta_3 + l_4 \cos\theta_{34}) \\ -\cos\theta_2 (l_3 \cos\theta_3 + l_4 \cos\theta_{34}) \end{bmatrix}$$

$$o_5 = \begin{bmatrix} H_5^0(1,4) \\ H_5^0(2,4) \\ H_5^0(3,4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\theta_1 (l_3 \sin\theta_3 + l_4 \sin\theta_{34}) - \sin\theta_1 \sin\theta_2 (l_3 \cos\theta_3 + l_4 \cos\theta_{34}) \\ -\sin\theta_1 (l_3 \sin\theta_3 + l_4 \sin\theta_{34}) + \cos\theta_1 \sin\theta_2 (l_3 \cos\theta_3 + l_4 \cos\theta_{34}) \\ -\cos\theta_2 (l_3 \cos\theta_3 + l_4 \cos\theta_{34}) \end{bmatrix}$$

$$o_{3C} = \begin{bmatrix} H_3^0(1,4) \\ H_3^0(2,4) \\ H_3^0(3,4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{3C} \cos\theta_1 \sin\theta_3 - l_{3C} \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 \\ -l_{3C} \sin\theta_1 \sin\theta_3 + l_{3C} \cos\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 \\ -l_{3C} \cos\theta_2 \cos\theta_3 \end{bmatrix}$$

$$o_{4C} = \begin{bmatrix} H_4^0(1,4) \\ H_4^0(2,4) \\ H_4^0(3,4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\theta_1 (l_3 \sin\theta_3 + l_{4C} \sin\theta_{34}) - \sin\theta_1 \sin\theta_2 (l_3 \cos\theta_3 + l_{4C} \cos\theta_{34}) \\ -\sin\theta_1 (l_3 \sin\theta_3 + l_{4C} \sin\theta_{34}) + \cos\theta_1 \sin\theta_2 (l_3 \cos\theta_3 + l_{4C} \cos\theta_{34}) \\ -\cos\theta_2 (l_3 \cos\theta_3 + l_{4C} \cos\theta_{34}) \end{bmatrix}$$

$$o_{6C} = \begin{bmatrix} H_6^0(1,4) \\ H_6^0(2,4) \\ H_6^0(3,4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\theta_1 (l_3 \sin\theta_3 + l_4 \sin\theta_{34}) - \sin\theta_1 \sin\theta_2 (l_3 \cos\theta_3 + l_4 \cos\theta_{34}) \\ +l_{6C} \{\sin\theta_1 \cos\theta_2 \sin\theta_6 - \cos\theta_6 (\cos\theta_1 \sin\theta_{345} + \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_{345})\} \\ -\sin\theta_1 (l_3 \sin\theta_3 + l_4 \sin\theta_{34}) + \cos\theta_1 \sin\theta_2 (l_3 \cos\theta_3 + l_4 \cos\theta_{34}) \\ +l_{6C} \{\cos\theta_1 \cos\theta_2 \sin\theta_6 - \cos\theta_6 (\sin\theta_1 \sin\theta_{345} - \cos\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_{345})\} \\ -\cos\theta_2 (l_3 \cos\theta_3 + l_4 \cos\theta_{34}) + l_{6C} (\sin\theta_2 \sin\theta_6 - \cos\theta_2 \cos\theta_6 \cos\theta_{345}) \end{bmatrix}$$

3.2 Euler-Lagrange Denklemi

Dinamik denklem çıkarımında son aşama hareket denklemlerinin oluşturulmasıdır. Bunun için sisteme uygun bir yöntem belirlenmelidir. Hareket denklemlerinin türevlenebilmesi gerekmektedir. 6 eklem ve 3 kütleli bir sistemde bunu yapabilmenin en uygun yolu enerji metotlarının kullanılmasıdır. Euler-Lagrange denklemleri de enerji metoduyla oluşmaktadır [34].

Genelleştirilmiş koordinatlarda herhangi bir n-SD sistemi Euler-Lagrange denklemiyle şu şekilde ifade edilir,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i \tag{3.4}$$

$$L = K - P \tag{3.5}$$

L Lagrangian, K kinetik enerji ve P ise potansiyel enerjidir.

Rijit bir cisim için toplam kinetik enerji doğrusal ve dönel kinetik enerji ifadelerinin toplamından oluşur.

$$K = \frac{1}{2} m v^T v + \frac{1}{2} w^T I w \tag{3.6}$$

Atalet tensörünün genelleştirilmiş koordinatlarda ifade edilmesi gerektiğinden eşitlik (3.7) dönel taşıma matrisi olan R ile çarpılmalıdır.

$$K = \frac{1}{2} m v^T v + \frac{1}{2} w^T R I R^T w \tag{3.7}$$

Toplam kinetik enerji her bir bağlantının ayrı ayrı toplamıdır.

$$K = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{1}{2} m_i v_i^T v_i + \frac{1}{2} w_i^T R_i I_i R_i^T w_i \right\} \tag{3.8}$$

Jacobian matrisini kullanarak kinetik enerji ifadesini her bir eklem için genelleştirilmiş haliyle yazarsak,

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T \left[\sum_{i=1}^{n} \left\{ m_i J_{vi}(q)^T J_{vi}(q) + J_{wi}(q)^T R_i(q) I_i R_i(q)^T J_{wi}(q) \right\} \right] \dot{q} \tag{3.9}$$

Kurulan sistemin bacağında 3 kütle olduğundan kinetik enerji ifadesi eşitlik (3.10)'daki gibi elde edilir.

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T \begin{Bmatrix} m_3 J_{v3}(q)^T J_{v3}(q) + m_4 J_{v4}(q)^T J_{v4}(q) + m_6 J_{v6}(q)^T J_{v6}(q) \\ + J_{w3}(q)^T R_3(q) I_3 R_3(q)^T J_{w3}(q) + J_{w4}(q)^T R_4(q) I_4 R_4(q)^T J_{w4}(q) \\ + J_{w6}(q)^T R_6(q) I_6 R_6(q)^T J_{w6}(q) \end{Bmatrix} \dot{q} \tag{3.10}$$

Eşitlik (3.10)'daki atalet matrisi Eşitlik (3.11)'ki gibi $M(q)$ olarak tanımlanacak olursa,

$$M(q) = m_3 J_{v3}(q)^T J_{v3}(q) + m_4 J_{v4}(q)^T J_{v4}(q) + m_6 J_{v6}(q)^T J_{v6}(q) + J_{w3}(q)^T R_3(q) I_3 R_3(q)^T J_{w3}(q) + J_{w4}(q)^T R_4(q) I_4 R_4(q)^T J_{w4}(q) + J_{w6}(q)^T R_6(q) I_6 R_6(q)^T J_{w6}(q) \quad (3.11)$$

Kinetik enerji ifadesi de Eşitlik (3.12)'deki gibi sadeleşecektir.

$$K = \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} d_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j \quad (3.12)$$

$M(q)$, 6x6 simetrik matrisi elemanlarıyla birlikte Eşitlik (3.13)'te gösterilmiştir.

$$M(q) = \begin{bmatrix} d_{11}(q) & d_{12}(q) & d_{13}(q) & d_{14}(q) & d_{15}(q) & d_{16}(q) \\ * & d_{22}(q) & d_{23}(q) & d_{24}(q) & d_{25}(q) & d_{26}(q) \\ * & * & d_{33}(q) & d_{34}(q) & d_{35}(q) & d_{36}(q) \\ * & * & * & d_{44}(q) & d_{45}(q) & d_{46}(q) \\ * & * & * & * & d_{55}(q) & d_{56}(q) \\ * & * & * & * & * & d_{66}(q) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Robota ait bir bacağın potansiyel enerjisi Eşitlik (3.14)'teki gibi yazılabilmektedir.

$$P = mgh = \sum_{i=1}^{n} m_i g h_{ci}(q) \quad (3.14)$$

Böylece Lagrangian L ifadesi eşitlik (3.15)'daki gibi gösterilebilmektedir.

$$L = K - P = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q} - P(q) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} d_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j - \sum_{i=1}^{n} m_i g h_{ci}(q) \quad (3.15)$$

L'nin kısmi türevinin alınmasıyla eşitlik (3.16)'daki gibi hız ifadesi elde edilmiştir.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} d_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j\right) - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} P(q) = \sum_{j=1}^{n} d_{kj}(q)\dot{q}_j \quad (3.16)$$

Eşitlik (3.16)'nın türevlenmiş hali Eşitlik (3.17)'de verilmiştir.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{j=1}^{n} d_{kj}\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n}\frac{d}{dt} d_{kj}\dot{q}_j = \sum_{j=1}^{n} d_{kj}\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i}\dot{q}_i\dot{q}_j \quad (3.17)$$

Lagrangian'ın pozisyona göre kısmi türevi ise (3.18)'deki gibidir.

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{\partial P}{\partial q_k} \quad (3.18)$$

Eşitlik (3.17) ve (3.18)'den elde edilen Euler-Lagrange eşitliği (3.19)'da görülmektedir.

$$\sum_{j=1}^{n} d_{kj}\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\right\}\dot{q}_i\dot{q}_j + \frac{\partial P}{\partial q_k} = \tau_k \tag{3.19}$$

Christoffel sembollerini C_{ijk} ve yerçekimi kuvvetini $g_k(q)$ olarak eşitlik (3.20) ve (3.21)'de tanımlanacak olursa,

$$C_{ijk} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\right) \tag{3.20}$$

$$g_k(q) \equiv \frac{\partial P(q)}{\partial q_k} \tag{3.21}$$

Böylece hareket denklemini eşitlik (3.22)'teki gibi yazabilir.

$$\sum_{j=1}^{6} d_{kj}(q)\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{6}\sum_{i=1}^{6} c_{ijk}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j + g_k(q) = \tau_k \tag{3.22}$$

Eşitlik (3.22)'teki $\sum_{j=1}^{6}\sum_{i=1}^{6} c_{ijk}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j$ ifadesinde iki farklı kuvvetin gösterimi mevcuttur. $i = j$ durumu santrifüj kuvvetini ifade ederken, $i \neq j$ durumunda Coriolis etkisi görülmektedir. Coriolis etkisinin atalet momenti üzerindeki etkisi çok küçük olduğundan hareket denklemlerini oluştururken ihmal edilmiştir. Böylece eşitlik (3.23)'deki tork denklemleri elde edilmiştir.

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= d_{11}\ddot{\theta}_1 + d_{12}\ddot{\theta}_2 + d_{13}\ddot{\theta}_3 + d_{14}\ddot{\theta}_4 + d_{15}\ddot{\theta}_5 + d_{16}\ddot{\theta}_6 + c_{111}\dot{\theta}_1^2 + c_{221}\dot{\theta}_2^2 + c_{331}\dot{\theta}_3^2 + c_{441}\dot{\theta}_4^2 + c_{551}\dot{\theta}_5^2 + c_{661}\dot{\theta}_6^2 + g_1 \\
\tau_2 &= d_{21}\ddot{\theta}_1 + d_{22}\ddot{\theta}_2 + d_{23}\ddot{\theta}_3 + d_{24}\ddot{\theta}_4 + d_{25}\ddot{\theta}_5 + d_{26}\ddot{\theta}_6 + c_{112}\dot{\theta}_1^2 + c_{222}\dot{\theta}_2^2 + c_{332}\dot{\theta}_3^2 + c_{442}\dot{\theta}_4^2 + c_{552}\dot{\theta}_5^2 + c_{662}\dot{\theta}_6^2 + g_2 \\
\tau_3 &= d_{31}\ddot{\theta}_1 + d_{32}\ddot{\theta}_2 + d_{33}\ddot{\theta}_3 + d_{34}\ddot{\theta}_4 + d_{35}\ddot{\theta}_5 + d_{36}\ddot{\theta}_6 + c_{113}\dot{\theta}_1^2 + c_{223}\dot{\theta}_2^2 + c_{333}\dot{\theta}_3^2 + c_{443}\dot{\theta}_4^2 + c_{553}\dot{\theta}_5^2 + c_{663}\dot{\theta}_6^2 + g_3 \\
\tau_4 &= d_{41}\ddot{\theta}_1 + d_{42}\ddot{\theta}_2 + d_{43}\ddot{\theta}_3 + d_{44}\ddot{\theta}_4 + d_{45}\ddot{\theta}_5 + d_{46}\ddot{\theta}_6 + c_{114}\dot{\theta}_1^2 + c_{224}\dot{\theta}_2^2 + c_{334}\dot{\theta}_3^2 + c_{444}\dot{\theta}_4^2 + c_{554}\dot{\theta}_5^2 + c_{664}\dot{\theta}_6^2 + g_4 \\
\tau_5 &= d_{51}\ddot{\theta}_1 + d_{52}\ddot{\theta}_2 + d_{53}\ddot{\theta}_3 + d_{54}\ddot{\theta}_4 + d_{55}\ddot{\theta}_5 + d_{56}\ddot{\theta}_6 + c_{115}\dot{\theta}_1^2 + c_{225}\dot{\theta}_2^2 + c_{335}\dot{\theta}_3^2 + c_{445}\dot{\theta}_4^2 + c_{555}\dot{\theta}_5^2 + c_{665}\dot{\theta}_6^2 + g_5 \\
\tau_6 &= d_{61}\ddot{\theta}_1 + d_{62}\ddot{\theta}_2 + d_{63}\ddot{\theta}_3 + d_{64}\ddot{\theta}_4 + d_{65}\ddot{\theta}_5 + d_{66}\ddot{\theta}_6 + c_{116}\dot{\theta}_1^2 + c_{226}\dot{\theta}_2^2 + c_{336}\dot{\theta}_3^2 + c_{446}\dot{\theta}_4^2 + c_{556}\dot{\theta}_5^2 + c_{666}\dot{\theta}_6^2 + g_6
\end{aligned} \tag{3.23}$$

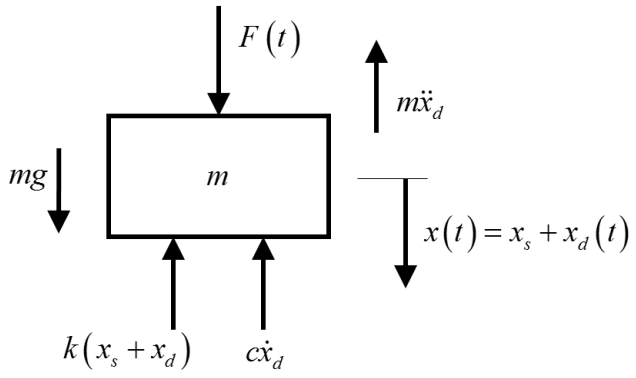
Eşitlik (3.15)'teki potansiyel enerji ifadesini açık bir biçimde yazarsak eşitlik (3.24)'teki ifadeyi elde edilir.

$$P = m_3 g\left(h_0 - l_{3C} cos\theta_2 cos\theta_3\right) + m_4 g\left\{h_0 - cos\theta_2\left(l_3 cos\theta_3 + l_{4C} cos\theta_{34}\right)\right\}$$
$$+m_6 g\left\{h_0 - cos\theta_2\left(l_3 cos\theta_3 + l_4 cos\theta_{34}\right) - l_{6C}\left(cos\theta_2 cos\theta_{345} cos\theta_6 - sin\theta_2 sin\theta_6\right)\right\} \quad (3.24)$$

12 SD'li sisteminin dinamik denklemlerinin zemin bağlantısının kurulabilmesi için eklemlere geometrik kısıtlamalar getirilmesi gerekmektedir. Bu kısıtlamalar yürüme fazlarına göre holonomik ve holonomik olmayan durumlara göre oluşturulmalıdır. Lineer olmayan denklemler üzerinde getirilecek kısıtlamalar doğrultusunda kontrolün sağlanması için derecesi azaltılmış bir sistemin oluşturulması gerekmektedir. Derece azaltmadan simülasyon yapılabilmesi ADAMS gibi katı modellerin dinamik analizinin yapılmasını saplayan programlara model oluşturarak ve bu modeller üzerinde kısıtlamalar tanımlayarak da mümkün olabilmektedir. Sonradan ortaya çıkacak karmaşıklığın önlenmesi bakımından iki boyutlu bir yürüyüşün gerçeklenmesine ve bunun için de iki boyutlu bir modellemeye geçilmesine karar verilmiştir.

3.3 D'Alembert Prensibi

Bu yöntem genelleştirilmiş koordinatlar olarak bilinen konum koordinatları ve cismin statik dengede olduğu kabulü ile uygulanmaktadır. Newton'un 2. yasası gereği bir kuvvet dengesi ifadesinde yararlanılır. Bunun için Şekil 3.2'deki gibi bir serbest cisim diyagramı oluşturulur. Klasik Newton prensibi ile yapılan çıkarımdan farklı olarak serbest cisim diyagramına atalet kuvvetleri de eklenir ve cisim statik dengede kabul edilerek denklemler yazılır [47]. Yönteme dinamik denge yöntemi de denilmektedir.



Şekil 3.2 D'Alembert prensibine göre serbest cisim diyagramı

Şekil 3.2'deki serbest cisim diyagramında x_d dinamik yer değiştirmelerdir. $m\ddot{x}_d$ ise atalet kuvvetini belirtmektedir. Statik denge durumu (3.25)'deki gibi yazılabilmektedir.

$$F(t)+mg-k\frac{mg}{k}-kx_d-c\dot{x}_d-m\ddot{x}_d=0 \tag{3.25}$$

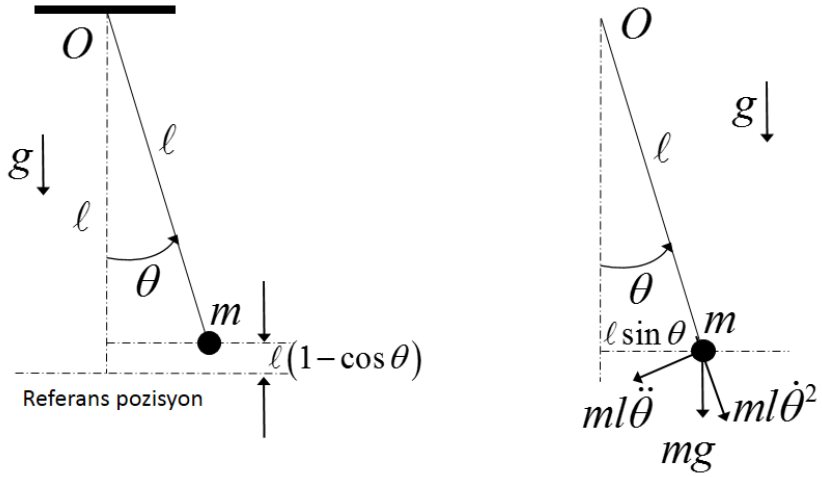
$x=x_d$ şeklinde alınırsa da ifade (3.26) olarak elde edilecektir.

$$F(t)=m\ddot{x}+c\dot{x}+kx \tag{3.26}$$

Böyle bir tanımlama holonomik sistemlerde yapılabilmektedir. Bir sistemin holonomik olarak tanımlanabilmesi için de sisteme ait tüm durumların bir fonksiyon olarak ifade edip (3.27)'de gösterildiği gibi sıfıra eşitlenebilmesi gerekmektedir.

$$f(q_1,q_2,q_3\ldots,q_N,t)=0 \tag{3.27}$$

Bacak modelindeki bağlantılara benzeyen ve dönüş hareketi yapan basit bir ters sarkaç modelinin hareket denklemleri Şekil 3.3'teki gösterimlerden çıkarılabilmektedir. Bunun için O noktasındaki toplam moment (3.28)'deki gibi sıfıra eşitlenir ve saat ibresinin tersi yön pozitif alınarak Eşitlik (3.29) elde edilmektedir.



Şekil 3.3 Basit ters sarkaç modeli

$$\sum M_0=0 \tag{3.28}$$

$$-ml\ddot{\theta}l - mgl\sin\theta = 0 \rightarrow ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta \rightarrow l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0, \sin\theta = \theta \rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

(3.29)

Basit sarkaç harmonik bir hareket yapmaktadır. Dolayısı ile $\theta(t) = \theta_0 \sin(wt)$ kabulü ile $\ddot{\theta}(t) = -w^2\theta_0 \sin(wt)$ ifadeleri denklemde yerine yazılır ise basit sarkacın yapacağı harmonic hareketin açısal frekansı (3.30) olarak elde edilebilmektedir.

$$w = \sqrt{\frac{g}{l}}\ rad/s \tag{3.30}$$

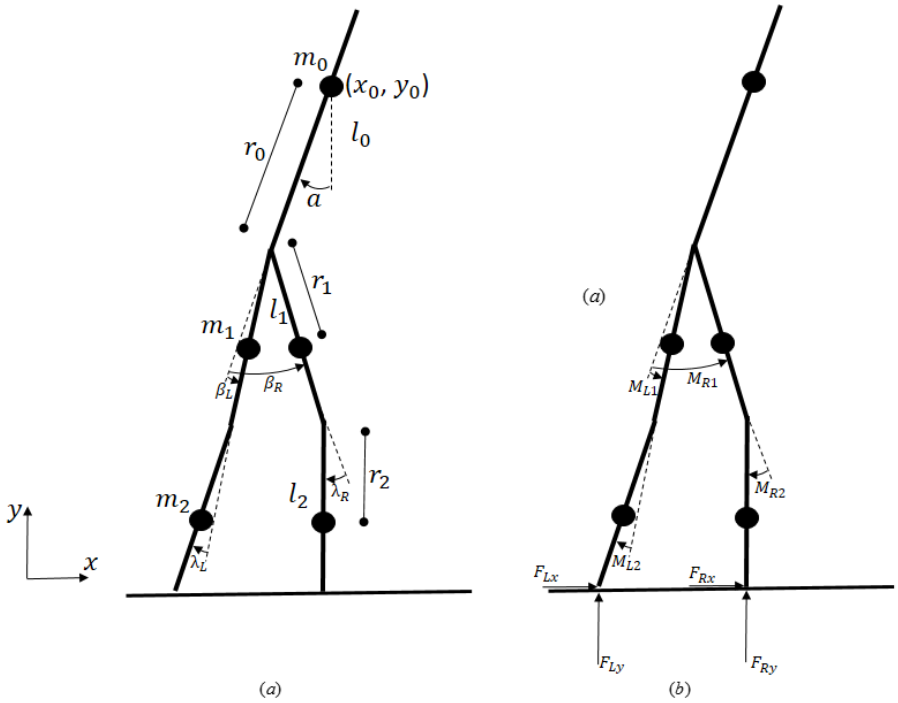
Burada görüldüğü üzere basit sarkaç için salınım hareketi sarkaç boyundan etkilenmektedir.

3.4 Genelleştirilmiş D'Alambert Prensibi ile 7 SD'li Sistemin Dinamik Denklemlerinin Oluşturulması

İki boyutlu olan bu sistemin denklemleri D'Alembert prensibi ile çıkarılmıştır. Böylece virtüel iş formülü yardımı ile holonomik sistem üzerindeki kuvvetler hesaplanabilmiştir. Her bir q_r genelleştirilmiş koordinatlarının δ_r kadarlık değişiminin arzulanan kuvvetler ile çarpımı virtüel iş prensibini Eşitlik 3.31'deki gibi vermektedir. Bu bölümdeki denklem çıkarımları [47]'e göre yapılmıştır.

$$\partial W_{q_r} = F_{q_r}\partial q_r \tag{3.31}$$

Sistemin parametreleri, üzerine etkiyen kuvvet ve momentler Şekil 3.4'de görülmektedir. Bağlantıların ağırlık merkezleri, bağlı oldukları eklemlere olan uzaklıklar cinsinden yazılmış olup r_1, r_2, r_3 şeklinde gösterilmiştir.



