T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ-NOKTALI SİNGÜLER SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Gözde BAYAT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Selmahan SELİM

Mayıs, 2019

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ-NOKTALI SİNGÜLER SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Gözde BAYAT tarafından hazırlanan tez çalışması 22.05.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Dr. Öğr. Üyesi Selmahan SELİM
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Dr. Öğr. Üyesi Selmahan SELİM
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Murat SARI
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Dr. Öğr. Üyesi S. Hikmet ÇAĞLAR
Kültür Üniversitesi _____

Danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Selmahan SELİM sorumluluğunda tarafımca hazırlanan İki-Noktalı Singüler Sınır Değer Problemlerinin Sayısal Çözümleri başlıklı çalışmada diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Gözde BAYAT

İmza

Kıymetli aileme

ve

biricik eşime

TEŞEKKÜR

Uygulamalı bilimlerde ortaya çıkan birçok probleme bir adi diferansiyel denklem karşılık getirilerek çeşitli çözümler aranmaktadır. Bu çalışmada adi diferansiyel denklemlerin özel bir türü olan sınır değer problemleri üzerine çalışılmıştır. Çalışma esnasında iki-noktalı singüler sınır değer problemleri esas alınarak bu problemlerin çözümünde sonlu farklar, sonlu elemanlar ve diferansiyel kareleme yöntemleri kullanılarak sayısal sonuçların elde edilmesi ve bulunan sayısal sonuçların analizinin daha iyi yapılması için bilinen analitik çözüm sonuçları ile karşılaştırılması amaçlanmıştır.

Öncelikle tez danışmanlığımı üstlenen, beni bu çalışmaya yönlendiren, her konuda desteğini esirgemeyen ve bu çalışmanın hazırlanmasında sonsuz emeği geçen çok değerli tez danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Selmahan SELİM'e en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışmalarım sırasında her konuda tecrübelerinden yararlandığım, bana özveriyle yardımcı olan sayın Prof. Dr. Murat SARI'ya teşekkürü borç bilirim.

Bu tez sırasında her zaman yanımda olan ve beni her konuda sürekli destekleyen çok değerli annem Taybe ELVER, babam Mehmet Emin ELVER ve sevgili eşim Emre BAYAT'a çok teşekkür ederim.

Gözde BAYAT

İÇİNDEKİLER

KISALTMA LİSTESİ vii
ŞEKİL LİSTESİ viii
TABLO LİSTESİ xi
ÖZET xii
ABSTRACT xiii
GİRİŞ 1
1.1 Literatür Özeti 1
1.2 Tezin Amacı 3
1.3 Hipotez 3
YÖNTEMLER 4
2.1 Sonlu Farklar Yöntemi (SFY) 4
2.2 Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY) 8
2.3 Diferansiyel Kareleme Yöntemi (DKY) 11
2.3.1 Polinom Bazlı Diferansiyel Kareleme Yöntemi (PDKY) 12
2.3.2 Fourier Açılımı Bazlı Diferansiyel Kareleme Yöntemi (FDKY) 13
İKİ-NOKTALI SİNGÜLER SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ 18
3.1 Problem 1'in Sayısal Çözümü ve Karşılaştırılması 19
3.1.1 Sonlu Farklar Yöntemi ile Çözümü 19
3.1.2 Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY) ile Çözümü 29
3.1.3 Diferansiyel Kareleme Yöntemi ile Çözümü 32
3.1.4 Yöntemlerin Karşılaştırılması 38
3.2 Problem 2'nin Sayısal Çözümü ve Karşılaştırılması 44
3.2.1 Sonlu Farklar Yöntemi ile Çözümü 44
3.2.2 Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY) ile Çözümü 51
3.2.3 Diferansiyel Kareleme Yöntemi ile Çözümü 54
3.2.4 Yöntemlerin Karşılaştırılması 59
3.3 Problem 3'ün Sayısal Çözümü ve Karşılaştırılması 62
3.3.1 Sonlu Farklar Yöntemi ile Çözümü 63
3.3.2 Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY) ile Çözümü 70
3.3.3 Diferansiyel Kareleme Yöntemi ile Çözümü 72

3.3.4 Yöntemlerin Karşılaştırılması 77
SONUÇ VE ÖNERİLER 82
KAYNAKLAR 83
TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR 85