Şekil 3.4 İki ayaklı robotun koordinatları ve sabitleri (a) ve dış kuvvetler (b)

3.4.1 D'Alembert Prensibinin Uygulanması

Sistemin genelleştirilmiş koordinatlar cinsinden durumlarını gösteren vektör Eşitlik (3.32)'deki gibidir. x_0 ve y_0 gövdenin ağırlık merkezinin konumu iken diğer durumlar ise eklem açılarını ifade etmektedir. Bağlantı uzunlukları l_0, l_1, l_2, kütleleri ise m_0, m_1, m_2 şeklinde gösterilmiştir. Sistemin serbestlik dereceleri Çizelge 3.1'de, kütle ve uzunluk değerleri de Çizelge 3.2'dedir [47].

$$q = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & \alpha & \beta_L & \beta_R & \lambda_L & \lambda_R \end{bmatrix}^T \tag{3.32}$$

Sistem ayrıca yukarıda gösterilen durumların türevlerini de içermektedir. Her bir koordinata denk gelen kuvvetler de Eşitlik (3.33)'te gösterilmiştir.

$$F_q = \begin{bmatrix} F_{x_0} & F_{y_0} & F_\alpha & F_{\beta_L} & F_{\beta_R} & F_{\gamma_L} & F_{\gamma_R} \end{bmatrix}^T \tag{3.33}$$

Çizelge 3.1 7 SD'li bacağın serbestlik dereceleri

Gövde		3 SD
Tek Bacak	Kalça	1 SD x 2
	Diz	1 SD x 2
Toplam		7 SD

Çizelge 3.2 7 SD'li bacağın kütle ve uzunlukları

Kütleler (kg)	Gövde m_0	5
	Üst bacak m_1	2
	Alt bacak m_2	1
Uzunluklar (m)	Gövde ℓ_0	0.8
	Üst bacak ℓ_1	0.5
	Alt bacak ℓ_2	0.5

Uyluk bölgesinin ağırlık merkezinin bulunduğu konuma ait koordinatlar (x_{L1}, y_{L1}) ve (x_{R1}, y_{R1}) şeklinde gösterilmiştir. Kaval kemiğini temsil eden bağlantının ağırlık merkezi (x_{L2}, y_{L2}) ve (x_{R2}, y_{R2}) şeklinde gösterilmiştir. Ayakucunun koordinatları da (x_{LG}, y_{LG}) ve (x_{RG}, y_{RG}) şeklindedir. Bu noktaların genelleştirilmiş koordinatlarla ifadeleri sol bacak için Şekil 3.2 kullanılarak aşağıdaki gibi çıkarılabilmektedir.

$$\begin{cases} x_{L1} = x_0 - r_0 \sin\alpha - r_1 \sin(\alpha - \beta_L) \\ y_{L1} = y_0 - r_0 \cos\alpha - r_1 \cos(\alpha - \beta_L) \\ x_{L2} = x_0 - r_0 \sin\alpha - l_1 \sin(\alpha - \beta_L) - r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \lambda_L) \\ y_{L2} = y_0 - r_0 \cos\alpha - l_1 \cos(\alpha - \beta_L) - r_2 \cos(\alpha - \beta_L + \lambda_L) \\ x_{LG} = x_0 - r_0 \sin\alpha - l_1 \sin(\alpha - \beta_L) - l_2 \sin(\alpha - \beta_L + \lambda_L) \\ y_{LG} = y_0 - r_0 \cos\alpha - l_1 \cos(\alpha - \beta_L) - l_2 \cos(\alpha - \beta_L + \lambda_L) \end{cases} \quad (3.34)$$

Yukarıdaki denklemlerde β_L ve γ_L sol, β_R ve γ_R sağ bacak için tercih edilen açı durumlarını ifade etmektedir. Benzer denklemler sağ bacak için de geçerlidir. Kütlelerin doğrusal hızları (3.34)'deki denklemlerin zamana göre türevi alınarak sistemin kinetik enerji denklemi (3.35), yedi elemanlı vektör şeklinde çıkartılmıştır.

$$T = \frac{1}{2}\left(m_0\left(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2\right) + m_1\left(\dot{x}_{L1}^2 + \dot{y}_{L1}^2 + \dot{x}_{R1}^2 + \dot{y}_{R1}^2\right) + m_2\left(\dot{x}_{L2}^2 + \dot{y}_{L2}^2 + \dot{x}_{R2}^2 + \dot{y}_{R2}^2\right)\right) \tag{3.35}$$

Genelleştirilmiş koordinatlardaki sonsuz küçüklükte bir değişim sonucu yapılan sanal işi o koordinat sistemine etki eden her bir kuvvet ve momentin sonsuz küçüklükte bir hareketi sağlayan sanal işlerin toplamı olarak ifade edecek olursak,

$$\delta W_{qr} = F_{qr}\delta q_r = \sum_i F_i \delta p_i + \sum_j M_j \delta\theta_j \tag{3.36}$$

olarak gösterebiliriz. Örneğin genelleştirilmiş koordinat elemanları $q_r = \alpha$, $q_r = \beta_L$ ve $q_r = \lambda_L$ için yazılacak olursa,

$$\begin{aligned}
F_\alpha \delta\alpha &= -g\left(m_1\delta p_{L1} + m_1\delta p_{R1} + m_2\delta p_{L2} + m_2\delta p_{R2}\right) + F_{RG}\delta p_{RG} + F_{LG}\delta p_{LG} \\
F_{\beta_L}\delta\beta_L &= -g\left(m_1\delta p_{L1} + m_2\delta p_{L2}\right) + F_{Ly}\delta p_{LG} + F_{Lx}\delta p_{LG} + M_{L1} \\
F_{\lambda_L}\delta\lambda_L &= -gm_2\delta p_{L2} + F_{Ly}\delta p_{LG} + F_{Lx}\delta p_{LG} + M_{L2}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

şeklinde elde edilir. Burada ilk parantez içerisindeki terimler m_i ataletsel kuvvetlerin iki boyutlu uzayda sonsuz küçük deplasmanları δp_i kadar oynatan sanal işleri temsil ederken diğer terimler de yerden gelen kuvvetlerden ötürü oluşan sanal kuvvetlerdir.

Bu işlemleri tüm genelleştirilmiş koordinat elemanları için tekrar edip, deplasmanları x ve y eksenlerindeki bileşenlerine ayırıp, $\frac{\delta x_i}{\delta q_r} = \frac{\partial x_i}{\partial q_r}$ ve $\frac{\delta y_i}{\delta q_r} = \frac{\partial y_i}{\partial q_r}$ biçiminde yazarsak sanal kuvvetler,

$$\begin{cases}
F_{x_0} = F_{Lx} + F_{Rx} \\
F_{y_0} = -\left(m_0 + 2m_1 + 2m_2\right)g + F_{Ly} + F_{Ry} \\
F_\alpha = -\left(\frac{\partial y_{L1}}{\partial\alpha}m_1 + \frac{\partial y_{L2}}{\partial\alpha}m_2 + \frac{\partial y_{R1}}{\partial\alpha}m_1 + \frac{\partial y_{R2}}{\partial\alpha}m_2\right)g + \frac{\partial y_{LG}}{\partial\alpha}F_{Ly} + \frac{\partial y_{RG}}{\partial\alpha}F_{Ry} + \frac{\partial x_{LG}}{\partial\alpha}F_{Lx} + \frac{\partial x_{RG}}{\partial\alpha}F_{Rx} \\
F_{\beta_L} = -\left(\frac{\partial y_{L1}}{\partial\beta_L}m_1 + \frac{\partial y_{L2}}{\partial\beta_L}m_2\right)g + \frac{\partial y_{LG}}{\partial\beta_L}F_{Ly} + \frac{\partial x_{LG}}{\partial\beta_L}F_{Lx} + M_{L1} \\
F_{\lambda_L} = -\frac{\partial y_{L2}}{\partial\lambda_L}m_2 g + \frac{\partial y_{LG}}{\partial\lambda_L}F_{Ly} + \frac{\partial x_{LG}}{\partial\lambda_L}F_{Lx} + M_{L2}
\end{cases} \tag{3.38}$$

olarak gösterilebilir.

Sağ bacak için kuvvet denklemleri de ifadelerdeki durumların yer değiştirmeleri ile elde edilebilmektedir.

Sistemde oluşan kuvvetler Euler-Lagrange denklemi formatında (3.39)'deki gibi ikinci dereceden adi diferansiyel denklem şeklinde yazılmıştır.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_r}=F_{q_r} \tag{3.39}$$

(3.35)'teki türevler alınıp (3.38)'deki kuvvetler de eklenerek

$$A(q)\ddot{q}=b(q,\dot{q},F)+M \tag{3.40}$$

elde edilmiştir.

Sistemi dışarıdan besleyen momentler aşağıdaki gibi vektörel olarak gösterilmiştir.

$$M=\left[M_{L1},M_{R1},M_{L2},M_{R2}\right]^T \tag{3.41}$$

$$F=\left[F_{Lx},F_{Ly},F_{Rx},F_{Ry}\right]^T \tag{3.42}$$

Eşitlik 3.42, Şekil 3.2(b)'de gösterilen destek kuvvetlerini ifade etmektedir. Robot yere değdiğinde yerle temas halindeki bacağa belirtilen kuvvetler etki ederken, yerden kalkan bacağa gelen kuvvetler sıfırdır. Eşitlik (3.34) ile başlayıp (3.38) ile sonlanan aralıktaki Euler-Lagrange denklemleri MATLAB yardımı ile çıkarılmıştır. Daha sonra $A(q)$ atalet matrisi, $b(q,\dot{q},F)$ ve M vektörleri şeklinde bir ayrım ile MATLAB fonksiyonu olarak yazılıp simule edilebilir hale getirilmişlerdir.

$A(q)\in\mathbb{R}^{7\times7}$ olmak üzere sistemin atalet matrisini, $b(q,\dot{q},F)\in\mathbb{R}^{7\times1}$ ve M eşitliğin sağ tarafında durumları, durumların hızlarını, kuvvetler ve momentleri içeren vektörlerdir. A, b vektörlerinin ve M vektörünün açık halleri Ek A'da verilmiştir.

Bu bölümde anlatılan robotun her bir bacağı 2-SD (Serbestlik Dereceli)'dir. Detayları Çizelge 3.1 de gösterilmiştir. İki bacaklı yürüyüş, robotun temel yapısını anlamak ve yürüyüş fonksiyonlarını teorik olarak incelemeyi kolaylaştırmak için yürüme iki boyutlu olarak yapılmıştır.

Yürüyüş hareketi iki farklı bölüm olarak incelenebilmektedir. Bunlardan ilki; iki ayağında aynı anda yerle temas olduğu tek ayak fazı (TAF) durumuyken, diğeri ise yürüyüş esnasında tek ayağın üzerinde olunan iki ayak fazı (İAF) durumudur. Koşma hareketlerinin incelenmesinde her iki ayağın da yerden kesildiği durum da farklı bir bölüm olarak kaynaklarda karşımıza çıkmaktadır. Bu bölümlerin bir döngü şeklinde tekrarlanmasıyla yürüme ve koşma gibi hareketler modellenebilmektedir.

3.5 Pasif ve Dinamik Yürüyüş

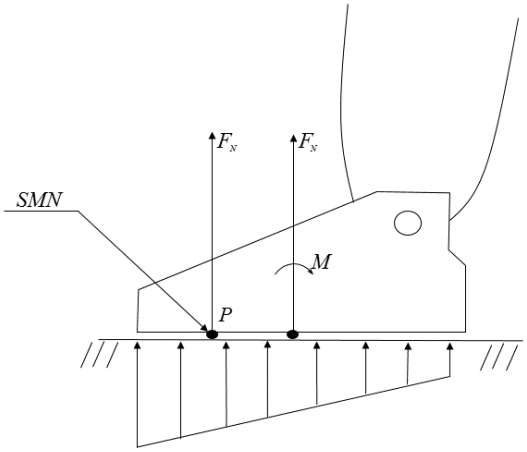
Minimum enerji ile yokuş aşağı yürüme gibi durumlarda sistemin kendi ağırlığı yardımıyla serbest bacağın salınımıyla dengeli bir doğal yürüyüş hali pasif yürüyüş olarak tanımlanabilmektedir [47]. Sisteme düşük güç kontrolü eklenmesi ile dinamik özelliklerden faydalanarak düz ya da hafif eğimli zeminlerde istikrarlı bir yürüyüş sağlanması enerji tüketimini minimuma yakın tutacaktır.

3.6 Optimum Yürüyüş Yörüngeleri

Yürüyüş yörüngelerinin önceden hesaplanarak kontrol uygulaması yapmak yaygın olarak tercih edilen bir yöntemdir [46], [47]. Sorun, pürüzlü ve yörüngeden çok daha farklı koşullarda yürüyüşün zorluğudur. Bunun üstesinden gelebilmek için Sıfır Moment Noktası (SMN) hesaplanarak sistemin düşmeden sıfır moment sınırları içinde kalarak yürütülmesi gerçekleştirilebilmektedir. Örneğin HONDA'nın ASIMO adlı robotunda da bu şekilde bir sürekli SMN hesaplanması durumu bulunmaktadır.

3.6.1 Sıfır Moment Noktası (SMN)

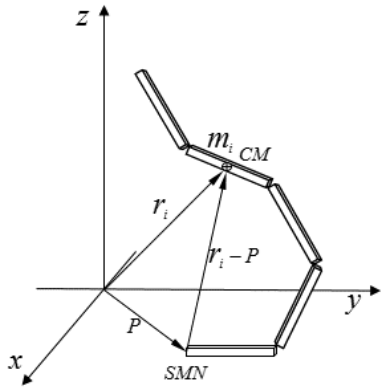
SMN, atalet kuvvetlerinin ve yer çekimi kuvvetinin oluşturduğu net momentin sıfır olduğu noktadır. Eğer bu nokra Şekil 3.5'teki gibi ayağın yerle temas ettiği alan içerisinde ise sistem tek ayak üzerinde durabilmektedir.



Şekil 3.5 SMN ayak tabanı gösterimi

Sıfır moment noktası D'Alambert prensibi ile hesaplanabilmektedir [46]. Şekil 3.6'da SMN'nin genel gösterimi vardır. Bu gösterime göre xy düzleminde SMN durum vektörü Eşitlik (3.43)'teki hesaplanabilmektedir.

$$x_{ZMP} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\ddot{z}_i + g\right) x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{x}_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\ddot{z}_i + g\right)} \qquad y_{ZMP} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\ddot{z}_i + g\right) y_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{y}_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\ddot{z}_i + g\right)} \tag{3.43}$$



Şekil 3.6 SMN genel gösterimi

3.6.2 Arzulanan Yürüyüşün Belirlenmesi

Sistemin iki boyutlu br düzlem üzerinde insana benzer biçimde yürümesi istenmektedir. Bu nedenden ötürü gerçek bir insan yürüyüşünün baz alındığı, yürüme esnasındaki açı değişim grafiklerinde faydalanılarak fourier eğri oturtma yöntemi ile yürüme hareketleri türevlenebilir fonksiyonlarla belirtilmiştir.

Fourier yönteminin genel gösterimi Eşitlik (3.44)'deki gibi trigonometrik ifadelerin toplamı şeklindedir.

$$f(x) = a_0 + \sum_{i=0}^{n} a_i \cos(iwx) + b_i \sin(iwx) \tag{3.44}$$

Burada a ve b sabitler, w sinyal frekansı, n ise $1 \le n \le 8$ aralığındadır ve bu ifadelerin sayısıdır. Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunun Fourier Serisi ile yaklaşık olarak ifade edilebilmesi için; istenilen aralıkta fonksiyonun her noktada tek değerinin olması, sonlu olması, sürekli olması ve sonlu sayıda maksimum veya minimum değerleri alması gerekmektedir.

Örneğin kalça hareketinin iki periyodu için açı değişimi değerlerini içeren 101 elemanlı bir vektör oluşturulmuştur. Bu vektörün elemanları gerçek eğri üzerinden değerler alınarak belirlenmiştir. Eklemlerin eğri grafikleri 4. bölümde verilmiştir. Eğri oturtmadaki ifade sayısı 7 alınmıştır. Böylece %99.9996'lık bir benzerlikle eğri oturtma yapılmıştır. Aynı işlem diğer iki eklem içinde gerçekleştirilmiştir. Bu eğriler sol bacağa aittir. Sağ bacak için ayakların noktasal olmasından dolayı bu eğrilere 180 derecelik bir faz farkı uygulanmıştır.

3.7 7 SD'li İki Ayaklı Robot Modelinin Yapısı

İki ayaklı robot modeli matematiksel denklemlerin çıkarımının basit olması için düşük derecede seçilmiştir. Her ne kadar serbestlik derecesi düşük de olsa hareket uygulanabilirliği ve farklı araştırmalar için kullanılabilirliği yüksektir.

3.7.1 7 SD'li İki Ayaklı Robot Dinamiği

Bu bölümde, sürtünmesiz eklemlerle birbirine bağlanmış, iki bacak uzvu ve bir gövdesi olan iki boyutlu robotun yapısı açıklanacaktır. İki özdeş bacağın 1 diz ve bir kalça eklemi vardır. 1 dönel bağlantılı gövde formu kalçadan her iki bacağa da bağlıdır. Modelleme ve kontrol için toplamda 5 eklem mevcuttur.

Sistem, içerdiği beş bağlantı ve ile xy düzlemindeki ilerlemeden kaynaklanan 2 SD'lik hareket kabiliyeti ile toplam 7 serbestlik derecesi sahiptir. İlgili durum ve koordinatlar Şekil 3.4(a)'da gösterilmiştir.

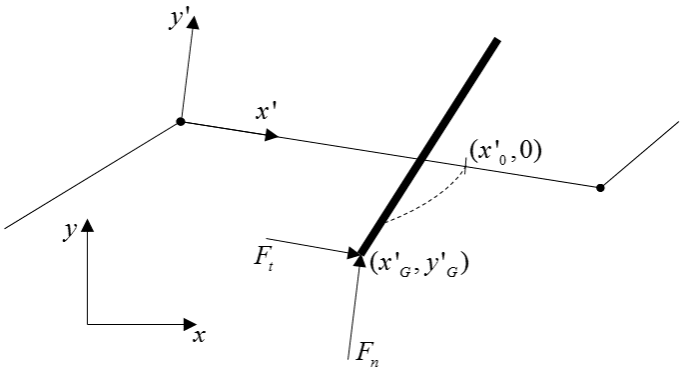
3.7.2 Yer Tepki Kuvvetleri

Robotun yürüyeceği zemin x, y eksenlerindeki noktaların düz bir çizgi şeklinde birleştirilmesiyle modellenmiştir. Şekil 3.7'de tek bacağın yere değme anının çizimi görülmektedir.

x'_0, zemine teğet, y'_0 ise diktir. Ayak yere değdiğinde $(x'_0, 0)$ noktasında normal ve teğet kuvvetler uygulanmaktadır. Normal kuvvet PD kontrolcünün çıkışı olacak şekilde hesaplanmaktadır. Bu duruma benzer şekilde gösterilebilen yay-damper sistemi Eşitlik (3.45)'teki gibidir.

$$F_n = -k_y y'_G - b_y \dot{y}'_G , \tag{3.45}$$

Burada y'_G, y' koordinatlarında bacağın yerle temas ettiği noktasına göre anlık olarak negatif negatif yöndedir. $k_x = k_y = 10000$, zeminin yay katsayısı ve $b_x = b_y = 500$ ise sönüm oranıdır [47]. Normal kuvvetler, bacağın yerden kaldırılabilmesi için ayakların yere uyguladıkları pozitif değerlerle sınırlandırılmıştır.



Şekil 3.7 Yer modeli ve bir ayağın yer ile temasının şeması

Zemine teğet olan F_t kuvveti sürtünmeyi oluşturmaktadır. Bu kuvvet de normal kuvvete uygulanan PD kontrolüne benzer şekilde hesaplanmaktadır.

$$F_t = -k_x(x'_G - x'_0) - b_x\dot{x}'_G, \quad (3.46)$$

Denklemdeki kx ve bx yine sırasıyla yay katsayısı ve sönümü ifade etmektedir. Maksimum statik sürtünme kuvveti,

$$F_{t,\max} = \mu_s F_n, \quad (3.47)$$

μ_s, statik sürtünme katsayısıdır. Ayağı kaymaya başlatacak teğet kuvvet Eşitlik (3.48)'de belirtilmiştir.

$$F_t = \mu_k F_n, \quad (3.48)$$

μ_k, kinetik sürtünme katsayısı olup, ayakucunun kayması esnasında sürekli değişerek yeni değerler alır.

Normal ve teğet kuvvetler hesaplandıktan sonra dinamik modelin giriş kuvvetlerinin elde edilmesi için bu kuvvetlerin xy düzlemine yansıtılmaları gerekmektedir.

BÖLÜM 4

KONTROL YÖNTEMLERİ

Robot kontrol yöntemlerinden PD kontrol ve hesaplamalı tork kontrolü yöntemleri bu çalışmada uygulanmak üzere seçilmiştir.

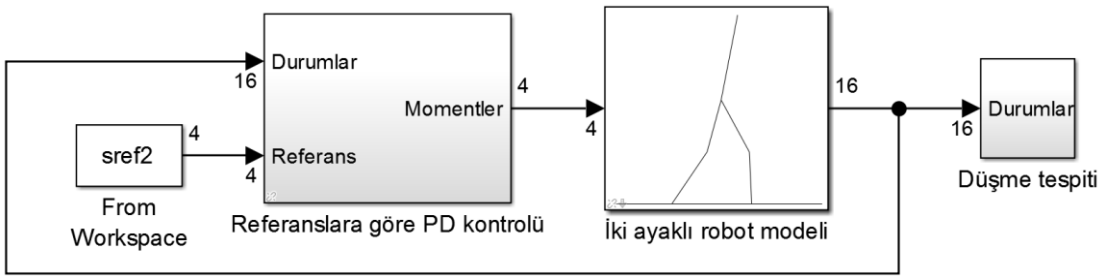
4.1 PD Kontrol

7-SD'li modelde dört ayrı PD kontrol modeli kullanılmıştır. Bunlardan ikisi diz, biri uyluk açıları arasındaki fark $(\Delta\beta = \beta_R - \beta_L)$ diğeri ise üst gövdenin referans sinyallerine göre kontrolü içindir.

Diz eklemindeki kontrolde M_{L2} ve M_{R2} momentler sağlanmıştır. $\Delta\beta$ sinyal kontrolü için sağ uyluğa pozitif M_{R1}, sol uyluğa ise negatif M_{L1} momentleri uygulanmıştır. Kullanılan ayrık PD kontrol yapısı Eşitlik (4.1)'deki gibidir.

$$u(kh) = Pe(kh) + \frac{D}{h}\Delta e(kh), \qquad (4.1)$$

u kontrol sinyali, k örnekleme miktarı, h örnekleme zaman aralığı, $e(kh)$ referans değere göre oluşan hata, $\Delta e(kh)$ ise bir önceki sinyale göre hata değişimidir. P ve D ise kontrol katsayılarıdır. Simulink'te oluşturulan kontrol modeli Şekil 4.1'de görülmektedir.



Şekil 4.1 İki ayaklı robotun Simulink PD kontrol modeli

Kontrol, tek ayak ve iki ayak olmak üzere iki fazdan oluşmaktadır. Ayakların yerle temas noktalarında kontrolcüler değişerek yürüme sağlanmıştır. Simülasyon detayları 5. bölümde verilecektir.

Çizelge 4.1 7 SD'li robotun PD kontrolcü değerleri

	P	D
İki ayaklı faz		
Uyluklar arası açı farkı $\Delta\beta$	60	1
Diz açıları λ_L , λ_R	40	0,5
Üst gövde açısı α	40	2
Tek ayaklı faz		
Uyluklar arası açı farkı $\Delta\beta$	70	6
Destek ayağı diz açısı	30	2
Havadaki ayağın diz açısı	10	0,1

İki ayağın aynı anda yere basması 1 ile, sol ayağın yere basması 2 ve sağ ayağın yere basması 3 ile gösterilmiştir. 2 ve 3 durumlarında aynı kontrol şartları uygulanmıştır. Bu iki farklı kontrol değerlerinin kullanıldığı değerler Çizelge 4.1'de verilmiştir.

4.2 Hesaplanmış Tork Metodu

Hesaplanmış tork metodu için Lagrange eşitliklerinin özel bir formu kullanılır [42]. Eşitlik (4.2)'de bu özel form görülmektedir.

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q}) + G(q) = \tau \tag{4.2}$$

$q, \dot{q}$, eklem durumları ve vektörel hızları, $\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_2 \end{bmatrix}^T$, genel kuvvet vektörü, M, kütle atalet matrisi, $C(q,\dot{q})$, Koriolis ve santrifüj etkileri, $G(q)$, yerçekimi vektörüdür.

Lineer olmayan ifadeler bir arada toplanırsa,

$$N(q,\dot{q}) = C(q,\dot{q}) + G(q) \tag{4.3}$$

Böylece dinamik denklem,

$$M(q)\ddot{q} + N(q,\dot{q}) = \tau \tag{4.4}$$

şekline dönüşür.

PD kontrol denkemi (4.5)'teki gibi yazılırsa,

$$u(t) = -K_D\dot{e} - K_P e \tag{4.5}$$

elde edilmiş olur. Hata sinyali $e(t) = q_d(t) - q(t)$ şeklinde arzulanan durum ve gerçek durumlar arasındaki farktır. K_P ve K_D ise sırasıyla oransal ve türevsel diyagonal pozitif kuvvet kazancı matrisleridir. Genel denklem, kontrol girişleri ile birlikte Eşitlik (4.6)'daki halini almaktadır. Bu eşitlik hesaplanmış tork kontrolü kuralıdır.

$$\tau = M(q)\left(\ddot{q}_d + K_D\dot{e} + K_P e\right) + N(q,\dot{q}) \tag{4.6}$$

PD kuvvet kazançları genellikle kritik sönüm oranı $\xi = 1$ olarak seçilir. Bu durumda $k_{D_i} = 2\sqrt{k_{P_i}}$ ve $k_{P_i} = k_{D_i}^2 / 4$ şeklinde ve her bir eklem için seçilir.

BÖLÜM 5

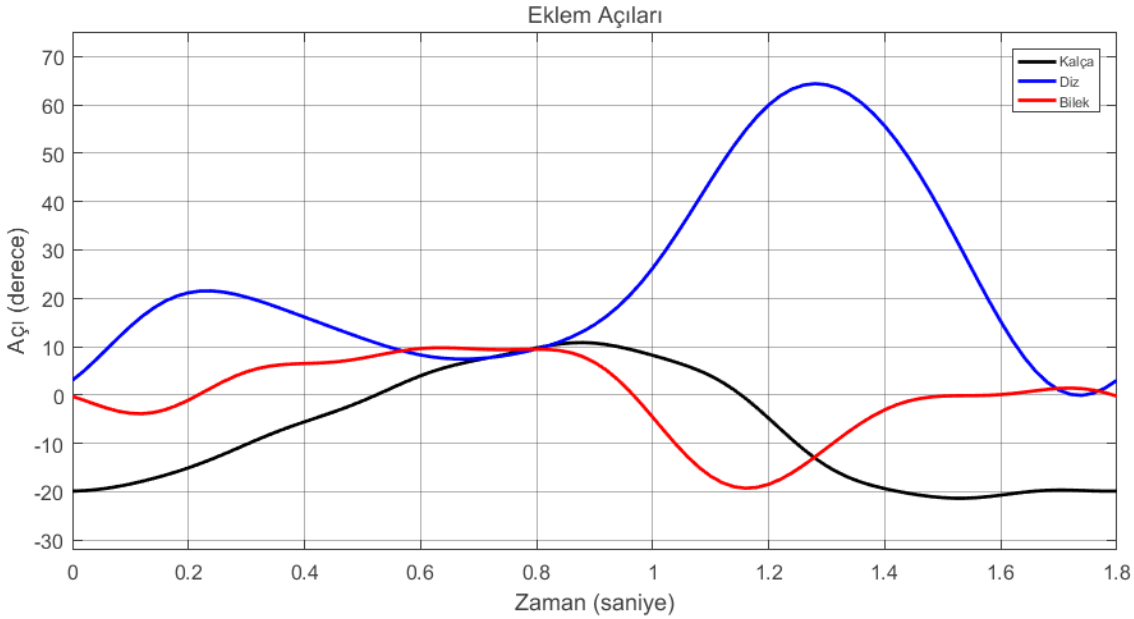
SİMÜLASYONLAR

Bu bölümde 12 SD'li sistemin yürürkenki açı değişimleri, model blokları ve elde edilen tork değerleri verilecektir. Ayrıca 7 SD'li sistemin yürümesi ve dengesine ait MATLAB ve Simulink ortamında yapılmış çalışmalar ve detayları paylaşılacaktır.

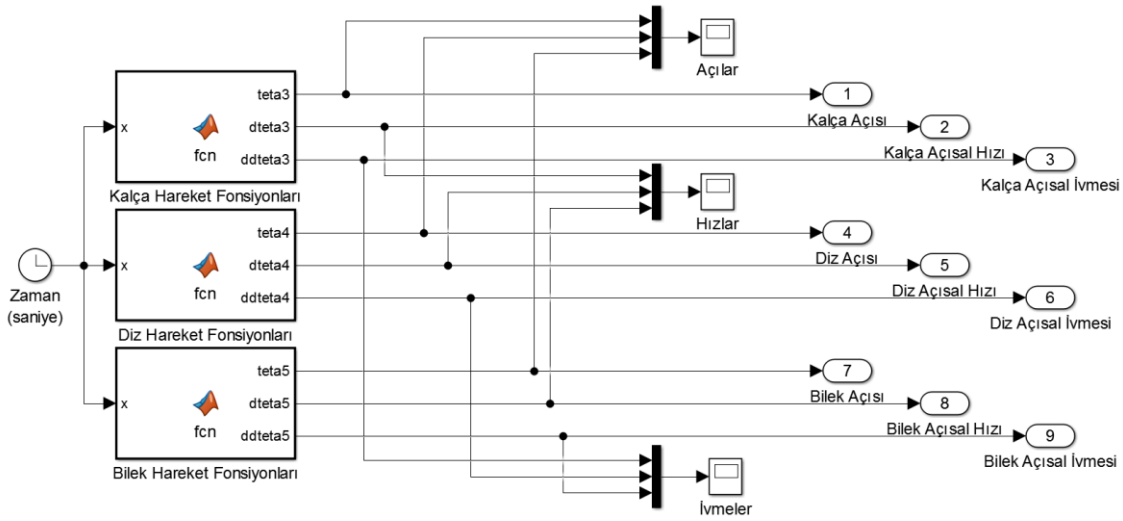
5.1 On İki Serbestlik Dereceli Sistemin İki Boyutlu Yürüyüşü

Sistemin yürüme periyodu, ortalama bir yürüyüş hızı gözlemlenmek istediğinden, 1.8 saniye olarak alınmıştır. Yürüyüş peryoduna, sistemi lineer ters sarkaç olarak kabul edip, (5.1)'deki formülde görülen sistemin doğal salınımı alınarak karar verilmiştir. ℓ, sarkacın boyu, g ise yerçekimi ivmesidir. Şekil 5.1'de kalça, diz ve bilek açılarının bir periyotluk süredeki değişimleri verilmiştir [37]. Bu eğriler bir tam periyod saniyelik dilim 100 eşit parçaya bölünüp, fourier eğri oturtma metodu ile sinüs ve kosinüslü değerlerin toplamı biçiminde ifade edilmiştir. Bu ifadeler türevlenebilir olduklarından, hız ve ivmenin ideal halleri de elde edilmiştir. Bu ifadeler MATLAB komu dizisi şeklinde Şekil 5.2'deki gibi bloklar içine yazılarak çıkışları eklemlere giriş olarak verilmiştir. SimMechanics modellenen sistemin eklemlerine eyleyici bloklarından Şekil 5.3'teki gibi yer değişimi, hız ve ivme değerleri girilerek yürüyüş hareketi simule edilmiştir. 12 SD'li sistemin genel modeli Şekil 5.4'teki gibidir.

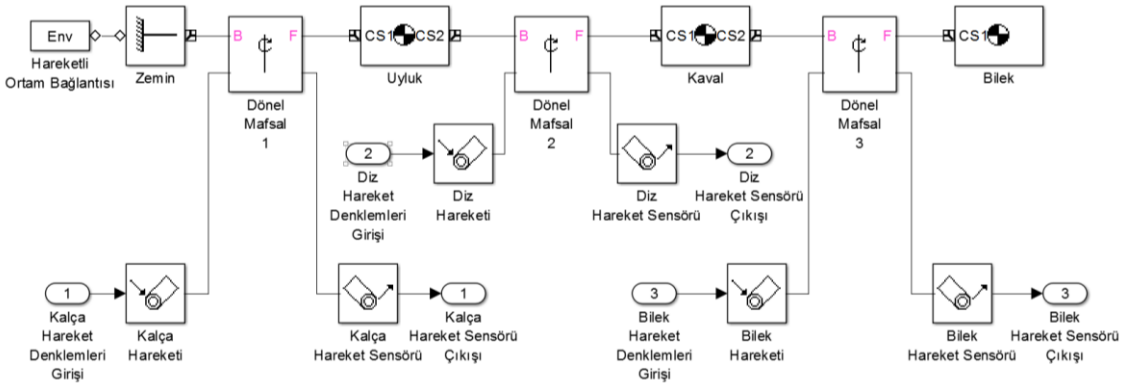
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \tag{5.1}$$



Şekil 5.1 Eklem açılarının bir periyotluk değişimi

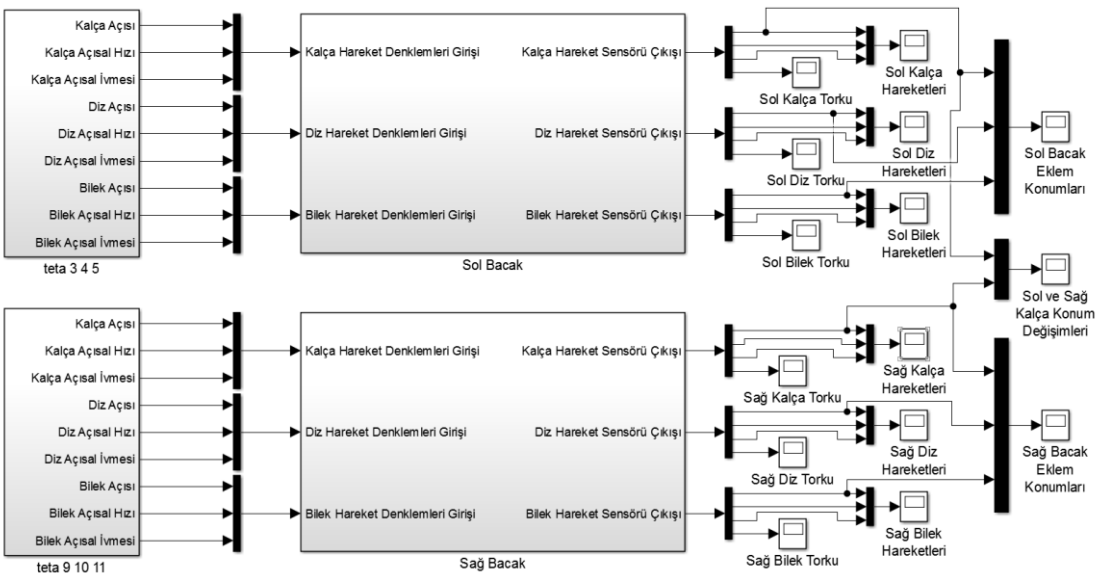


Şekil 5.2 Eklem hareketlerinin fonksiyon çıktısı modeli



Şekil 5.3 6 SD'li bacağın SimMechanics modeli

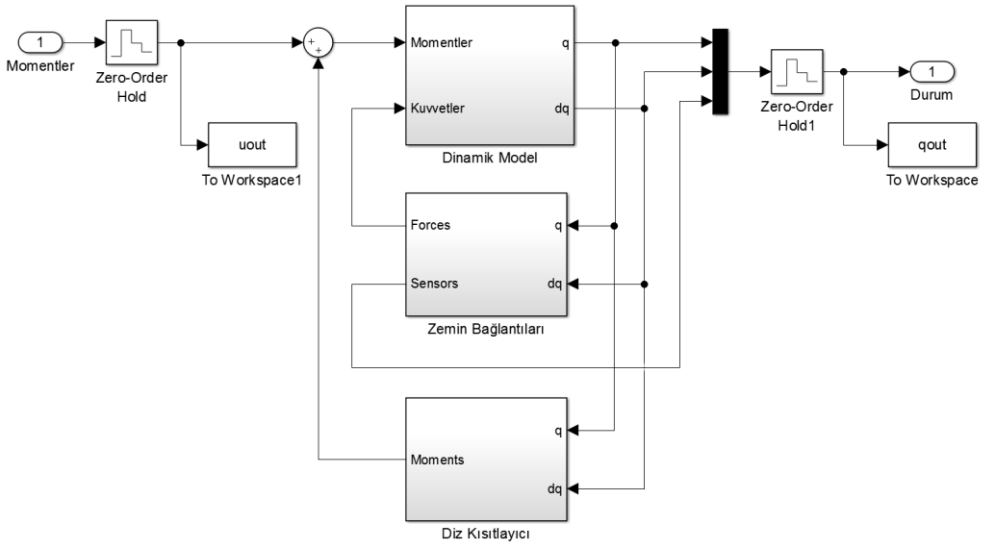
SimMechanics'in bir özelliği olarak eklem eyleyicilerine hareket; yer değişimi, hız ve ivme olarak girilebilmektedir. Yukarıdaki şekildeki girişlerde de bu üç farklı hareket karakteristiği sisteme giriş olarak verilmiştir. Çıkış sensörünün özelliklerinden biri de girişin gerçeklenebilmesi için gerekli tork değerlerini anlık olarak hesaplayabilmesidir. Son bölümde buradan elde edilen değerlerin irdelemesi yapılacaktır.



Şekil 5.4 12 SD'li sistemin Simulink modeli

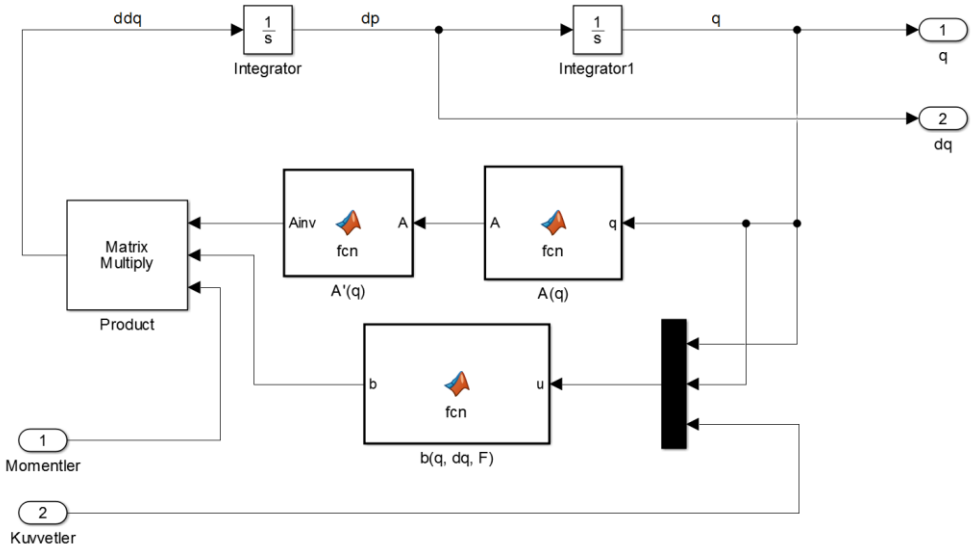
5.2 Yedi Serbestlik Dereceli Sistemin MATLAB Simulink Modelinin Açıklanması

İki ayaklı robot sisteminin 7 farklı değişkeni vardır. Bunlar gövdenin ağırlık merkezinin koordinat eksenlerindeki yer değişimleri ve eklem açılarının değişimleridir. Sisteme girişler moment olarak verilecektir. Modelin PD kontrolünde durumların ve hızlarının geri beslemesi yapılmıştır. Sistemin genel Simulink gösterimi aşağıdaki Şekil 5.5'teki gibidir.



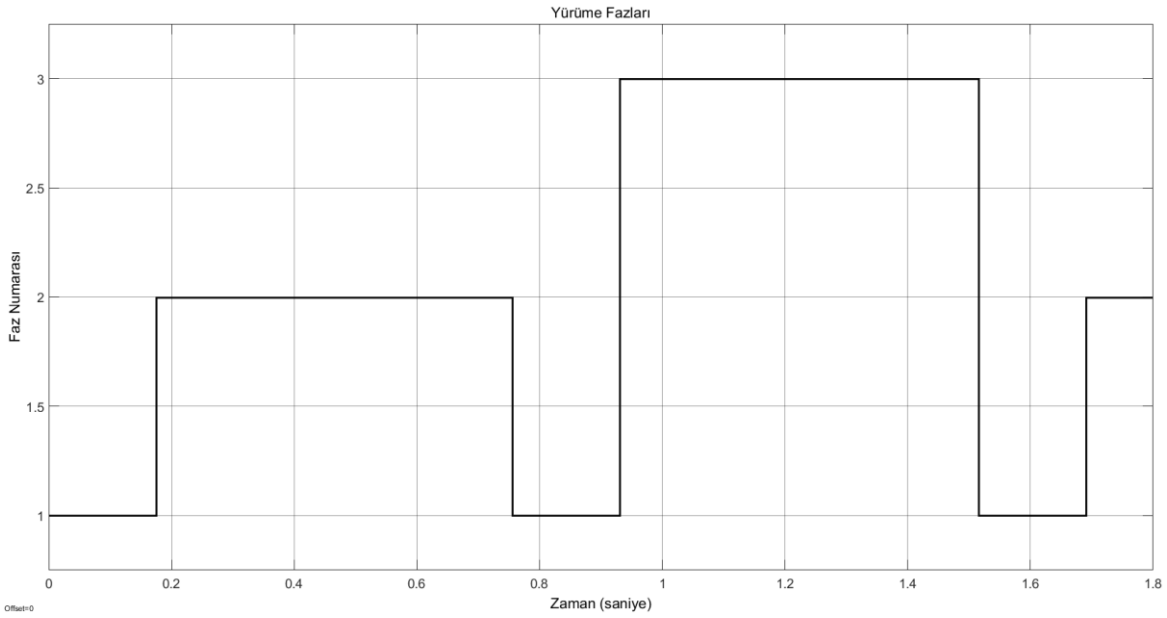
Şekil 5.5 Sistemin Simulink genel gösterimi

$A(q)$ matrisi ile $b(q,\dot{q},F)$ ve M vektörlerinin MATLAB formatına dönüştürüldükten sonraki Simulink ortamında gösterimi Şekil 5.6'daki gibidir.

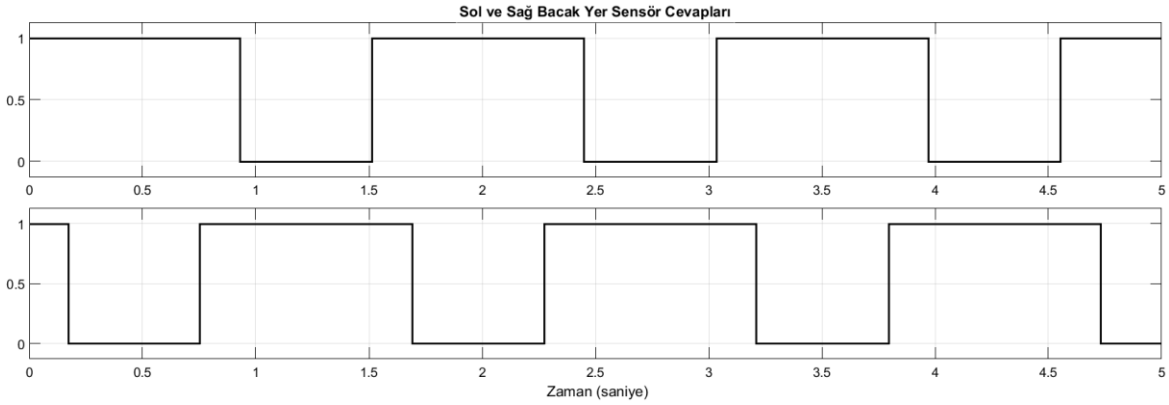


Şekil 5.6 Sistemin $A(q)$, $b(q,\dot{q},F)$ ve M ifadelerinin yer aldığı Simulink diyagramı

7 SD'li modelin kontrol modeli, sistem durumları ve referans değerlere göre Simulink'te düzenlenmiştir. Yürüme modelinde noktasal ayaklar olduğundan iki farklı yürüme fazı mevcuttur. Bunlar tek ayak fazı (TAF) ve iki ayak fazı (İAF)'dır. Kontrol modeli oluşturuşurken ayakların yerle temas durumlarına göre modlar oluşturulmuştur. Bunu oluştururken sol ve sağ ayak faklı modlar olarak alınmışlardır. Amaç hangi ayağın o anda yere bastığının anlaşılmasıdır. Kontrol katsayıları TAF için her iki ayakta da aynıdır. Faz değiştiğinde, iki farklı faz için de belirlenen PD katsayıları, oluşturulan MATLAB komut dizisinden çekilmektedir. Yürüme fazları Şekil 5.7'de, sol, sağ ayakların ve iki ayağın da birlikte zemine basma zamanları ise Şekil 5.8'de gösterilmiştir. Mod 1 her iki ayağında yere bastığını gösterirken mod 2 sol, mod 3 ise sağ ayağın yerdeki destek ayağı dumunda olduğunu belirtmektedir.

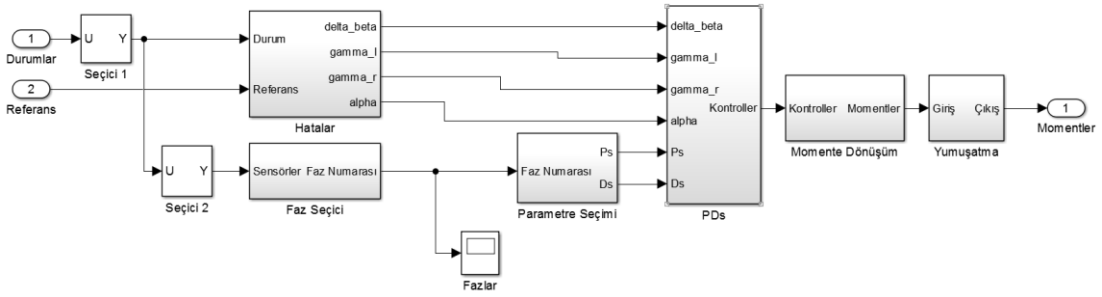


Şekil 5.7 Yürüme fazları



Şekil 5.8 Ayakların yere basma zamanları

Yukarıdaki hesaplamaların kullanıldığı ve PD kontrolünün uygulandığı Simulink modeli Şekil 5.9'da görülmektedir.



Şekil 5.9 7 SD'li sistem için Simulink PD kontrol bloğu

Yere basma durumu ayakuçlarından alınan konum bilgileri ve düz zeminin oluşturulduğu konumun karşılaştırılması ile anlaşılmaktadır. Yerden gelecek normal kuvvetler için zemine yay ve sönüm katsayısı atanmıştır. Bu noktada sistemin temas noktasına yansıyan ağırlığı, kuvvet olarak zemin tepkisine dönüştürülmüştür. Dizin açısal hareketi $(0-160\pi/180)$ arasında sınırlandırılmıştır. Kontrol ve hareket için başlangıç koşulları Çizelge 5.1'deki gibi uygulanmıştır [38].

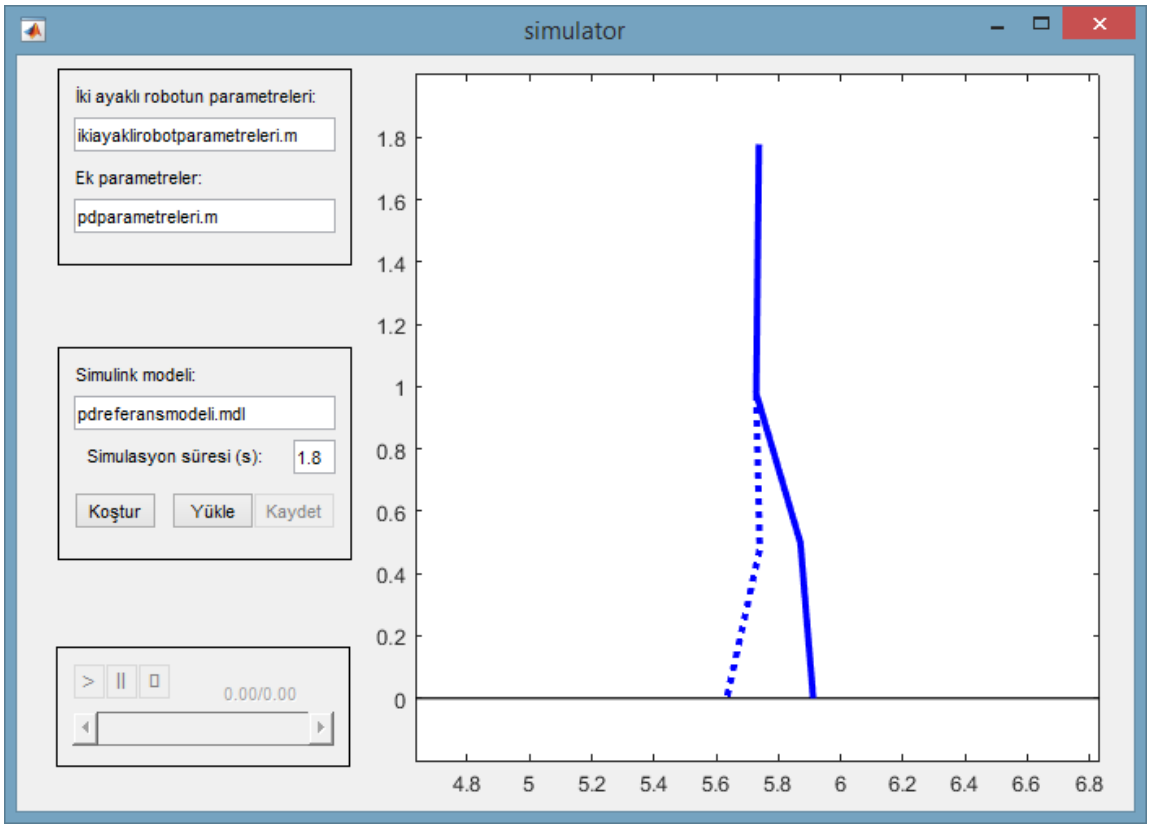
Çizelge 5.1 7 SD'li sistemin başlangıç koşulları

	Başlangıç Durumları	Başlangıç Hızları
x_0	0 (m)	0.1 (m/s)
y_0	1.3749 (m)	-0.05 (m/s)
α	0.04 (rad)	-0.6 (m/s)
β_L	-0.11 (rad)	-0.6 (m/s)
β_R	0.1475 (rad)	-1 (m/s)
λ_L	0.1696 (rad)	0.6 (m/s)
λ_R	0.1616 (rad)	0 (m/s)

Yukarıda belirtilen başlangıç durumları, arzulanan yürüyüş düzeninin gerçeklenmesi için açıların ve gövdenin konumunun hangi konumda olması gerektiğinden belirlenmektedir. Yürüyüş düzeninin türevlenebilir fonsiyonlar olması bize istenilen açı durumunda olması gereken hızı da vermektedir.

5.3 MATLAB Simulasyonu İçin Kullanıcı Arayüzü Oluşturulması

7 SD'li sistemin simülasyonunu gözlemlemek ve parametrelerine müdahele edebilmek için bir MATLAB kullanıcı arayüzü hazırlanmıştır. Şekil 5.10'da bu arayüz görülmektedir. MATLAB'in kullanıcı arayüzü özelliğinden faydalanılarak simülasyonlar koşturulmuştur. 7 SD'li robotun düz zeminde yürüme simülasyonu bu arayüz ile koşturuldu ve çalıştırıldı. Robot parametrelerinin ve PD katsayılarının bulunduğu MATLAB komut dizinleri çağırılarak simülasyonun koşabilmesi için gerekli ön yükleme verileri çalışma uzayına aktarıldı.



Şekil 5.10 Simulasyon arayüzü

Simulasyon sonuçları kaydedilmektedir. Şekil 5.10'un sol alt bölümünde kaydı oynatma bölümü bulunmaktadır. Elde edilen sonuçlar istenilen hızda ekranda yenilenerek görsel oluşturulmaktadır.

Kullanıcı arayüzünün fonsiyonları:

- İki ayaklı robotun parametreleri: MATLAB komut dizini içinde önceden 7 SD'li robot için hazırlanan verileri simülasyonun koşabilmesi için çalışma uzayına çıkarılması için kullanılmıştır. Ek D'de bu parametreler verilmiştir.
- Ek parametreler: MATLAB komut dizini içinde önceden 7 SD'li robot için hazırlanan kontrol verilerini simülasyonun koşabilmesi için çalışma uzayına çıkarılması için kullanılmıştır.

- Simulink modeli: Simulasyon için hazırlanan 7 SD'li robot modeli. Bu modelin simülasyonda çalışabilmesi için Şekil 4.1'de görülen iki ayaklı robot modelinin içinde tanımlanmış olması gerekmektedir.
- Simulasyon uzunluğu: Simulasyonun maksimum koşma süresini ifade etmektedir. Simulasyon istenirse daha öncesinde kesilebilir.
- Koştur düğmesi: İki ayaklı robot model simulasyonunu, önceden yüklenen parametreler doğrultusunda koşturmaya yarar.
- Yükle düğmesi: MATLAB çalışma uzayına, MATLAB kod dizini olarak belirtilen parametreleri alır.
- Kaydet düğmesi: Simulasyon sonucunda oluşan yeni verileri çalışma uzayıyla beraber kaydetmeye yarar.
- Animasyon düğmeleri (oynat,duraklat,dur): Sistemin davranışını animasyon olarak görselleştirmeye yarar.

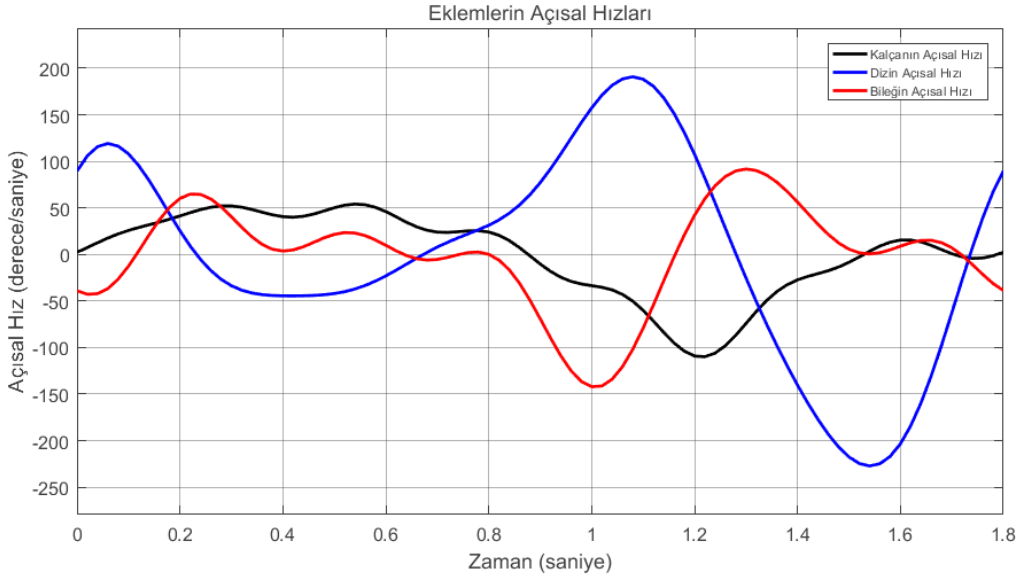
BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER

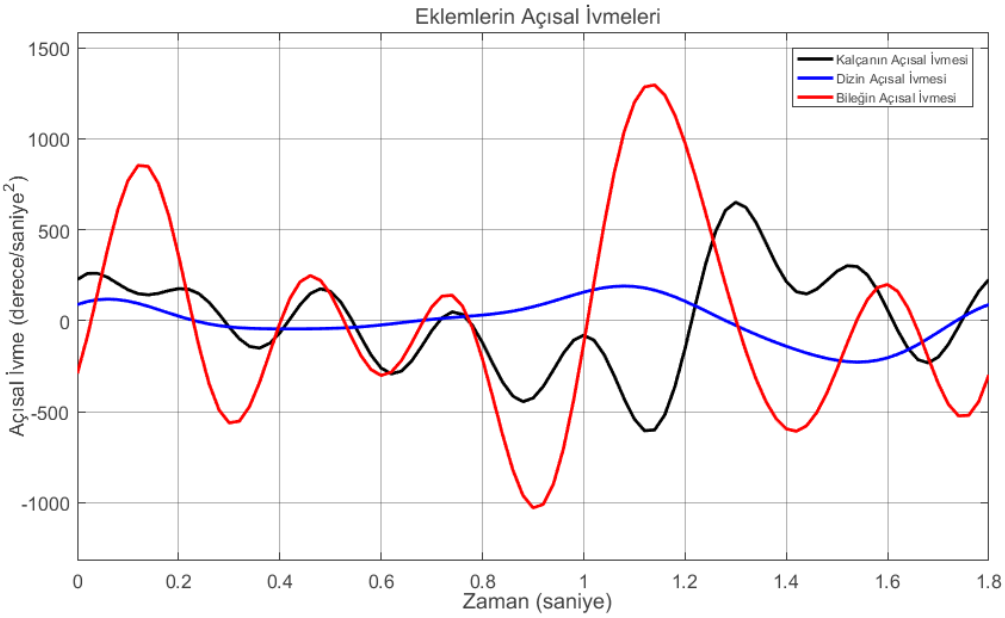
Tezde iki farklı sistemin kinematik ve dinamik denklemleri mevcuttur. İlk sistem on iki serbestlik dereceli olup kinematik analiz ve iki boyutlu yürüş hareketinin incelenmesi için Simulink modeli oluşturulmuştur. Bu sistem üç boyutlu hareket kabiliyetine sahip olsa da iki boyutlu bir hareket tercih edilmiştir. Sistemin yerle teması olmadığı için herhangi bir kontrol uygulanmamıştır. İlk sistemin kurulum yöntemi bakımından karmaşıklığı ve yerle temasının kurulamaması nedeniyle daha basit bir sisteme ihtiyaç duyulmuştur. Bu ikinci sistem farklı bir metotla oluşturulmuş ve yerle temas kuvvetleri elde edilebilmiştir. İkinci sistem yedi serbestlik derecelidir ve yerle temas ederek kaymadan ilerleyebilmektedir. Kontrol yöntemi olarak PD kontrolcü kullanılmış ve dengeli bir yürüyüş simülasyonu gerçekleştirilmiştir.

6.1 On İki Serbestlik Dereceli Sistemden Elde Edilen Sonuçlar

İlk simülasyon için insan bacağına en yakın model olan altı serbestlik dereceli model benimsenmiştir. Dolayısıyla bu şekilde kurulan bir model gerçek insana ait veriler girilmek suretiyle hareket gözlemlenebilmektedir. Bu doğrultuda [37]'den alınan grafik değerleri için Fourier eğri oturtma metodu uygulanmıştır. Elde edilen fonsiyonların birinci ve ikinci türevlerinin alınması ile hız ve ivme değerlerinin de ideal değerleri sırasıyla Şekil 6.1 ve Şekil 6.2'deki gibi elde edilmiş oldu.

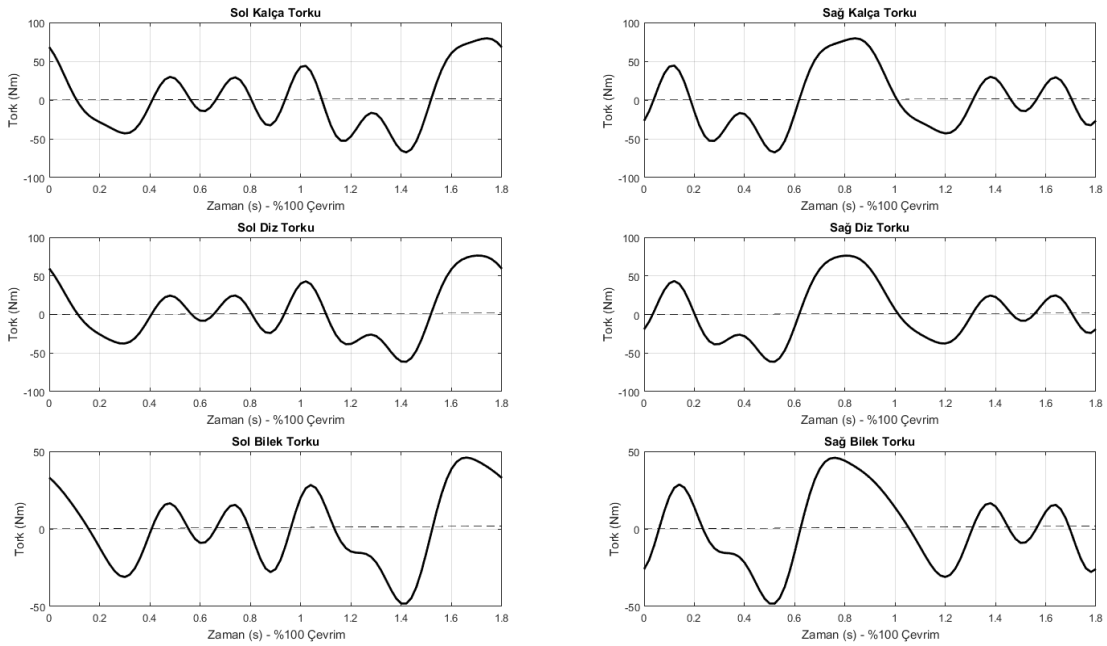


Şekil 6.1 Eklemlerin Açısal Hızları



Şekil 6.2 Eklemlerin Açısal İvmeleri

Bu ideal değerler SimMechanics içerisinde eklemlere eyleyici blokları vasıtasıyla iletildi. Sonuç olarak, insan yürüyüşüne oldukça benzer bir yürüyüş gözlemlendi. Ayrıca yine SimMechanics içerisindeki sensör blokları sayesinde gözlemlenen hareketin, başlangıç koşulları aynı olmak suretiyle, gerçeklenebilmesi için gerekli tork değerleri Şekil 6.3'teki gibi elde edildi. Başlangıç durumunda sistem iki ayaklı faz durumundadır.



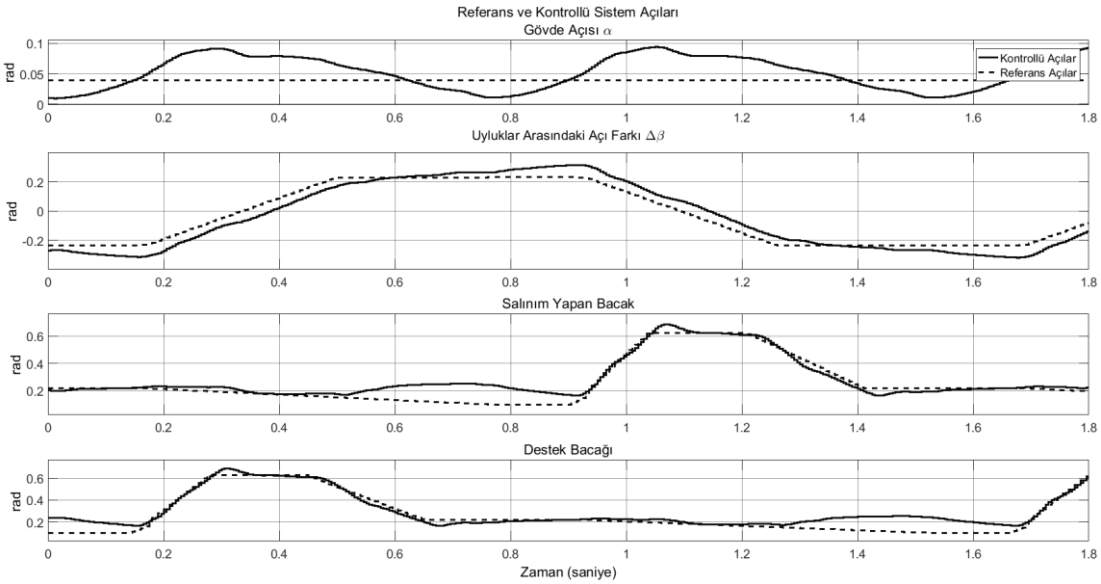
Şekil 6.3 Eklemlerde oluşan tork değerleri

6.2 Yedi Serbestlik Dereceli Sistemden Elde Edilen Sonuçlar

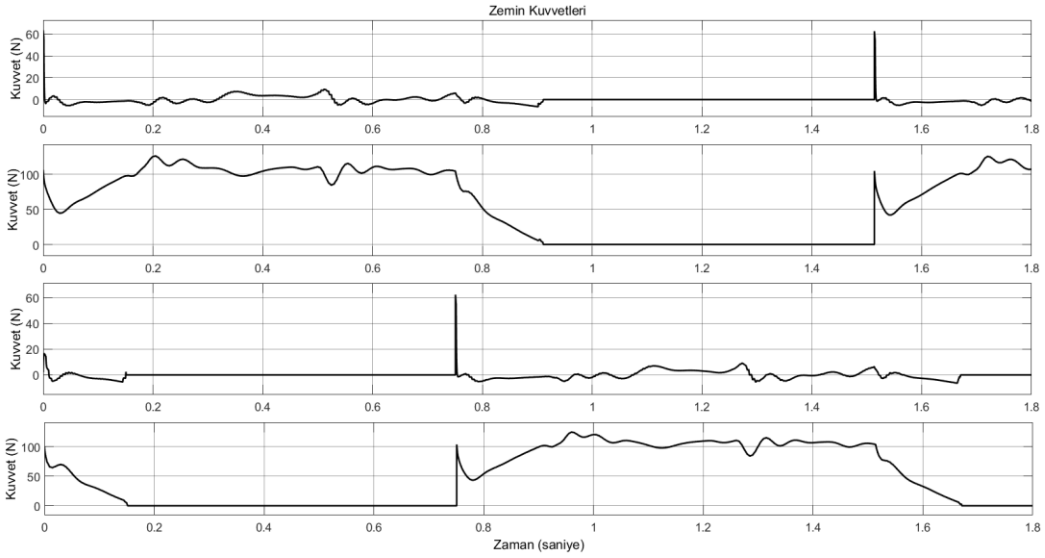
İkinci sistemin oluşturulmasının amacı yere basarak yürüyebilen bir sistemin oluşturulması ve kontrol edilmesiydi. Sistem enerji denklemleri D'Alembert prensibi ile çıkarıldı. Virtüel iş yöntemi ile kuvvetler hesaplandı. Bu noktada MATLAB komut dizini yardımı ile diferansiyel işlem komutlarından faydalanıldı.

Kontrol yöntemi olarak PD kontrol tercih edildi. PD kontrolcünün referans değerlere göre yürüş kontrolünün sistem cevabı Şekil 6.4'teki grafiklerde görülebilmektedir. PD kontrolcü yerden gelen kuvvetlere ve referans harekete göre bir kontrol sağlamaktadır. Yerden gelen kuvvetler Şekil 6.5'te görülebilmektedir. Grafikleri sırasıyla statik ve kinetik sürtünme kuvveti, ardından sol ve sağ bacağa zeminden gelen tepki kuvvetleridir. Bölüm 3.6.2'de bu kuvvetleri hesaplanması ve zemin için kullanılan yay ve sönüm katsayıları verilmiştir.

Modelin PD kontrol sonuçları;

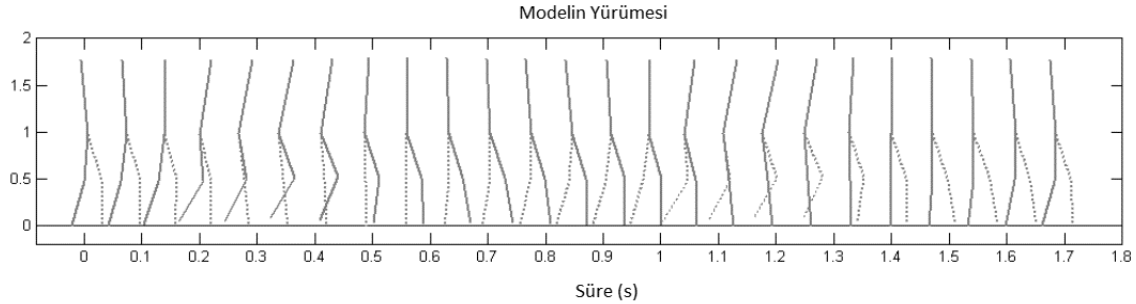


Şekil 6.4 Referans açı değerleri ve kontrol edilmiş açı değerleri



Şekil 6.5 Zemin kuvvetleri

Sistemin yürüyüşü Şekil 6.6'te görülmektedir. Simülasyonlar iki boyulu ortamda gerçeklenmişlerdir. İleride bu model üzerinde hesaplamalı tork kontrolü uygulanması da düşünülmektedir.



Şekil 6.6 Düz zeminde yürüyüş

Bu tez kapsamında kurulan sistemlerde farklı metotlar denenmiş ve alınan sonuçlar gösterilmiştir. İki ayaklı yürüyen sistem modelleri genel yapıları dolayısıyla karmaşıktırlar. Bu karmaşıklık özellikle dinamik analizde kendini göstermektedir. Bunun en önemli örneği yürüyüş esnasında farklı fazların ihtiva etmesi ve kontrol değerlerinin değişmek zorunda olmasıdır. Model oluşturmadaki bir diğer zorluk da zemin bağlantısı ve tepki kuvvetlerinin elde edilmesidir. Bunun için, sistemler farklı yöntemlerle modellenmişlerdir.

İki ayak üzerinde yürüyen robotlar ile ilgili çalışmalar günümüzde oldukça yoğun olarak devam etmektedir. Bazı yöntemlerin anlaşılması, açıklamasının da karmaşıklından dolayı oldukça zordur. Tez kapsamında PD kontrol uygulaması tercih edilmiştir. Kurulan sistem farklı kontrolcülerin denenebilmesi açısından uygudur ve farklı zemin ve yürüme referanslarına göre tekrardan düzenlenebilmektedir.

Tez kapsamında oluşturulan ve simülasyonu yapılan sistemin başlangıç koşullarının sıfırdan farklı olduğu 5. Bölümde anlatılmıştı. Sisteme yürümeye başlama ve durma gibi durumları için yeni fazlar tanımlanarak yeni kontrol katsayıları ile kontroller denenerek durma anından yürümeye başlayan ve tekrardan durabilen bir sistemin elde edilmesi şeklinde bir geliştirme yapılarak tam anlamıyla yürüyebilen bir sistem oluşturulabilir.

KAYNAKLAR

[1] Kato I., Ohteru H., Kobayashi H., Shirai K. ve Uchiyama A., (1973). "Robots and Manipulators", 1, International Centre for Mechanical Science, 5-8 September 1973, Udine, Italy.

[2] Chestnutt J., Lau M., Cheung G., Kuffner J., Hodgins J. ve Kanade T., (2005). "Footstep Planning for the Honda ASIMO Humanoid", International Conference on Robotics and Automation, 18-22 April 2005, Barcelona, Spain.

[3] Sakagami Y., Watanabe R., Aoyama C., Matsunaga S., Higaki N. ve Fujimura K., (2002). "The intelligent ASIMO: System overview and integration", Intl. Conference on Intelligent Robots and Systems, 30 September – 4 October 2002, Lausanne, Switzerland.

[4] Kaneko K., Kanehiro F., Kajita S., Yokoyama K., Akachi K., Kawasaki T., Ota S. ve Isozumi T., (2002). "Design of Prototype Humanoid Robotics Platform for HRP", Inti. Conference on intelligent Robotsand Systems, 30 September – 4 October 2002, Lausanne, Switzerland.

[5] Kaneko K., Kanehiro F., Kajita S, Yokoyama K., Akachi K., Kawasaki T., Ota S. ve Isozumi T., (2004). "Humanoid Robot HRP-2", International Conference on Robotics & Automation, 26 April – 1 May 2004, New Orleans, USA.

[6] Kaneko K., Kanehiro F., Morisawa M., Tsuji T., Miura K., Nakaoka S., Kajita S. ve Yokoi K., (2011). "Hardware Improvement of Cybernetic Human HRP-4C for Entertainment Use", IEEE/RSJ, 25-30 September 2011, San Francisco, USA.

[7] Kaneko K., Kanehiro F., Morisawa M., Tsuji T., Miura K., Nakaoka S., Kajita S. ve Yokoi K., (2009). "Creating Facial Motions of Cybernetic Human HRP-4C", 9th IEEE-RAS, 7-10 December 2009, Paris, France.

[8] Pfeiffer F., Löffler K. ve Gienger M., (2002). "The Concept of Jogging JOHNNIE", International Conference on Robotics Automation, 11-15 May 2002, Washington, DC, USA.

[9] Lohmeier S., Löffler K., Gienger M., Ulbrich H. ve Pfeiffer F., (2004). "Computer System and Control of BIPED Johnnie", International Conference on Robotics Automation, 26 April – 1 May 2004, New Orleans, LA, USA.

[10] Lohmeier S., Buschmann T. ve Ulbrich H., (2009). “Humanoid Robot LOLA”, International Conference on Robotics and Automation, 12-17 May 2009, Kobe, Japan.

[11] Lohmeier S., Buschmann T. ve Ulbrich H., (2009). “System Design and Control of Anthropomorphic Walking Robot LOLA”, IEEE/ASME Transactions On Mechatronics, 14(6): 658-666.

[12] Wooden D., Malchano M., Blankespoor K., Howard A., Rizzi A.A. ve Raibert M., (2010). “Autonomous Navigation for BigDog”, International Conference on Robotics and Automation, 3-8 May 2010, Anchorage, Alaska, USA.

[13] Waard M., Inja M. ve Visser A., (2013). “Analysis of flat terrain for the Atlas robot”, AI & Robotics and 5th RoboCup Iran Open International Symposium (RIOS), 8 April 2013, Tehran, Iran.

[14] Atmeh G.M., Ranatunga I., Popa A.O., Subbarao K., Lewis F. ve Rowe P., (2014). “Implementation of an Adaptive, Model Free, Learning Controller on the Atlas Robot”, American Control Conference (ACC), 4-6 June 2014, Portland, Oregon, USA.

[15] Faraji S., Pouya S., Atkeson C.G. ve Ijspeert A.J., (2014). “Versatile and Robust 3D Walking with a Simulated Humanoid Robot (Atlas): a Model Predictive Control Approach”, International Conference on Robotics & Automation (ICRA), 31 May-7 June 2014, Hong Kong, China.

[16] Hinojosa W.M., Tsagarakis N.G., Metta G., Becchi F., Sandini G. ve Caldwell D.G., (2006). “Performance Assessment of a 3 DOF Differential Based Waist joint for the ‘iCub’ Baby Humanoid Robot”, International Symposium on Robot and Human Interactive Communication, 6-8 September 2006, Hatfield, UK.

[17] Tsagarakis N.G., Sinclair M., Becchi F., Metta G., Sandini G. ve Caldwell D.G., (2006). “Lower Body Design of the ‘iCub’ a Human-baby like Crawling Robot”, IEEE HUMANOIDS’06, 5-6 December 2006, Geneva, Italy.

[18] Schmitz A., Maggiali M., Randazzo M., Natale L. ve Metta G., (2008). “A Prototype Fingertip with High Spatial Resolution Pressure Sensing for the Robot iCub”, 8th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots, 1-3 December 2008, Daejeon, Korea.

[19] Jamali N., Maggiali M., Giovannini F., Metta G. ve Natale L., (2015). “A New Design of a Fingertip for the iCub Hand”, IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS), 28 September - 02 October 2015, Hamburg, Germany.

[20] Lu Z., Lallee S., Tikhanoff V. ve Dominey P.F., (2012). “Bent Leg Walking Gait Design for Humanoid Robotic Child-iCub Based on Key State Switching Control”, IEEE Symposium on Robotics and Applications(ISRA), 03-05 June 2012, Kuala Lumpur, Malaysia.

[21] Gouaillier D., Hugel V., Blazevic P., Kilner C., Monceaux J., Lafourcade P., Marnier B., Serre J. ve Maisonnier B., (2009). "Mechatronic design of NAO humanoid", IEEE International Conference on Robotics and Automation, 12-17 May 2009, Kobe, Japan.

[22] Gouaillier D., Collette C. ve Kilner C., (2010). "Omni-directional Closed-loop Walk for NAO", IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots, 6-8 December 2010, Nashville, TN, USA.

[23] Luthffi I., Syamimi S., Hanafiah Y., Hafizan H., Saiful B., Jaafar A. ve Zahari I., (2011). "Face Detection Technique of Humanoid Robot NAO for Application in Robotic Assistive Therapy", IEEE International Conference on Control System, Computing and Engineering, 25-27 November 2011, Penang, Malaysia.

[24] Luthffi I., Syamimi S., Hanafiah Y., Hafizan H., Saiful B., Jaafar A. ve Zahari I., (2012). "Initial Response of Autistic Children in Human-Robot Interaction Therapy with Humanoid Robot NAO", IEEE 8th International Colloquium on Signal Processing and its Applications, 23-25 March 2012, Malacca, Malaysia.

[25] Wang F., Wang Y., Wen S. ve Zhao S., (2012). "Nao Humanoid Robot Gait Planning Based on the Linear Inverted Pendulum", 24th Chinese Control and Decision Conference (CCDC), 23-25 May 2012, Taiyuan, China.

[26] Motoc I.M., Sirlantzis K., Spurgeon S.K. ve Lee P., (2014). "Zero Moment Point/Inverted Pendulum-based Walking Algorithm for the NAO Robot", Fifth International Conferance on Emerging Security Technologies, 10-12 September 2014, Alcala de Henares, Spain.

[27] Song P., Li W., Yang N. ve Duan F., (2015). "An Intelligent Vision Localization System of a Service Robot Nao", 34th Chinese Control Conference, 28-30 July 2015, Hangzhou, China.

[28] Kim T.W. Lee S.I., Kim R. ve Kim S., (2012). "An experience of the OPRoS caomponenet based programming through the implementation of DARWIN Robot Soccer", 9th International Conference on Ubiquitous Robots and Ambient Intelligence (URAI), 26-29 November 2012, Daejeon, Korea.

[29] Lapeyre M., Rouanet P. ve Oudeyer P.Y., (2013). "Poppy Humanoid Platform: Experimental Evaluation of the Role of a Bio-inspired Thigh Shape", 13th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots (Humanoids), 15-17 October 2013, Atlanta, GA, USA.

[30] Lapeyre M., Rouanet P. ve Oudeyer P.Y., (2013). "The Poppy Humanoid Robot: Leg Design for BIPED Locomotion", IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS), 03-07 November 2013, Tokyo, Japan.

[31] Richard P.P., (1981). Robot Manipulators: Mathematics, Programming and Control, Sixth Printing, The MIT Press Cambridge, 279, Massachusetts and London, England.

[32] Vukobratovic M. ve Frank A.A., (1970). "Juricic D., On the Stahility of BIPED Locomotion", IEEE Transactıons On Bio-Medical Engineering, 17(1): 25-36.

[33] Vukobratovic M. ve Borovac B., (2004). “Zero-Moment Point — Thirty Five Years Of Its Life”, International Journal of Humanoid Robotics 1(1): 157–173.

[34] Schilling R.J., (2003). Fundamentals of Robotics Analysis and Control, Prentice Hall of India, Fifth Printing, 425, New Delhi, India.

[35] Spong M.W., Hutchinson S. ve Vidyasagar M., Robot Modeling and Control, First Edition, John Wiley & Sons, Inc, 407, New York, USA.

[36] Kajita S., Kanehiro F., Kaneko K., Yok K. ve Hirukawa H., (2001). “The 3D Linear Inverted Pendulum Mode: A simple modeling for a BIPED walking pattern generation”, Proceedings of the 2001 IEEE/RSJ, International Conference on Intelligent Robots and Systems, 29 October- 03 November 2011, Maui, Hawaii, USA.

[37] Kirtley C., (2006). Clinical Gait Analysis. Theory and Practice, Elsevier Limited, 316, London, England.

[38] Sudheer A.P., Vijayakumar R. ve Mohanda K.P., (2012). “Stable Gait Synthesis and Analysis of a 12-degree of Freedom Biped Robot in Sagittal and Frontal Planes”, Journal of Automation, Mobile Robotics & Intelligent Systems, 6(4): 36-44.

[39] Li G., Huang Q., Tang Y., Li G. ve Li M., (2008). “Kinematic Analysis and Motion Planning of a Biped Robot with 7-DOF and Double Spherical Hip Joint”, Proceedings of the 7th World Congress on Intelligent Control and Automation 25–27 June, 2008, Chongqing, China.

[40] Bertrand S., Bruneau O., Ouezdou F.B. ve Alfayad S., (2012). “Closed-form solutions of inverse kinematic models for the control of a biped robot with 8 active degrees of freedom per leg”, Mechanism and Machine Theory, 49: 117–140.

[41] Panich S., (2012). “Design and Simulation of Leg-Exoskeleton Suit for Rehabilitation”, Global Journal of Medical research, 12(3): 89-95.

[42] Lewis F.I., (2004). Robot Manipulator Control Theory and Practice Second Edition, Marcel Dekker Inc., 607, New York, Basel.

[43] Lari Y.B., Eghtesad M., Khoogar A.R. ve Zadeh A.M., (2015). “Tracking control of a planar five-link bipedal walking system with point contact, considering self-impact joint constraint by adaptive neural network method”, Latin American Journal of Solids and Structures, 12: 1074-1101.

[44] Siqueira A.A.G. ve Terra M.H., (2006). “Nonlinear H ∞ Control Applied to Biped Robots”, Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Control Applications, 4-6 October 2006, Munich, Germany.

[45] Li Z. ve Ge S.S., (2013). “Adaptive robust controls of biped robots”, IET Control Theory Appl., 7(2): 161–175.

[46] Han J., (2012). Bipedal Walking for a Full-sized Humanoid Robot Utilizing Sinusoidal Feet Trajectories and Its Energy Consumption, PhD Thesis, Blacksburg, Virginia.

[47] Haavisto O., (2004). Kävelevän robottimallin kehittäminen sekä sen datapohjainen mallitus ja säätö, Master Thesis, Helsinki, Finland.

[48] Gatti P.L., (2014). Applied Structural And Mechanical Vibrations, Second Edition, CRC Press, 668, NW, USA.

6 SERBESTLİK DERECELİ BACAĞIN ATALET MATRİSİNİN ELEMANLARI

12 SD'li sistemin hareket denklemlerinde kullanılan formül:

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q}) + G(q) = \tau \qquad \text{(A.1)}$$

Yukarıdaki formülde belirtilen yapıda, sol bacak için M kütle atalet matrislerinin elemanları aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\begin{aligned}
d_{11} &= m_3 {l_{3C}}^2 \left(\sin^2\theta_3 + \sin^2\theta_2 \cos^2\theta_3\right) \\
&+ m_4 \left\{\left(l_3 \sin\theta_3 + l_{4C} \sin\theta_{34}\right)^2 + \sin^2\theta_2 \left(l_3 \cos\theta_3 + l_{4C} \cos\theta_{34}\right)^2\right\} \\
&+ m_6 \left[\begin{array}{l}\left(l_3 \sin\theta_3 + l_4 \sin\theta_{34} + l_{6C} \sin\theta_{345} \cos\theta_6\right)^2 \\ + \left\{\sin\theta_2 \left(l_3 \cos\theta_3 + l_4 \cos\theta_{34} - l_6 \cos\theta_{345} \cos\theta_6\right) + l_{6C} \sin\theta_2 \sin\theta_6\right\}^2\end{array}\right] \\
&+ I_{3x} \cos^2\theta_2 \cos^2\theta_3 + I_{3y} \cos^2\theta_2 \sin^2\theta_3 + I_{3z} \sin^2\theta_2 \\
&+ I_{4x} \cos^2\theta_2 \cos^2\theta_{34} + I_{4y} \cos^2\theta_2 \sin^2\theta_{34} + I_{4z} \sin^2\theta_2 \\
&+ I_{6x} \left(\sin\theta_2 \sin\theta_6 - \cos\theta_2 \cos\theta_{345} \cos\theta_6\right)^2 \\
&+ I_{6y} \left(\sin\theta_2 \cos\theta_6 + \cos\theta_2 \cos\theta_{345} \sin\theta_6\right)^2 + I_{6z} \cos^2\theta_2 \sin^2\theta_{345}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
d_{12} &= -m_3 {l_{3C}}^2 \cos\theta_2 \cos\theta_3 \sin\theta_3 \\
&\quad -m_4 \cos\theta_2 \left({l_3}^2 \cos\theta_3 \sin\theta_3 + {l_{4C}}^2 \cos\theta_{34} \sin\theta_{34} + l_3 l_4 \sin\left(2\theta_{34}\right) \right) \\
&\quad -m_6 \left(l_3 \sin\theta_3 + l_4 \sin\theta_{34} + l_{6C} \sin\theta_{345} \cos\theta_6 \right) \begin{Bmatrix} \cos\theta_2 \left(l_3 \cos\theta_3 + l_4 \cos\theta_{34} \right) \\ -l_{6C} \left(\sin\theta_2 \sin\theta_6 + \cos\theta_2 \cos\theta_{345} \cos\theta_6 \right) \end{Bmatrix} \\
&\quad +I_{3x} \cos\theta_2 \cos\theta_3 \sin\theta_3 - I_{3y} \cos\theta_2 \cos\theta_3 \sin\theta_3 \\
&\quad +I_{4x} \cos\theta_2 \cos\theta_{34} \sin\theta_{34} - I_{4y} \cos\theta_2 \cos\theta_{34} \sin\theta_{34} \\
&\quad -I_{6x} \left(\sin\theta_2 \sin\theta_{345} \cos\theta_6 \sin\theta_6 - \cos\theta_2 \cos\theta_{345} \sin\theta_{345} \cos^2\theta_6 \right) \\
&\quad +I_{6y} \left(\sin\theta_2 \sin\theta_{345} \cos\theta_6 \sin\theta_6 + \cos\theta_2 \cos\theta_{345} \sin\theta_{345} \sin^2\theta_6 \right) \\
&\quad -I_{6z} \cos\theta_2 \cos\theta_{345} \sin\theta_{345}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_{13} &= m_3 {l_{3C}}^2 sin\theta_2 + m_4 sin\theta_2 \left({l_3}^2 + {l_{4C}}^2 + 2 l_3 l_{4C} cos\theta_4 \right) \\
&\quad +m_3 \begin{Bmatrix} {l_3}^2 sin\theta_2 + {l_4}^2 \sin\theta_2 + {l_{6C}}^2 \left(sin\theta_2 \cos^2\theta_6 + cos\theta_2 cos\theta_{345} cos\theta_6 sin\theta_6 \right) \\ +l_3 l_4 \left(sin2\theta_{34} + cos\theta_4 \right) + l_3 l_{6C} \left(cos\theta_2 cos\theta_3 sin\theta_6 + 2 sin\theta_2 cos\theta_{45} cos\theta_6 \right) \\ +l_4 l_{6C} \left(cos\theta_2 cos\theta_{34} sin\theta_6 + 2 sin\theta_2 cos\theta_5 cos\theta_6 \right) \end{Bmatrix} \\
&\quad +I_{3z} \left(\cos^2\theta_2 sin\theta_2 + \sin^3\theta_2 \right) + I_{4z} \left(\cos^2\theta_2 sin\theta_2 + \sin^3\theta_2 \right) \\
&\quad +I_{6x} sin\theta_6 \left(sin\theta_2 sin\theta_6 - cos\theta_2 cos\theta_{345} cos\theta_6 \right) + I_{6y} cos\theta_6 \left(sin\theta_2 cos\theta_6 + cos\theta_2 cos\theta_{345} sin\theta_6 \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_{14} &= m_4 \left({l_{4C}}^2 sin\theta_2 + l_3 l_{4C} sin\theta_2 cos\theta_4 \right) \\
&\quad +m_6 \begin{Bmatrix} {l_4}^2 + {l_{6C}}^2 \left(\cos^2\theta_6 + cos\theta_2 sin\theta_6 \left(cos\theta_2 sin\theta_6 + 2 sin\theta_2 cos\theta_{345} cos\theta_6 \right) \right) \\ +l_3 l_4 \left(sin\theta_3 sin\theta_{34} + \sin^2\theta_2 cos\theta_3 cos\theta_{34} \right) \\ +l_3 l_{6C} \left(cos\theta_2 sin\theta_2 cos\theta_3 sin\theta_6 + sin\theta_3 sin\theta_{345} cos\theta_6 + \sin^2\theta_2 cos\theta_3 cos\theta_{345} cos\theta_6 \right) \\ +2 l_4 l_{6C} \left(cos\theta_5 cos\theta_6 + cos\theta_2 sin\theta_2 cos\theta_{34} sin\theta_6 \right) \end{Bmatrix} \\
&\quad +I_{4z} sin\theta_2 + I_{6x} sin\theta_6 \left(sin\theta_2 sin\theta_6 - cos\theta_2 cos\theta_{345} cos\theta_6 \right) \\
&\quad +I_{6y} cos\theta_6 \left(sin\theta_2 cos\theta_6 + cos\theta_2 cos\theta_{345} sin\theta_6 \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_{15} &= m_6 l_{6C} \left(sin\theta_2 sin\theta_6 - cos\theta_2 cos\theta_{345} cos\theta_6 \right) \left(l_3 sin\theta_3 + l_4 sin\theta_{34} + l_{6C} cos\theta_6 sin\theta_{345} \right) \\
&\quad +I_{6x} sin\theta_6 \left(sin\theta_2 sin\theta_6 - cos\theta_2 cos\theta_{345} cos\theta_6 \right) + I_{6y} cos\theta_6 \left(sin\theta_2 cos\theta_6 + cos\theta_2 cos\theta_{345} sin\theta_6 \right) \\
&\quad -I_{6z} \cos^2\theta_2 \sin^2\theta_{345} sin\theta_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_{16} &= m_6 l_{6C} \begin{pmatrix} l_3 sin\theta_2 cos\theta_{45} cos\theta_6 + l_4 sin\theta_2 cos\theta_5 cos\theta_6 \\ +l_{6C} cos\theta_6 \left(sin\theta_2 cos\theta_6 + cos\theta_2 cos\theta_{345} sin\theta_6 \right) \end{pmatrix} \\
&\quad -I_{6z} cos\theta_2 sin\theta_{345} \cos^2\theta_{345}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_{22} &= m_3 {l_{3C}}^2 \cos^2\theta_3 + m_4 \sin^2\theta_2 \left(l_3 cos\theta_3 + l_4 cos\theta_{34}\right)^2 \\
&+ m_6 \begin{Bmatrix} \left(l_3 cos\theta_3 + l_4 cos\theta_{34}\right)^2 + 2 l_{6C} cos\theta_{345} cos\theta_6 \left(l_3 cos\theta_3 + l_4 cos\theta_{34}\right) \\ + {l_{6C}}^2 \left(\sin^2\theta_6 + \cos^2\theta_{345} \cos^2\theta_6\right) \end{Bmatrix} \\
&+ I_{3x} \sin^2\theta_3 + I_{3y} \cos^2\theta_3 + I_{4x} \sin^2\theta_{34} + I_{4y} \cos^2\theta_{34} \\
&+ I_{6x} \sin^2\theta_{345} \cos^2\theta_6 + I_{6y} \sin^2\theta_{345} \sin^2\theta_6 + I_{6z} \cos^2\theta_{345}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_{23} &= m_6 l_{6C} sin\theta_6 \left(l_3 sin\theta_3 + l_4 sin\theta_{34} + l_{6C} sin\theta_{345} cos\theta_6\right) \\
&- I_{6x} sin\theta_{345} cos\theta_6 sin\theta_6 + I_{6y} sin\theta_{345} cos\theta_6 sin\theta_6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_{24} &= -m_6 \left(l_4 sin\theta_{34} + l_{6C} sin\theta_{345} cos\theta_6\right) \begin{Bmatrix} l_3 cos\theta_2 cos\theta_3 + l_4 cos\theta_2 cos\theta_{34} \\ -l_{6C} \left(sin\theta_2 sin\theta_6 - cos\theta_2 cos\theta_{345} cos\theta_6\right) \end{Bmatrix} \\
&- I_{6x} sin\theta_{345} cos\theta_6 sin\theta_6 + I_{6y} sin\theta_{345} cos\theta_6 sin\theta_6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_{25} &= m_6 l_{6C} cos\theta_6 \left\{l_3 cos\theta_3 \theta_{345} + l_4 cos\theta_{34} cos\theta_{345} + l_{6C} \left(\sin^2\theta_6 + \cos^2\theta_{345} cos\theta_6\right)\right\} \\
&+ I_{6x} sin\theta_{345} cos\theta_6 sin\theta_6 + I_{6y} sin\theta_{345} cos\theta_6 sin\theta_6
\end{aligned}
$$

$$
d_{26} = m_6 {l_{6C}}^2 sin\theta_{345} sin\theta_6 + I_{6z} cos\theta_{345}
$$

$$
\begin{aligned}
d_{33} &= m_3 {l_{3C}}^2 + m_4 \left({l_3}^2 + {l_{4C}}^2 + 2 l_3 l_{4C} cos\theta_4\right) \\
&+ m_6 \begin{Bmatrix} {l_3}^2 + {l_{4C}}^2 + {l_{6C}}^2 \cos^2\theta_6 + 2 l_3 l_4 cos\theta_4 \\ + 2 l_3 l_{6C} cos\theta_{45} cos\theta_6 + 2 l_4 l_{6C} cos\theta_5 cos\theta_6 \end{Bmatrix} \\
&+ I_{3z} + I_{4z} + I_{6x} \sin^2\theta_6 + I_{6y} \cos^2\theta_6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_{34} &= m_4 l_{4C} \left(l_3 cos\theta_4 + l_{4C}\right) \\
&+ m_6 \begin{Bmatrix} {l_4}^2 sin\theta_2 + {l_{6C}}^2 cos\theta_6 \left(sin\theta_2 cos\theta_6 + cos\theta_2 cos\theta_{345} sin\theta_6\right) \\ + l_3 l_4 sin\theta_2 cos\theta_4 \\ + l_3 l_{6C} \left\{cos\theta_2 cos\theta_3 sin\theta_6 + sin\theta_2 cos\theta_{45} cos\theta_6 \left(2 - cos\theta_3\right)\right\} \\ + l_4 l_{6C} \left(cos\theta_2 cos\theta_{34} sin\theta_6 + 2 sin\theta_2 cos\theta_5 cos\theta_6\right) \end{Bmatrix} \\
&+ I_{4z} + I_{6x} \sin^2\theta_6 + I_{6y} \cos^2\theta_6
\end{aligned}
$$

$$
d_{35} = m_6 l_{6C} sin\theta_6 \left(l_3 sin\theta_3 + l_4 sin\theta_{34} + l_{6C} sin\theta_{345} cos\theta_6\right) + I_{6x} \sin^2\theta_6 + I_{6y} \cos^2\theta_6
$$

$$
d_{36} = m_6 l_{6C} cos\theta_6 \left(l_3 cos\theta_{45} + l_4 cos\theta_5 + l_{6C} cos\theta_6\right)
$$

$$d_{44} = m_4 {l_{4C}}^2$$
$$+m_6 \left\{ \begin{array}{l} {l_4}^2 \left(\sin^2 \theta_{34} + \sin^2 \theta_2 cos^2 \theta_{34} \right) \\ +{l_{6C}}^2 \left\{ \left(cos\theta_2 sin\theta_6 + sin\theta_2 cos\theta_{345} cos\theta_6 \right)^2 + \sin^2 \theta_{345} \cos^2 \theta_6 \right\} \\ +l_4 l_{6C} \left(\begin{array}{l} sin\theta_{34} sin\theta_{345} cos\theta_6 + \sin^2 \theta_2 cos\theta_{34} cos\theta_{345} cos\theta_6 \\ +cos\theta_2 sin\theta_2 cos\theta_{34} sin\theta_6 \end{array} \right) \end{array} \right\}$$
$$I_{4z} + I_{6x} \sin^2 \theta_6 + I_{6y} \cos^2 \theta_6$$

$$d_{45} = m_6 l_{6C} \left(sin\theta_2 sin\theta_6 - cos\theta_2 cos\theta_{345} cos\theta_6 \right)(l_4 sin\theta_{34} + l_{6C} sin\theta_{345} cos\theta_6)$$
$$+I_{6x} \sin^2 \theta_6 + I_{6y} \cos^2 \theta_6$$

$$d_{46} = m_6 l_{6C} \left\{ l_4 sin\theta_2 cos\theta_5 cos\theta_6 + l_{6C} cos\theta_6 \left(sin\theta_2 cos\theta_6 + cos\theta_2 cos\theta_{345} sin\theta_6 \right) \right\}$$

$$d_{55} = m_6 {l_{6C}}^2 \left(\sin^2 \theta_6 + \cos^2 \theta_{345} \cos^2 \theta_6 \right) + I_{6x} \sin^2 \theta_6 + I_{6y} \cos^2 \theta_6$$

$$d_{56} = m_6 {l_{6C}}^2 sin\theta_{345} cos\theta_6 sin\theta_6$$

$$d_{66} = m_6 {l_{6C}}^2 \cos^2 \theta_6 \left[\begin{array}{l} \left\{ \left(sin\theta_1 + cos\theta_1 \right) sin\theta_2 + cos\theta_2 \right\} sin\theta_{345} \\ +\left(sin\theta_1 - cos\theta_1 \right) cos\theta_{345} \end{array} \right]^2 + I_{6z}$$

6 SERBESTLİK DERECELİ BACAĞIN CHRISTOFFEL SEMBOLLERİ

12 SD'li sistemin sol bacağı için santifüj ve koriolis etkilerini içeren C_{ijk} matrisinin elemanları aşağıdaki gibidir.

$$c_{111} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial d_{11}}{\partial q_1} + \frac{\partial d_{11}}{\partial q_1} - \frac{\partial d_{11}}{\partial q_1}\right\} = \frac{1}{2}\frac{\partial d_{11}}{\partial q_1} = 0$$

$$\begin{aligned}
c_{221} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial d_{12}}{\partial q_2} + \frac{\partial d_{12}}{\partial q_2} - \frac{\partial d_{22}}{\partial q_1}\right\} &= \frac{\partial d_{12}}{\partial q_2} - \frac{1}{2}\frac{\partial d_{22}}{\partial q_1} = m_3 {l_{3C}}^2 sin\theta_2 cos\theta_3 sin\theta_3 \\
&+ m_4 sin\theta_2 \left({l_3}^2 cos\theta_3 sin\theta_3 + {l_{4C}}^2 cos\theta_{34} sin\theta_{34} + l_3 l_{4C} \sin\left(2\theta_{34}\right)\right) \\
&+ m_6 \left(l_3 sin\theta_3 + l_4 sin\theta_{34} + l_{6C} sin\theta_{345} cos\theta_6\right) \\
&\times \left\{sin\theta_2 \left(l_3 cos\theta_3 + l_4 cos\theta_{34}\right) + l_{6C}\left(cos\theta_2 sin\theta_6 - sin\theta_2 cos\theta_{345} cos\theta_6\right)\right\} \\
&- sin\theta_2 cos\theta_3 sin\theta_3 \left(I_{3x} - I_{3y}\right) - sin\theta_2 cos\theta_{34} sin\theta_{34}\left(I_{4x} - I_{4y}\right) \\
&- I_{6x} sin\theta_{345} cos\theta_6 \left(cos\theta_2 sin\theta_6 + sin\theta_2 cos\theta_{345} cos\theta_6\right) \\
&+ I_{6y} sin\theta_{345} sin\theta_6 \left(cos\theta_2 cos\theta_6 - sin\theta_2 cos\theta_{345} sin\theta_6\right) \\
&+ I_{6z} sin\theta_2 cos\theta_{345} sin\theta_{345}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{331} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial d_{13}}{\partial q_3} + \frac{\partial d_{13}}{\partial q_3} - \frac{\partial d_{33}}{\partial q_1}\right\} &= \frac{\partial d_{13}}{\partial q_3} - \frac{1}{2}\frac{\partial d_{33}}{\partial q_1} \\
&= -m_6 \begin{Bmatrix} {l_{6C}}^2 cos\theta_2 sin\theta_{345} cos\theta_6 sin\theta_6 \\ -2 l_3 l_4 cos 2\theta_{34} + l_3 l_{6C} cos\theta_2 sin\theta_3 sin\theta_6 \\ + l_4 l_{6C} cos\theta_2 sin\theta_{34} sin\theta_6 \end{Bmatrix} \\
&+ \left(I_{6x} - I_{6y}\right) cos\theta_2 sin\theta_{345} cos\theta_6 sin\theta_6
\end{aligned}$$

$$c_{441}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial d_{14}}{\partial q_4}+\frac{\partial d_{14}}{\partial q_4}-\frac{\partial d_{44}}{\partial q_1}\right\}=\frac{\partial d_{14}}{\partial q_4}-\frac{1}{2}\frac{\partial d_{44}}{\partial q_1}$$
$$=m_4\left(-l_3 l_{4C} sin\theta_2 sin\theta_4\right)$$
$$+m_6\begin{Bmatrix}-2{l_{6C}}^2 cos\theta_2 sin\theta_2 sin\theta_{345} cos\theta_6 sin\theta_6\\+l_3 l_4\left(sin\theta_3 cos\theta_{34}-\sin^2\theta_2 cos\theta_3 sin\theta_{34}\right)\\+l_3 l_{6C} cos\theta_6\left(sin\theta_2 cos\theta_{345}-\sin^2\theta_2 cos\theta_3 sin\theta_{345}\right)\\-l_4 l_{6C} cos\theta_2 sin\theta_2 sin\theta_{34} sin\theta_6\end{Bmatrix}$$
$$+cos\theta_2 sin\theta_{345} cos\theta_6 sin\theta_6\left(I_{6x}-I_{6y}\right)$$

$$c_{551}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial d_{15}}{\partial q_5}+\frac{\partial d_{15}}{\partial q_5}-\frac{\partial d_{55}}{\partial q_1}\right\}=\frac{\partial d_{15}}{\partial q_5}-\frac{1}{2}\frac{\partial d_{55}}{\partial q_1}$$
$$=m_6 l_{6C}\begin{Bmatrix}cos\theta_2 sin\theta_{345} cos\theta_6\left(l_3 sin\theta_3+l_4 sin\theta_{34}+l_{6C} cos\theta_6 sin\theta_{345}\right)\\+l_{6C} cos\theta_6 cos\theta_{345}\left(sin\theta_2 sin\theta_6-cos\theta_2 cos\theta_{345} cos\theta_6\right)\end{Bmatrix}$$
$$+cos\theta_2 sin\theta_{345}\left\{\left(I_{6x}-I_{6y}\right)cos\theta_6 sin\theta_6-2I_{6z} cos\theta_2 cos\theta_{345} sin\theta_2\right\}$$

$$c_{661}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial d_{16}}{\partial q_6}+\frac{\partial d_{16}}{\partial q_6}-\frac{\partial d_{66}}{\partial q_1}\right\}=\frac{\partial d_{16}}{\partial q_6}-\frac{1}{2}\frac{\partial d_{66}}{\partial q_1}$$
$$=-m_6 l_{6C}\begin{bmatrix}sin\theta_2 sin\theta_6\left(l_3 cos\theta_{45}+l_4 cos\theta_5\right)\\+l_{6C} sin\theta_6\left(sin\theta_2 cos\theta_6+cos\theta_2 cos\theta_{345} sin\theta_6\right)\\+l_{6C} cos\theta_6\left(sin\theta_2 sin\theta_6-cos\theta_2 cos\theta_{345} cos\theta_6\right)\\+l_{6C}\cos^2\theta_6\left\{\left(cos\theta_1-sin\theta_1\right)sin\theta_2 sin\theta_{345}+\left(cos\theta_1+sin\theta_1\right)cos\theta_{345}\right\}\\\times\left\{\left(sin\theta_1+cos\theta_1\right)sin\theta_2 sin\theta_{345}+cos\theta_2 sin\theta_{345}+\left(sin\theta_1-cos\theta_1\right)cos\theta_{345}\right\}\end{bmatrix}$$

$$c_{112}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial d_{21}}{\partial q_1}+\frac{\partial d_{21}}{\partial q_1}-\frac{\partial d_{11}}{\partial q_2}\right\}=\frac{\partial d_{12}}{\partial q_1}-\frac{1}{2}\frac{\partial d_{11}}{\partial q_2}$$
$$=-m_3{l_{3C}}^2 sin\theta_2 cos\theta_2\cos^2\theta_3-m_4 sin\theta_2 cos\theta_2\left(l_3 cos\theta_3+l_{4C} cos\theta_{34}\right)^2$$
$$-m_6\begin{bmatrix}\left\{cos\theta_2\left(l_3 cos\theta_3+l_4 cos\theta_{34}-l_{6C} cos\theta_{345} cos\theta_6\right)-l_{6C} sin\theta_2 sin\theta_6\right\}\\\times\left\{sin\theta_2\left(l_3 cos\theta_3+l_4 cos\theta_{34}-l_{6C} cos\theta_{345} cos\theta_6\right)+l_{6C} cos\theta_2 sin\theta_6\right\}\end{bmatrix}$$
$$+cos\theta_2 sin\theta_2\left(I_{3x}\cos^2\theta_3+I_{3y}\sin^2\theta_3-I_{3z}\right)$$
$$+cos\theta_2 sin\theta_2\left(I_{4x}\cos^2\theta_{34}+I_{4y}\sin^2\theta_{34}-I_{4z}\right)$$
$$-I_{6x}\left(sin\theta_2 sin\theta_6-cos\theta_2 cos\theta_{345} cos\theta_6\right)\left(cos\theta_2 sin\theta_6+sin\theta_2 cos\theta_{345} cos\theta_6\right)$$
$$-I_{6y}\left(sin\theta_2 cos\theta_6+cos\theta_2 cos\theta_{345} sin\theta_6\right)\left(cos\theta_2 cos\theta_6-sin\theta_2 cos\theta_{345} sin\theta_6\right)$$
$$-I_{6z} cos\theta_2 sin\theta_2\sin^2\theta_{345}$$

$$c_{222} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial d_{22}}{\partial q_2} + \frac{\partial d_{22}}{\partial q_2} - \frac{\partial d_{22}}{\partial q_2}\right\} = \frac{1}{2}\frac{\partial d_{22}}{\partial q_2} = 0$$

$$c_{332} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial d_{23}}{\partial q_3} + \frac{\partial d_{23}}{\partial q_3} - \frac{\partial d_{33}}{\partial q_2}\right\} = \frac{\partial d_{23}}{\partial q_3} - \frac{1}{2}\frac{\partial d_{33}}{\partial q_2}$$
$$= m_6 l_{6C} sin\theta_6 \left(l_3 cos\theta_3 + l_4 cos\theta_{34} + l_{6C} cos\theta_{345} cos\theta_6\right)$$
$$-cos\theta_{345} cos\theta_6 sin\theta_6 \left(I_{6x} - I_{6y}\right)$$

$$c_{442} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial d_{24}}{\partial q_4} + \frac{\partial d_{24}}{\partial q_4} - \frac{\partial d_{44}}{\partial q_2}\right\} = \frac{\partial d_{24}}{\partial q_4} - \frac{1}{2}\frac{\partial d_{44}}{\partial q_2}$$
$$= -m_6 \begin{bmatrix} \left(l_4 cos\theta_{34} + l_{6C} cos\theta_{345} cos\theta_6\right) \\ \times\left\{l_3 cos\theta_2 cos\theta_3 + l_4 cos\theta_2 cos\theta_{34} - l_{6C}\left(sin\theta_2 sin\theta_6 - cos\theta_2 cos\theta_{345} cos\theta_6\right)\right\} \\ -cos\theta_2 \left(l_4 sin\theta_{34} + l_{6C} sin\theta_{345} cos\theta_6\right)^2 \\ +{l_4}^2 sin\theta_2 cos\theta_2 \cos^2\theta_{34} \\ +{l_{6C}}^2 \left(cos\theta_2 sin\theta_6 + sin\theta_2 cos\theta_{345} cos\theta_6\right)\left(-sin\theta_2 sin\theta_6 + cos\theta_2 cos\theta_{345} cos\theta_6\right) \\ +l_4 l_{6C} cos\theta_{34}\left(2cos\theta_2 sin\theta_2 cos\theta_{345} cos\theta_6 - \sin^2\theta_2 sin\theta_6 + \cos^2\theta_2 sin\theta_6\right) \end{bmatrix}$$
$$-cos\theta_{345} cos\theta_6 sin\theta_6 \left(I_{6x} - I_{6y}\right)$$

$$c_{552} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial d_{25}}{\partial q_5} + \frac{\partial d_{25}}{\partial q_5} - \frac{\partial d_{55}}{\partial q_2}\right\} = \frac{\partial d_{25}}{\partial q_5} - \frac{1}{2}\frac{\partial d_{55}}{\partial q_2}$$
$$= -m_6 l_{6C} sin\theta_{345} cos\theta_6 \left(l_3 cos\theta_3 + l_4 cos\theta_{34} + 2l_{6C} cos\theta_{345} cos\theta_6\right)$$
$$+cos\theta_{345} cos\theta_6 sin\theta_6 \left(I_{6x} + I_{6y}\right)$$

$$c_{662} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial d_{26}}{\partial q_6} + \frac{\partial d_{26}}{\partial q_6} - \frac{\partial d_{66}}{\partial q_2}\right\} = \frac{\partial d_{26}}{\partial q_6} - \frac{1}{2}\frac{\partial d_{66}}{\partial q_2}$$
$$= m_6 {l_{6C}}^2 \begin{bmatrix} sin\theta_{345}\left(\cos^2\theta_6 - \sin^2\theta_6\right) \\ -sin\theta_{345} \cos^2\theta_6 \left\{\left(sin\theta_1 + cos\theta_1\right)cos\theta_2 - sin\theta_2\right\} \\ \times\left[\left\{\left(sin\theta_1 + cos\theta_1\right)sin\theta_2 + cos\theta_2\right\} sin\theta_{345} + \left(sin\theta_1 - cos\theta_1\right)cos\theta_{345}\right] \end{bmatrix}$$

$$c_{113} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial d_{31}}{\partial q_1} + \frac{\partial d_{31}}{\partial q_1} - \frac{\partial d_{11}}{\partial q_3}\right\} = \frac{\partial d_{13}}{\partial q_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial d_{11}}{\partial q_3}$$

$$= -m_3 {l_{3C}}^2 \cos^2\theta_2 cos\theta_3 sin\theta_3$$

$$-m_4 \cos^2\theta_2 \left(l_3 sin\theta_3 + l_{4C} sin\theta_{34}\right)\left(l_3 cos\theta_3 + l_{4C} cos\theta_{34}\right)$$

$$-m_6 \begin{bmatrix} \left(l_3 sin\theta_3 + l_4 sin\theta_{34} + l_{6C} sin\theta_{345} cos\theta_6\right)\left(l_3 cos\theta_3 + l_4 cos\theta_{34} + l_{6C} cos\theta_{345} cos\theta_6\right) \\ -sin\theta_2 \left(l_3 sin\theta_3 + l_4 sin\theta_{34} - l_{6C} sin\theta_{345} cos\theta_6\right) \\ \times\left\{sin\theta_2 \left(l_3 cos\theta_3 + l_4 cos\theta_{34} - l_{6C} cos\theta_{345} cos\theta_6\right) + l_{6C} cos\theta_2 sin\theta_6\right\} \end{bmatrix}$$

$$+\cos^2\theta_2 cos\theta_3 sin\theta_3 \left(I_{3x} - I_{3y}\right) + \cos^2\theta_2 cos\theta_{34} sin\theta_{34} \left(I_{4x} - I_{4y}\right)$$

$$-I_{6x} cos\theta_2 sin\theta_{345} cos\theta_6 \left(sin\theta_2 sin\theta_6 - cos\theta_2 cos\theta_{345} cos\theta_6\right)$$

$$+I_{6y} cos\theta_2 sin\theta_{345} sin\theta_6 \left(sin\theta_2 cos\theta_6 + cos\theta_2 cos\theta_{345} sin\theta_6\right)$$

$$-I_{6z} \cos^2\theta_2 cos\theta_{345} sin\theta_{345}$$

$$c_{223} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial d_{32}}{\partial q_2} + \frac{\partial d_{32}}{\partial q_2} - \frac{\partial d_{22}}{\partial q_3}\right\} = \frac{\partial d_{23}}{\partial q_2} - \frac{1}{2}\frac{\partial d_{22}}{\partial q_3}$$

$$= m_3 {l_{3C}}^2 cos\theta_3 sin\theta_3$$

$$+m_4 \sin^2\theta_2 \left(l_3 cos\theta_3 + l_4 cos\theta_{34}\right)\left(l_3 sin\theta_3 + l_4 sin\theta_{34}\right)$$

$$+m_6 \begin{bmatrix} +{l_{6C}}^2 cos\theta_{345} sin\theta_{345} \cos^2\theta_6 \\ +\left(l_3 cos\theta_3 + l_4 cos\theta_{34}\right)\left(l_3 sin\theta_3 + l_4 sin\theta_{34}\right) \\ +l_{6C} cos\theta_6 \left\{sin\theta_{345} \left(l_3 cos\theta_3 + l_4 cos\theta_{34}\right) + cos\theta_{345} \left(l_3 sin\theta_3 + l_4 sin\theta_{34}\right)\right\} \end{bmatrix}$$

$$-sin\theta_3 cos\theta_3 \left(I_{3x} - I_{3y}\right) - sin\theta_{34} cos\theta_{34} \left(I_{4x} - I_{4y}\right)$$

$$-sin\theta_{345} cos\theta_{345} \left(I_{6x} \cos^2\theta_6 + I_{6y} \sin^2\theta_6 - I_{6z}\right)$$

$$c_{333} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial d_{33}}{\partial q_3} + \frac{\partial d_{33}}{\partial q_3} - \frac{\partial d_{33}}{\partial q_3}\right\} = \frac{1}{2}\frac{\partial d_{33}}{\partial q_3} = 0$$

$$c_{443} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial d_{34}}{\partial q_4} + \frac{\partial d_{34}}{\partial q_4} - \frac{\partial d_{44}}{\partial q_3}\right\} = \frac{\partial d_{34}}{\partial q_4} - \frac{1}{2}\frac{\partial d_{44}}{\partial q_3}$$

$$= -m_4 l_3 l_{4C} sin\theta_4$$

$$-m_6 \begin{bmatrix} +{l_4}^2 \cos^2\theta_2 cos\theta_{34} sin\theta_{34} \\ +{l_{6C}}^2 sin\theta_{345} cos\theta_6 \begin{pmatrix} cos\theta_2 sin\theta_6 - sin\theta_2 cos\theta_2 sin\theta_6 \\ -\sin^2\theta_2 cos\theta_{345} cos\theta_6 + cos\theta_{345} cos\theta_6 \end{pmatrix} \\ +l_3 l_4 sin\theta_2 sin\theta_4 + l_3 l_{6C} sin\theta_2 sin\theta_{45} cos\theta_6 \left(2 - cos\theta_3\right) \\ +l_4 l_{6C} \begin{pmatrix} +cos\theta_2 sin\theta_{34} sin\theta_6 \\ +cos\theta_6 \left(cos\theta_{34} sin\theta_{345} + sin\theta_{34} cos\theta_{345}\right) \\ -\sin^2\theta_2 cos\theta_6 \left(sin\theta_{34} cos\theta_{345} + cos\theta_{34} sin\theta_{345}\right) \\ -cos\theta_2 sin\theta_2 sin\theta_{34} sin\theta_6 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$c_{553}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial d_{35}}{\partial q_5}+\frac{\partial d_{35}}{\partial q_5}-\frac{\partial d_{55}}{\partial q_3}\right\}=\frac{\partial d_{35}}{\partial q_5}-\frac{1}{2}\frac{\partial d_{55}}{\partial q_3}$$
$$=m_6 l_{6C}{}^2 cos\theta_{345}cos\theta_6\left(sin\theta_6+sin\theta_{345}cos\theta_6\right)$$

$$c_{663}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial d_{36}}{\partial q_6}+\frac{\partial d_{36}}{\partial q_6}-\frac{\partial d_{66}}{\partial q_3}\right\}=\frac{\partial d_{36}}{\partial q_6}-\frac{1}{2}\frac{\partial d_{66}}{\partial q_3}$$
$$=m_6 l_{6C}\begin{bmatrix}-sin\theta_6\left(l_3cos\theta_{45}+l_4cos\theta_5+2l_{6C}cos\theta_6\right)\\ -l_{6C}\cos^2\theta_6\left[\left\{\left(sin\theta_1+cos\theta_1\right)sin\theta_2+cos\theta_2\right\}cos\theta_{345}-\left(sin\theta_1-cos\theta_1\right)sin\theta_{345}\right]\\ \times\left[\left\{\left(sin\theta_1+cos\theta_1\right)sin\theta_2+cos\theta_2\right\}sin\theta_{345}+\left(sin\theta_1-cos\theta_1\right)cos\theta_{345}\right]\end{bmatrix}$$

$$c_{114}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial d_{41}}{\partial q_1}+\frac{\partial d_{41}}{\partial q_1}-\frac{\partial d_{11}}{\partial q_4}\right\}=\frac{\partial d_{14}}{\partial q_1}-\frac{1}{2}\frac{\partial d_{11}}{\partial q_4}$$
$$=-m_4\left\{l_{4C}cos\theta_{34}\left(l_3sin\theta_3+l_{4C}sin\theta_{34}\right)-l_{4C}sin\theta_{34}\sin^2\theta_2\left(l_3cos\theta_3+l_{4C}cos\theta_{34}\right)\right\}$$
$$-m_6\begin{bmatrix}\left(l_3sin\theta_3+l_4sin\theta_{34}+l_{6C}sin\theta_{345}cos\theta_6\right)\left(l_4cos\theta_{34}+l_{6C}cos\theta_{345}cos\theta_6\right)\\ -sin\theta_2\left(l_4sin\theta_{34}-l_{6C}sin\theta_{345}cos\theta_6\right)\\ \times\left\{sin\theta_2\left(l_3cos\theta_3+l_4cos\theta_{34}-l_{6C}cos\theta_{345}cos\theta_6\right)+l_{6C}cos\theta_2sin\theta_6\right\}\end{bmatrix}$$
$$+\cos^2\theta_2 cos\theta_{34}sin\theta_{34}\left(I_{4x}-I_{4y}\right)$$
$$-cos\theta_2 sin\theta_{345}\begin{Bmatrix}I_{6x}cos\theta_6\left(sin\theta_2sin\theta_6-cos\theta_2cos\theta_{345}cos\theta_6\right)\\ -I_{6y}sin\theta_6\left(sin\theta_2cos\theta_6+cos\theta_2cos\theta_{345}sin\theta_6\right)+I_{6z}cos\theta_2cos\theta_{345}\end{Bmatrix}$$

$$c_{224}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial d_{42}}{\partial q_2}+\frac{\partial d_{42}}{\partial q_2}-\frac{\partial d_{22}}{\partial q_4}\right\}=\frac{\partial d_{24}}{\partial q_2}-\frac{1}{2}\frac{\partial d_{22}}{\partial q_4}$$
$$=m_4 l_4 sin\theta_{34}\sin^2\theta_2\left(l_3cos\theta_3+l_4cos\theta_{34}\right)$$
$$+m_6\begin{bmatrix}\left(l_4sin\theta_{34}+l_{6C}sin\theta_{345}cos\theta_6\right)\\ \times\left\{\left(l_3cos\theta_3+l_4cos\theta_{34}\right)\left(sin\theta_2+1\right)+l_{6C}\left(cos\theta_2sin\theta_6+sin\theta_2cos\theta_{345}cos\theta_6\right)\right\}\\ +l_4l_{6C}sin\theta_{34}cos\theta_{345}cos\theta_6+l_{6C}{}^2cos\theta_{345}sin\theta_{345}\cos^2\theta_6\end{bmatrix}$$
$$-cos\theta_{34}sin\theta_{34}\left(I_{4x}-I_{4y}\right)-cos\theta_{345}sin\theta_{345}\left(I_{6x}\cos^2\theta_6+I_{6y}\sin^2\theta_6-I_{6z}\right)$$

$$c_{334}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial d_{43}}{\partial q_3}+\frac{\partial d_{43}}{\partial q_3}-\frac{\partial d_{33}}{\partial q_4}\right\}=\frac{\partial d_{34}}{\partial q_3}-\frac{1}{2}\frac{\partial d_{33}}{\partial q_4}$$
$$=m_4 l_3 l_{4C}sin\theta_4$$
$$-m_6\begin{Bmatrix}l_{6C}{}^2cos\theta_2sin\theta_{345}cos\theta_6sin\theta_6\\ -l_3l_4sin\theta_4+l_4l_{6C}cos\theta_2sin\theta_{34}sin\theta_6\\ l_3l_{6C}\left(cos\theta_2sin\theta_3sin\theta_6-sin\theta_2sin\theta_3cos\theta_{45}cos\theta_6-sin\theta_{45}cos\theta_6\right)\end{Bmatrix}$$

$$c_{444}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial d_{44}}{\partial q_4}+\frac{\partial d_{44}}{\partial q_4}-\frac{\partial d_{44}}{\partial q_4}\right\}=\frac{1}{2}\frac{\partial d_{44}}{\partial q_4}$$

$$=m_6\begin{bmatrix}\\ +l_4{}^2 cos\theta_{34}sin\theta_{34}\cos^2\theta_2\\ +l_{6C}{}^2 sin\theta_{345}cos\theta_6\left\{cos\theta_{345}cos\theta_6-sin\theta_2\left(cos\theta_2 sin\theta_6+sin\theta_2 cos\theta_{345}cos\theta_6\right)\right\}\\ +l_4 l_{6C}\begin{Bmatrix}cos\theta_6\left(cos\theta_{34}sin\theta_{345}+sin\theta_{34}cos\theta_{345}\right)\\ -\sin^2\theta_2 cos\theta_6\left(sin\theta_{34}cos\theta_{345}+cos\theta_{34}sin\theta_{345}\right)-cos\theta_2 sin\theta_2 sin\theta_{34}sin\theta_6\end{Bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$c_{554}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial d_{45}}{\partial q_5}+\frac{\partial d_{45}}{\partial q_5}-\frac{\partial d_{55}}{\partial q_4}\right\}=\frac{\partial d_{45}}{\partial q_5}-\frac{1}{2}\frac{\partial d_{55}}{\partial q_4}$$

$$=m_6 l_{6C}\begin{Bmatrix}cos\theta_2 sin\theta_{345}cos\theta_6\left(l_4 sin\theta_{34}+l_{6C}sin\theta_{345}cos\theta_6\right)\\ +l_{6C}cos\theta_{345}cos\theta_6\left(sin\theta_2 sin\theta_6-cos\theta_2 cos\theta_{345}cos\theta_6+sin\theta_{345}cos\theta_6\right)\end{Bmatrix}$$

$$c_{664}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial d_{46}}{\partial q_6}+\frac{\partial d_{46}}{\partial q_6}-\frac{\partial d_{66}}{\partial q_4}\right\}=\frac{\partial d_{46}}{\partial q_6}-\frac{1}{2}\frac{\partial d_{66}}{\partial q_4}$$

$$=m_6 l_{6C}\begin{bmatrix}-l_4 sin\theta_2 cos\theta_5 sin\theta_6\\ -l_{6C}\begin{Bmatrix}2sin\theta_2 cos\theta_6 sin\theta_6+cos\theta_2 cos\theta_{345}\left(\sin^2\theta_6-\cos^2\theta_6\right)\\ +\cos^2\theta_6\left[\left\{\left(sin\theta_1+cos\theta_1\right)sin\theta_2+cos\theta_2\right\}sin\theta_{345}+\left(sin\theta_1-cos\theta_1\right)cos\theta_{345}\right]\\ \times\left[\left\{\left(sin\theta_1+cos\theta_1\right)sin\theta_2+cos\theta_2\right\}cos\theta_{345}-\left(sin\theta_1-cos\theta_1\right)sin\theta_{345}\right]\end{Bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$c_{115}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial d_{51}}{\partial q_1}+\frac{\partial d_{51}}{\partial q_1}-\frac{\partial d_{11}}{\partial q_5}\right\}=\frac{\partial d_{15}}{\partial q_1}-\frac{1}{2}\frac{\partial d_{11}}{\partial q_5}$$

$$=m_6 l_{6C}cos\theta_6\begin{bmatrix}cos\theta_{345}\left(l_3 sin\theta_3+l_4 sin\theta_{34}+l_{6C}sin\theta_{345}cos\theta_6\right)\\ +sin\theta_2 sin\theta_{345}\left\{sin\theta_2\left(l_3 cos\theta_3+l_4 cos\theta_{34}-l_{6C}cos\theta_{345}cos\theta_6\right)+l_{6C}cos\theta_2 sin\theta_6\right\}\end{bmatrix}$$

$$-cos\theta_2 sin\theta_{345}\begin{Bmatrix}I_{6x}cos\theta_6\left(sin\theta_2 sin\theta_6-cos\theta_2 cos\theta_{345}cos\theta_6\right)\\ -I_{6y}sin\theta_6\left(sin\theta_2 cos\theta_6+cos\theta_2 cos\theta_{345}sin\theta_6\right)\\ +I_{6z}cos\theta_2 cos\theta_{345}\end{Bmatrix}$$

$$c_{225}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial d_{52}}{\partial q_2}+\frac{\partial d_{52}}{\partial q_2}-\frac{\partial d_{22}}{\partial q_5}\right\}=\frac{\partial d_{25}}{\partial q_2}-\frac{1}{2}\frac{\partial d_{22}}{\partial q_5}$$

$$=m_6 l_{6C}sin\theta_{345}cos\theta_6\left(l_3 cos\theta_3+l_4 cos\theta_{345}+l_{6C}cos\theta_{345}cos\theta_6\right)$$

$$-cos\theta_{345}sin\theta_{345}\left(I_{6x}\cos^2\theta_6+I_{6y}\sin^2\theta_6-I_{6z}\right)$$

$$c_{335}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial d_{53}}{\partial q_3}+\frac{\partial d_{53}}{\partial q_3}-\frac{\partial d_{33}}{\partial q_5}\right\}=\frac{\partial d_{35}}{\partial q_3}-\frac{1}{2}\frac{\partial d_{33}}{\partial q_5}$$

$$=m_6 l_{6C}\begin{Bmatrix} l_3\left(cos\theta_3 sin\theta_6+sin\theta_{45}cos\theta_6\right)+l_4\left(cos\theta_{34}sin\theta_6+sin\theta_5 cos\theta_6\right)\\ +l_{6C}cos\theta_{345}cos\theta_6 sin\theta_6 \end{Bmatrix}$$

$$c_{445}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial d_{54}}{\partial q_4}+\frac{\partial d_{54}}{\partial q_4}-\frac{\partial d_{44}}{\partial q_5}\right\}=\frac{\partial d_{45}}{\partial q_4}-\frac{1}{2}\frac{\partial d_{44}}{\partial q_5}$$

$$=m_6 l_{6C}\begin{Bmatrix} cos\theta_2 sin\theta_{345}cos\theta_6\left(l_4 sin\theta_{34}+l_{6C}sin\theta_{345}cos\theta_6\right)\\ -\left(sin\theta_2 sin\theta_6-cos\theta_2 cos\theta_{345}cos\theta_6\right)\left(l_4 cos\theta_{34}+l_{6C}cos\theta_{345}cos\theta_6\right)\\ +l_{6C}\begin{Bmatrix} sin\theta_2 sin\theta_{345}cos\theta_6\left(cos\theta_2 sin\theta_6+sin\theta_2 cos\theta_{345}cos\theta_6\right)\\ -sin\theta_{345}cos\theta_{345}\cos^2\theta_6 \end{Bmatrix}\\ -l_4\left(sin\theta_{34}cos\theta_{345}cos\theta_6-\sin^2\theta_2 cos\theta_{34}sin\theta_{345}cos\theta_6\right) \end{Bmatrix}$$

$$c_{555}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial d_{55}}{\partial q_5}+\frac{\partial d_{55}}{\partial q_5}-\frac{\partial d_{55}}{\partial q_5}\right\}=\frac{1}{2}\frac{\partial d_{55}}{\partial q_5}=0$$

$$c_{665}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial d_{56}}{\partial q_6}+\frac{\partial d_{56}}{\partial q_6}-\frac{\partial d_{66}}{\partial q_5}\right\}=\frac{\partial d_{56}}{\partial q_6}-\frac{1}{2}\frac{\partial d_{66}}{\partial q_5}$$

$$=m_6 {l_{6C}}^2\cos^2\theta_6\begin{bmatrix} sin\theta_{345}\\ -\left[\left\{\left(sin\theta_1+cos\theta_1\right)sin\theta_2+cos\theta_2\right\}sin\theta_{345}+\left(sin\theta_1-cos\theta_1\right)cos\theta_{345}\right]\\ \times\left[\left\{\left(sin\theta_1+cos\theta_1\right)sin\theta_2+cos\theta_2\right\}cos\theta_{345}-\left(sin\theta_1-cos\theta_1\right)sin\theta_{345}\right] \end{bmatrix}$$

$$c_{116}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial d_{61}}{\partial q_1}+\frac{\partial d_{61}}{\partial q_1}-\frac{\partial d_{11}}{\partial q_6}\right\}=\frac{\partial d_{16}}{\partial q_1}-\frac{1}{2}\frac{\partial d_{11}}{\partial q_6}$$

$$=m_6 l_{6C}\begin{bmatrix} sin\theta_{345}sin\theta_6\left(l_3 sin\theta_3+l_4 sin\theta_{34}+l_{6C}sin\theta_{345}cos\theta_6\right)\\ -\left(sin\theta_2 cos\theta_{345}sin\theta_6+cos\theta_2 cos\theta_6\right)\\ \times\left\{sin\theta_2\left(l_3 cos\theta_3+l_4 cos\theta_{34}-l_{6C}cos\theta_{345}cos\theta_6\right)+l_{6C}cos\theta_2 sin\theta_6\right\} \end{bmatrix}$$

$$-I_{6x}\left(sin\theta_2 sin\theta_6-cos\theta_2 cos\theta_{345}cos\theta_6\right)\left(sin\theta_2 cos\theta_6+cos\theta_2 cos\theta_{345}sin\theta_6\right)$$

$$+I_{6y}\left(sin\theta_2 cos\theta_6+cos\theta_2 cos\theta_{345}sin\theta_6\right)\left(sin\theta_2 sin\theta_6-cos\theta_2 cos\theta_{345}cos\theta_6\right)$$

$$c_{226}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial d_{62}}{\partial q_2}+\frac{\partial d_{62}}{\partial q_2}-\frac{\partial d_{22}}{\partial q_6}\right\}=\frac{\partial d_{26}}{\partial q_2}-\frac{1}{2}\frac{\partial d_{22}}{\partial q_6}$$

$$=m_6 l_{6C}\left\{cos\theta_{345}sin\theta_6\left(l_3 cos\theta_3+l_4 cos\theta_{34}\right)-l_{6C}\sin^2\theta_{345}cos\theta_6 sin\theta_6\right\}$$

$$+cos\theta_6 sin\theta_6\left(I_{6x}\sin^2\theta_{345}-I_{6y}\sin^2\theta_{345}\right)$$

$$c_{336} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial d_{63}}{\partial q_3} + \frac{\partial d_{63}}{\partial q_3} - \frac{\partial d_{33}}{\partial q_6}\right\} = \frac{\partial d_{36}}{\partial q_3} - \frac{1}{2}\frac{\partial d_{33}}{\partial q_6}$$

$$= m_6\left\{{l_{6C}}^2 cos\theta_6 sin\theta_6 + l_3 l_{6C} cos\theta_{45} sin\theta_6 + l_4 l_{6C} cos\theta_5 sin\theta_6\right\}$$

$$-cos\theta_6 sin\theta_6\left(I_{6x} - I_{6y}\right)$$

$$c_{446} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial d_{64}}{\partial q_4} + \frac{\partial d_{64}}{\partial q_4} - \frac{\partial d_{44}}{\partial q_6}\right\} = \frac{\partial d_{46}}{\partial q_4} - \frac{1}{2}\frac{\partial d_{44}}{\partial q_6}$$

$$= m_6\left[\begin{array}{l} {l_{6C}}^2\left\{\begin{array}{l} cos\theta_6 sin\theta_6\left(\sin^2\theta_{345} - cos\theta_2 sin\theta_{345}\right) \\ -\left(cos\theta_2 sin\theta_6 + sin\theta_2 cos\theta_{345} cos\theta_6\right)\left(cos\theta_2 cos\theta_6 - sin\theta_2 cos\theta_{345} sin\theta_6\right)\end{array}\right\} \\ +l_4 l_{6C}\left(sin\theta_{34} sin\theta_{345} sin\theta_6 + \sin^2\theta_2 cos\theta_{34} cos\theta_{345} sin\theta_6 - cos\theta_2 sin\theta_2 cos\theta_{34} cos\theta_6\right)\end{array}\right]$$

$$-cos\theta_6 sin\theta_6\left(I_{6x} - I_{6y}\right)$$

$$c_{556} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial d_{65}}{\partial q_5} + \frac{\partial d_{65}}{\partial q_5} - \frac{\partial d_{55}}{\partial q_6}\right\} = \frac{\partial d_{56}}{\partial q_6} - \frac{1}{2}\frac{\partial d_{55}}{\partial q_6}$$

$$= m_6 {l_{6C}}^2 cos\theta_6 sin\theta_6\left(\cos\theta_6 sin\theta_6\left(cos\theta_{345} + \sin^2\theta_{345}\right) - cos\theta_6 sin\theta_6\left(I_{6x} - I_{6y}\right)\right)$$

$$c_{666} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial d_{66}}{\partial q_6} + \frac{\partial d_{66}}{\partial q_6} - \frac{\partial d_{66}}{\partial q_6}\right\} = \frac{1}{2}\frac{\partial d_{66}}{\partial q_6}$$

$$= -m_6 {l_{6C}}^2 cos\theta_6 sin\theta_6\left[\left\{\left(sin\theta_1 + cos\theta_1\right)sin\theta_2 + cos\theta_2\right\}sin\theta_{345} + \left(sin\theta_1 - cos\theta_1\right)cos\theta_{345}\right]^2$$

7 SERBESTLİK DERECELİ SİSTEMİN DİNAMİK DENKLEMLERİ

Lagrange

$$\begin{cases} x_i = x_i(q_1, q_2, \ldots, q_s) \\ y_i = y_i(q_1, q_2, \ldots, q_s) \\ z_i = z_i(q_1, q_2, \ldots, q_s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{x_i} = m_i \ddot{x}_i \\ F_{y_i} = m_i \ddot{y}_i \\ F_{z_i} = m_i \ddot{z}_i \end{cases}$$

$$F_i = \left[F_{x_i}, F_{y_i}, F_{z_i} \right]^T$$

D'Alembert

$$\sum_{i=1}^{N_m} m_i \left(\ddot{x}_i \partial x_i + \ddot{y}_i \partial y_i + \ddot{z}_i \partial z_i \right) = \sum_{i=1}^{N_m} \left(F_{x_i} \partial x_i + F_{y_i} \partial y_i + F_{z_i} \partial z_i \right)$$

$$\partial x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \partial q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \partial q_2 + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial q_s} \partial q_s$$

$$\partial q_i = 0, \ i = 1$$

$$\partial W_{q_1} = \sum_{i=1}^{N_m} m_i \left(\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_1} + \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \right) \partial q_1 = \sum_{i=1}^{N_m} \left(F_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + F_{y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_1} + F_{z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \right) \partial q_1$$

$$\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_1} \right) - \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_1} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \left(\dot{x}_i^2 / 2 \right)}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial \left(\dot{x}_i^2 / 2 \right)}{\partial q_1}$$

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \sum_{i=0}^{N_m} \frac{m_i}{2} \left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_1} \sum_{i=0}^{N_m} \frac{m_i}{2} \left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2 \right) \right\} \partial q_1$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = F_{q_r}, \quad r = 1, 2, \ldots s$$

$$\partial W_{q_r} = F_{q_r} \partial q_r$$

$A(q)\ddot{q} = b(q,\dot{q},F) + M$ şeklinde belirtilen dinamik formdaki $A(q)$, $b(q,\dot{q},F)$ ve M matrislerinin elemanları aşağıdaki gibidir.

$A(q)$:

$$A_{11} = m_0 + 2m_1 + 2m_2$$

$$A_{12} = 0$$

$$A_{13} = (-2m_1 r_0 - 2m_2 r_0)\cos(\alpha) + (-l_1 m_2 - m_1 r_1)\cos(\alpha - \beta_L) - l_1 m_2 \cos(\alpha - \beta_R) - m_1 r_1 \cos(\alpha - \beta_R) - m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) - m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R)$$

$$A_{14} = (l_1 m_2 + m_1 r_1)\cos(\alpha - \beta_L) + m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L)$$

$$A_{15} = (l_1 m_2 + m_1 r_1)\cos(\alpha - \beta_R) + m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R)$$

$$A_{16} = -m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L)$$

$$A_{17} = -m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R)$$

$$A_{21} = 0$$

$$A_{22} = m_0 + 2m_1 + 2m_2$$

$$A_{23} = (2m_1 r_0 + 2m_2 r_0)\sin(\alpha) + (l_1 m_2 + m_1 r_1)\sin(\alpha - \beta_L) + l_1 m_2 \sin(\alpha - \beta_R) + m_1 r_1 \sin(\alpha - \beta_R) + m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) + m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R)$$

$$A_{24} = (-l_1 m_2 - m_1 r_1)\sin(\alpha - \beta_L) - m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L)$$

$$A_{25} = (-l_1 m_2 - m_1 r_1)\sin(\alpha - \beta_R) - m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R)$$

$$A_{26} = m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L)$$

$$A_{27} = m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R)$$

$$
\begin{aligned}
A_{31} &= \left(-2m_1r_0 - 2m_2r_0\right)\cos\left(\alpha\right) + \left(-l_1m_2 - m_1r_1\right)\cos\left(\alpha - \beta_L\right) - l_1m_2\cos\left(\alpha - \beta_R\right) \\
&\quad -m_1r_1\cos\left(\alpha - \beta_R\right) - m_2r_2\cos\left(\alpha - \beta_L + \gamma_L\right) - m_2r_2\cos\left(\alpha - \beta_R + \gamma_R\right) \\
A_{32} &= \left(2m_1r_0 + 2m_2r_0\right)\sin\left(\alpha\right) + \left(l_1m_2 + m_1r_1\right)\sin\left(\alpha - \beta_L\right) + l_1m_2\sin\left(\alpha - \beta_R\right) \\
&\quad +m_1r_1\sin\left(\alpha - \beta_R\right) + m_2r_2\sin\left(\alpha - \beta_L + \gamma_L\right) + m_2r_2\sin\left(\alpha - \beta_R + \gamma_R\right) \\
A_{33} &= 2l_1^2m_2 + 2m_1r_0^2 + 2m_2r_0^2 + 2m_1r_1^2 + 2m_2r_2^2\left(2l_1m_2r_0 + 2m_1r_0r_1\right)\cos\left(\beta_L\right) \\
&\quad +\left(2l_1m_2r_0 + 2m_1r_0r_1\right)\cos\left(\beta_R\right) + 2m_2r_0r_2\cos\left(\beta_L - \gamma_L\right) + 2l_1m_2r_2\cos\left(\gamma_L\right) \\
&\quad +2m_2r_0r_2\cos\left(\beta_R - \gamma_R\right) + 2l_1m_2r_2\cos\left(\gamma_R\right) \\
A_{34} &= -l_1^2m_2 - m_1r_1^2 - m_2r_2^2 + \left(-l_1m_2r_0 - m_1r_0r_1\right)\cos\left(\beta_L\right) - m_2r_0r_2\cos\left(\beta_L - \gamma_L\right) \\
&\quad -2l_1m_2r_2\cos\left(\gamma_L\right) \\
A_{35} &= -l_1^2m_2 - m_1r_1^2 - m_2r_2^2 + \left(-l_1m_2r_0 - m_1r_0r_1\right)\cos\left(\beta_R\right) - m_2r_0r_2\cos\left(\beta_R - \gamma_R\right) \\
&\quad -2l_1m_2r_2\cos\left(\gamma_R\right) \\
A_{36} &= m_2r_2\left(r_2 + r_0\cos\left(\beta_L - \gamma_L\right) + l_1\cos\left(\gamma_L\right)\right) \\
A_{37} &= m_2r_2\left(r_2 + r_0\cos\left(\beta_R - \gamma_R\right) + l_1\cos\left(\gamma_R\right)\right) \\
A_{41} &= \left(l_1m_2 + m_1r_1\right)\cos\left(\alpha - \beta_L\right) + m_2r_2\cos\left(\alpha - \beta_L + \gamma_L\right) \\
A_{42} &= \left(-l_1m_2 - m_1r_1\right)\sin\left(\alpha - \beta_L\right) - m_2r_2\sin\left(\alpha - \beta_L + \gamma_L\right) \\
A_{43} &= -l_1^2m_2 - m_1r_1^2 - m_2r_2^2 + r_0\left(-l_1m_2 - m_1r_1\right)\cos\left(\beta_L\right) \\
&\quad -m_2r_0r_2\cos\left(\beta_L - \gamma_L\right) - 2l_1m_2r_2\cos\left(\gamma_L\right) \\
A_{44} &= l_1^2m_2 + m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + 2l_1m_2r_2\cos\left(\gamma_L\right) \\
A_{45} &= 0 \\
A_{46} &= m_2r_2\left(-r_2 - l_1\cos\left(\gamma_L\right)\right) \\
A_{47} &= 0 \\
A_{51} &= \left(l_1m_2 + m_1r_1\right)\cos\left(\alpha - \beta_R\right) + m_2r_2\cos\left(\alpha - \beta_R + \gamma_R\right) \\
A_{52} &= \left(-l_1m_2 - m_1r_1\right)\sin\left(\alpha - \beta_R\right) - m_2r_2\sin\left(\alpha - \beta_R + \gamma_R\right) \\
A_{53} &= -l_1^2m_2 - m_1r_1^2 - m_2r_2^2 + r_0\left(-l_1m_2 - m_1r_1\right)\cos\left(\beta_R\right) \\
&\quad -m_2r_0r_2\cos\left(\beta_R - \gamma_R\right) - 2l_1m_2r_2\cos\left(\gamma_R\right) \\
A_{54} &= 0 \\
A_{55} &= l_1^2m_2 + m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + 2l_1m_2r_2\cos\left(\gamma_R\right) \\
A_{56} &= 0 \\
A_{57} &= m_2r_2\left(-r_2 - l_1\cos\left(\gamma_R\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$A_{61} = -m_2 r_2 \cos\left(\alpha - \beta_L + \gamma_L\right)$$
$$A_{62} = m_2 r_2 \sin\left(\alpha - \beta_L + \gamma_L\right)$$
$$A_{63} = m_2 r_2 \left(r_2 + r_0 \cos\left(\beta_L - \gamma_L\right) + l_1 \cos\left(\gamma_L\right)\right)$$
$$A_{64} = m_2 r_2 \left(-r_2 - l_1 \cos\left(\gamma_L\right)\right)$$
$$A_{65} = 0$$
$$A_{66} = m_2 r_2^2$$
$$A_{67} = 0$$
$$A_{71} = -m_2 r_2 \cos\left(\alpha - \beta_R + \gamma_R\right)$$
$$A_{72} = m_2 r_2 \sin\left(\alpha - \beta_R + \gamma_R\right)$$
$$A_{73} = m_2 r_2 \left(r_2 + r_0 \cos\left(\beta_R - \gamma_R\right) + l_1 \cos\left(\gamma_R\right)\right)$$
$$A_{74} = 0$$
$$A_{75} = m_2 r_2 \left(-r_2 - l_1 \cos\left(\gamma_R\right)\right)$$
$$A_{76} = 0$$
$$A_{77} = m_2 r_2^2$$

$b(q, \dot{q}, F, M)$:

$$\begin{aligned}
b_1 = {} & -2\dot{\alpha}^2 m_1 r_0 \sin(\alpha) + F_{Rx} - \dot{\beta}_R^2 m_1 r_1 \sin(\alpha - \beta_R) - \dot{\alpha}^2 l_1 m_2 \sin(\alpha - \beta_L) \\
& + F_{Lx} - \dot{\gamma}_L^2 m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) - \dot{\alpha}^2 m_1 r_1 \sin(\alpha - \beta_R) - \dot{\beta}_R^2 l_1 m_2 \sin(\alpha - \beta_R) \\
& - \dot{\alpha}^2 l_1 m_2 \sin(\alpha - \beta_R) - \dot{\gamma}_L^2 m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) - \dot{\beta}_L^2 m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) \\
& - \dot{\beta}_L^2 m_1 r_1 \sin(\alpha - \beta_L) - \dot{\beta}_R^2 m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) - \dot{\alpha}^2 m_1 r_1 \sin(\alpha - \beta_L) \\
& - \dot{\beta}_L^2 l_1 m_2 \sin(\alpha - \beta_L) - \dot{\alpha}^2 m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) - \dot{\alpha}^2 m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) \\
& + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_R l_1 m_2 \sin(\alpha - \beta_R) + 2\dot{\beta}_R \dot{\gamma}_R m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) - 2\dot{\alpha}\dot{\gamma}_R m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) \\
& + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_L m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_L m_1 r_1 \sin(\alpha - \beta_L) + \dot{\alpha}\dot{\beta}_R m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) \\
& + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_L l_1 m_2 \sin(\alpha - \beta_L) - 2\dot{\alpha}^2 m_2 r_0 \sin(\alpha) + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_R m_1 r_1 \sin(\alpha - \beta_R) \\
& + 2\dot{\beta}_L \dot{\gamma}_L m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) - 2\dot{\alpha}\dot{\gamma}_L m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_2 = {} & -\dot{\beta}_L^2 m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) + F_{Ry} - 2gm_2 - \dot{\gamma}_R^2 m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R) \\
& - \dot{\beta}_R^2 m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R) - \dot{\alpha}^2 m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R) - \dot{\gamma}_L^2 m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) \\
& - \dot{\alpha}^2 m_1 r_1 \cos(\alpha - \beta_R) - \dot{\beta}_R^2 m_1 r_1 \cos(\alpha - \beta_R) - \dot{\alpha}^2 (2m_2 + 2m_2) r_0 \cos(\alpha) \\
& - \dot{\alpha}^2 l_1 m_2 \cos(\alpha - \beta_R) - \dot{\beta}_R^2 l_1 m_2 \cos(\alpha - \beta_R) + F_{Ly} - \dot{\alpha}^2 m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) \\
& - 2gm_1 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_R l_1 m_2 \cos(\alpha - \beta_R) + 2\dot{\beta}_R \dot{\gamma}_R m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R) - 2\dot{\alpha}\dot{\gamma}_R m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R) \\
& + \dot{\alpha}\dot{\beta}_R m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R) - 2\dot{\alpha}\dot{\gamma}_L m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) + 2\dot{\beta}_L \dot{\gamma}_L m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) \\
& + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_L m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_R m_1 r_1 \cos(\alpha - \beta_R) \\
& - \left(\dot{a}\dot{\beta}_L \left(-2l_1 m_2 - 2m_1 r_1\right) + \dot{\beta}_L^2 \left(l_1 m_2 + m_1 r_1\right)\right) \cos(\alpha - \beta_L) - gm_0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_3 &= \dot{\gamma}_R^2 l_1 m_2 r_2 \sin(\gamma_R) \ldots\ldots \\
&\quad -(F_{Lx} r_0 + F_{Rx} r_0) \cos(\alpha) - 2\dot{\alpha}\dot{\gamma}_L m_2 r_0 r_2 \sin(\beta_L - \gamma_L) \\
&\quad +2\dot{\beta}_L \dot{\gamma}_L m_2 r_0 r_2 \sin(\beta_L - \gamma_L) + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_L m_2 r_0 r_2 \sin(\beta_L - \gamma_L) \\
&\quad +2\dot{\alpha}\dot{\beta}_R m_1 r_0 r_1 \sin(\beta_R) - 2g m_2 r_0 \sin(\alpha) \\
&\quad +2\dot{\alpha}\dot{\gamma}_R l_1 m_2 r_2 \sin(\gamma_R) + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_R m_2 r_0 r_2 \sin(\beta_R - \gamma_R) \\
&\quad -2\dot{\alpha}\dot{\gamma}_R m_2 r_0 r_2 \sin(\beta_R - \gamma_R) + 2\dot{\alpha}\dot{\gamma}_L l_1 m_2 r_2 \sin(\gamma_L) \\
&\quad -2\dot{\beta}_L \dot{\gamma}_L l_1 m_2 r_2 \sin(\gamma_L) - 2g m_1 r_0 \sin(\alpha) \\
&\quad +2\dot{\alpha}\dot{\beta}_R l_1 m_2 r_0 \sin(\beta_R) + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_L l_1 m_2 r_0 \sin(\beta_L) \\
&\quad +2\dot{\alpha}\dot{\beta}_L m_1 r_0 r_1 \sin(\beta_L) - 2\dot{\beta}_R \dot{\gamma}_R l_1 m_2 r_2 \sin(\gamma_R) \\
&\quad +2\dot{\beta}_R \dot{\gamma}_R m_2 r_0 r_2 \sin(\beta_R - \gamma_R) - F_{Rx} l_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_4 &= F_{Lx} l_1 \cos(\alpha - \beta_L) + F_{Lx} l_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) - F_{Ly} l_1 \sin(\alpha - \beta_L) \\
&\quad +g l_1 m_2 \sin(\alpha - \beta_L) + g m_1 r_1 \sin(\alpha - \beta_L) - \dot{\alpha}^2 l_1 m_2 r_0 \sin(\beta_L) \\
&\quad -\dot{\alpha}^2 m_1 r_0 r_1 \sin(\beta_L) - \dot{\alpha}^2 m_2 r_0 r_2 \sin(\beta_L - \gamma_L) \\
&\quad -2\dot{\alpha}\dot{\gamma}_L l_1 m_2 r_2 \sin(\gamma_L) + 2\dot{\beta}_L \dot{\gamma}_L l_1 m_2 r_2 \sin(\gamma_L) \\
&\quad -\dot{\gamma}_L^2 l_1 m_2 r_2 \sin(\gamma_L) - F_{Ly} l_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) + g m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_5 &= F_{Rx} l_1 \cos(\alpha - \beta_R) + F_{Rx} l_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R) - F_{Ry} l_1 \sin(\alpha - \beta_R) \\
&\quad +g l_1 m_2 \sin(\alpha - \beta_R) + g m_1 r_1 \sin(\alpha - \beta_R) - \dot{\alpha}^2 l_1 m_2 r_0 \sin(\beta_R) \\
&\quad -\dot{\alpha}^2 m_1 r_0 r_1 \sin(\beta_R) - \dot{\alpha}^2 m_2 r_0 r_2 \sin(\beta_R - \gamma_R) \\
&\quad -2\dot{\alpha}\dot{\gamma}_R l_1 m_2 r_2 \sin(\gamma_R) + 2\dot{\beta}_R \dot{\gamma}_R l_1 m_2 r_2 \sin(\gamma_R) \\
&\quad -\dot{\gamma}_R l_1 m_2 r_2 \sin(\gamma_R) - F_{Ry} l_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) + g m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_6 &= -F_{Lx} l_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) + \dot{\alpha}^2 m_2 r_0 r_2 \sin(\beta_L - \gamma_L) \\
&\quad -\dot{\alpha}^2 l_1 m_2 r_2 \sin(\gamma_L) + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_L l_1 m_2 r_2 \sin(\gamma_L) \\
&\quad -\dot{\beta}_L l_1 m_2 r_2 \sin(\gamma_L) + F_{Ly} l_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) - g m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_7 &= -F_{Rx} l_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R) + \dot{\alpha}^2 m_2 r_0 r_2 \sin(\beta_R - \gamma_R) \\
&\quad -\dot{\alpha}^2 l_1 m_2 r_2 \sin(\gamma_R) + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_R l_1 m_2 r_2 \sin(\gamma_R) \\
&\quad -\dot{\beta}_R l_1 m_2 r_2 \sin(\gamma_R) + F_{Ry} l_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) - g m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R)
\end{aligned}
$$

$$
M = [0, 0, 0, M_{L1}, M_{R1}, M_{L2}, M_{R2}]
$$

Ek-D

SİMULASYON PARAMETRELERİ

İkiayaklirobotparametreleri.m

```
% örnekleme zamanı
st = 0.005;

% robotun bağlantı uzunlukları(m)
l0 = 0.8; % gövde
l1 = 0.5; % uyluk
l2 = 0.5; % kaval
% ağırlık merkezinin uzaklıkları (m)
r0 = l0/2; % gövde (kalçadan)
r1 = l1/2; % uyluk (kalçadan)
r2 = l2/2; % kaval (dizden)
% bağlantı ketleleri (kg)
m0 = 5; % gövde
m1 = 2; % uyluk
m2 = 1; % kaval
% bağlantı atalet momentleri (kgm^2)
J0 = 1/12*m0*l0^2;
J1 = 1/12*m1*l1^2;
J2 = 1/12*m2*l2^2;

robot.l = [l0, l1, l2];
robot.r = [r0, r1, r2];
robot.m = [m0, m1, m2];
robot.J = [J0, J1, J2];

% yer çekimi ivmesi (m/s^2)
g = 9.81;

% başlangıç durumları
x00 = 0;        % (m)
y00 = 1.3749;   % (m)
a0  = 0.04;  % (rad)
bl0 = -0.15+0.04;  % (rad)
br0 = 0.1075+0.04;   % (rad)
cl0 = 0.2096-0.04;   % (rad)
cr0 = 0.2016-0.04;   % (rad)

baslangic_durumu.koordinatlar = [x00, y00, a0, bl0, br0, cl0, cr0];
```

```
% bailangıç hızları
px00 = 0.1;  % (m/s)
py00 = -0.05; % (m/s)
pa0  = -0.6; % (rad/s)
pbl0 = -0.6; % (rad/s)
pbr0 = -1; % (rad/s)
pcl0 = 0.6;  % (rad/s)
pcr0 = 0;  % (rad/s)

baslangic_durumu.hizlar = [px00, py00, pa0, pbl0, pbr0, pcl0, pcr0];

% zemin tepkisi başlangıç değerleri
baslangic_durumu.zemin_durumu = [0,1,0,1];

load baslangic_durumu %!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

% zemin şekli
% - satir 1: x-koordinatlari
% - satir 2: y-koordinatlari
zemin_durumu.zemin = [-5:0.1:1000];
zemin_durumu.zemin = [yer_durumu.zemin;zeros(size(yer_durumu.zemin))];

% zemin parametreleri
% - normal yön
zemin_durumu.ky = 10000; % elastic constant
zemin_durumu.by = 500; % damping ratio
% - tangential direction
zemin_durumu.kx = 10000; % elastic constant
zemin_durumu.bx = 500; % damping ratio
% friction coefficients
zemin_durumu.muk = 0.6; % kinetic
zemin_durumu.mus = 1.2; % static

% knee stopper parameters
dizler.kk = 1000; % elastic constant
dizler.bk = 100; % damping ratio

% maximum and minimum knee angles (rad)
dizler.max = 160*pi/180;
dizler.min = 0;
```

pdparametreleri.m

```
load sref2

% başlangıç referansları
ref = [0.04, 0.3261, 0.0314, 0.2199]';

% robot bağlantı uzunlukları
l0 = robot.l(1); % gövde
l1 = robot.l(2); % uyluk
l2 = robot.l(3); % kaval
% mass center locations
r0 = robot.r(1); % gövde (kalçadan)
r1 = robot.r(2); % uyluk (kalçadan)
r2 = robot.r(3); % kaval (dizden)
```

```
% örnekleme zamanı
st = 0.005;

% uyluklar
Pb1=80;%60     % her iki ayak da yerde
Pb2=90;%70     % bir ayak yerde
Pb3=Pb2;
Pb4=2.5;    % iki ayak da havada
% dizler
Pc1=60;%40     % her iki ayak da yerde
Pc2=60;%30     % bir ayak yerde
Pc3=60;%15     % bir ayak yerde
Pc4=2.55;   % iki ayak da havada
% gövde
Ph1=80;%40
Ph2=80;%40
Ph3=Ph2;
Ph4=2.5;

P=[Pb1, Pb2, Pb3, Pb4;     % db
   Pc1, Pc2, Pc3, Pc4;     % cl
   Pc1, Pc3, Pc2, Pc4;     % cr
   Ph1, Ph2, Ph3, Ph4];    % head

% uyluklar
Db1=3;%1      % her iki ayak da yerde
Db2=9;%6      % bir ayak yerde
Db3=Db2;
Db4=0.25;   % % iki ayak da havada
% dizler
Dc1=3;%0.5    % her iki ayak da yerde
Dc2=3;%2      % bir ayak yerde
Dc3=1;%0.1    % bir ayak yerde
Dc4=0.05;   % % iki ayak da havada
% gövde
Dh1=8;%2
Dh2=8.1;%2
Dh3=Dh2;
Dh4=0.4;

D=[Db1, Db2, Db3, Db4;     % db
   Dc1, Dc2, Dc3, Dc4;     % cl
   Dc1, Dc3, Dc2, Dc4;     % cr
   Dh1, Dh2, Dh3, Dh4];    % head
```

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Kenan MÜDERRİSOĞLU

Doğum Tarihi ve Yeri : 31.03.1990 / Bakırköy

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : kenanmuderrisoglu@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Mekatronik Müh.	Yıldız Teknik Üniversitesi	2016
Lisans	Makina Müh.	Yıldız Teknik Üniversitesi	2012
Lise	Fen	Adile Mermerci A.L.	2008

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2016	TÜMOSAN A.Ş.	Kontrol Sistemleri Mühendisi

YAYINLARI

Makale

1. Müderrisoğlu K., Arısoy D.O., Ahan A.O. ve Akdoğan E., (2016). "PID Parameters Prediction Using Neural Network For A Linear Quarter Car Suspension Control", International Journal of Intelligent Systems and Applications in Engineering, 4(1): 20-24.

Bildiri

1. Arısoy D.O., Ahan A.O., Müderrisoğlu K. ve Bayraktar M., (2012). "Static and Dynamic Analysis of Railway Wagon Trailer Bogie in Computer Environment", 1. Uluslararası Raylı Sistemler Mühendisliği Çalıştayı, 11-13 Ekim 2012, Karabük.
2. Ahan A.O., Arısoy D.O., Müderrisoğlu K. ve Bayraktar M., (2013). "Roller Coaster Güzergahında Tanımlanan Noktasal Bir Cismin Dinamik Analizi", Ulusal Makina Teorisi Sempozyumu 12-13 Eylül 2013, Erzurum.
3. Müderrisoğlu K. ve Ömürlü V.E., (2014). "A Comparison between Rigid and Flexible Planar Robot Kinematics", 3rd International Scientific Conference on Engineering "Manufacturing and Advanced Technologies", 18-20 September 2014, Mostar, Bosnia and Herzegovina.
4. Müderrisoğlu K., Arısoy D.O., Ahan A.O., Bayraktar M. ve Güçlü R., (2015). "Raylı Taşıt ve Karayolu Taşıtı Trafiği Etkisi Altındaki Bir Asma Köprünün Dinamik Analizi", Uluslararası Katılımlı 17. Makina Teorisi Sempozyumu, 14-17 Haziran 2015, İzmir.
5. Arısoy D.O., Ahan A.O., Müderrisoğlu K., Bayraktar M. ve Güçlü R., (2015). "Bir Raylı Taşıtta Farklı Koşullar Altında Yolcu Konforu Analizi", Uluslararası Katılımlı 17. Makina Teorisi Sempozyumu, 14-17 Haziran 2015, İzmir.
6. Müderrisoğlu K. ve Yeşildirek A., (2016). "Defining And Controlling Gait Cycle For BIPED Walking in Sagittal Plane", International Conference on Engineering And Natural Science, 24-28 May 2016, Sarajevo, Bosnia and Herzegovina.
7. Ahan A.O., Arısoy D.O., Müderrisoğlu K., Yazıcı H. ve Güçlü R., (2016). "Vibration Control Of A Semi-Trailer Truck For Comfort With An Output Feedback H_∞ Controller", International Conference on Engineering And Natural Science, 24–28 May 2016, Sarajevo, Bosnia and Herzegovina.