KISALTMA LİSTESİ

DKY Diferansiyel Kareleme Yöntemi

FDKY Fourier-Açılımı Bazlı Diferansiyel Kareleme Yöntemi

FDK Fourier-Açılımı Bazlı Diferansiyel Kareleme

PDKY Polinom Bazlı Diferansiyel Kareleme Yöntemi

PDK Polinom Bazlı Diferansiyel Kareleme

SEY Sonlu Elemanlar Yöntemi

SFY Sonlu Farklar Yöntemi

SF2 2. Mertebe Sonlu Farklar Yöntemi

SF4 4. Mertebe Sonlu Farklar Yöntemi

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 3.1 $n = 10$ için SF2 hata grafiği 20
Şekil 3.2 $n = 20$ için SF2 hata grafiği 21
Şekil 3.3 $n = 40$ için SF2 hata grafiği 21
Şekil 3.4 Farklı n değerleri için SF2 çözümleri....22
Şekil 3.5 $n = 10$ için SF4 hata grafiği 24
Şekil 3.6 $n = 20$ için SF4 hata grafiği 24
Şekil 3.7 $n = 40$ için SF4 hata grafiği 25
Şekil 3.8 Farklı n değerleri için SF4 çözümleri....25
Şekil 3.9 $n = 10$ için SF4 hata grafiği 27
Şekil 3.10 $n = 30$ için SF4 hata grafiği....27
Şekil 3.11 $n = 50$ için SF4 hata grafiği....28
Şekil 3.12 Farklı n değerleri için SF4 çözümleri....28
Şekil 3.13 $n = 7$ için SEY hata grafiği....30
Şekil 3.14 $n = 20$ için SEY hata grafiği....31
Şekil 3.15 $n = 50$ için SEY hata grafiği....31
Şekil 3.16 Farklı n değerleri için SEY çözümleri....32
Şekil 3.17 $n = 7$ için PDKY hata grafiği....33
Şekil 3.18 $n = 15$ için PDKY hata grafiği....34
Şekil 3.19 $n = 30$ için PDKY hata grafiği....34
Şekil 3.20 Farklı n değerleri için PDKY çözümleri....35
Şekil 3.21 $n = 7$ için FDKY hata grafiği....36
Şekil 3.22 $n = 15$ için FDKY hata grafiği....37
Şekil 3.23 $n = 30$ için FDKY hata grafiği....37
Şekil 3.24 Farklı n değerleri için FDKY çözümleri....38
Şekil 3.25 $n = 7$ için tüm çözümler....39
Şekil 3.26 $n = 7$ için bağıl hata karşılaştırması....40
Şekil 3.27 $n = 15$ için bağıl hata karşılaştırması....40
Şekil 3.28 $n = 30$ için bağıl hata karşılaştırması....41
Şekil 3.29 $n = 7$ için SF2 hata grafiği....46
Şekil 3.30 $n = 11$ için SF2 hata grafiği....46

Şekil 3.31 $n = 15$ için SF2 hata grafiği 47
Şekil 3.32 Farklı n değerleri için SF2 çözümleri 47
Şekil 3.33 $n = 7$ için SF4 hata grafiği 49
Şekil 3.34 $n = 11$ için SF4 hata grafiği 50
Şekil 3.35 $n = 15$ için SF4 hata grafiği 50
Şekil 3.36 Farklı n değerleri için SF4 çözümleri 51
Şekil 3.37 $n = 5$ için SEY hata grafiği 52
Şekil 3.38 $n = 6$ için SEY hata grafiği 53
Şekil 3.39 Farklı n değerleri için SEY çözümleri 53
Şekil 3.40 $n = 7$ için PDKY hata grafiği 55
Şekil 3.41 $n = 15$ için PDKY hata grafiği 55
Şekil 3.42 $n = 30$ için PDKY hata grafiği 56
Şekil 3.43 Farklı n değerleri için PDKY çözümleri 56
Şekil 3.44 $n = 7$ için FDKY hata grafiği 57
Şekil 3.45 $n = 15$ için FDKY hata grafiği 58
Şekil 3.46 $n = 30$ için FDKY hata grafiği 58
Şekil 3.47 Farklı n değerleri için PDKY çözümleri 59
Şekil 3.48 $n = 6$ için tüm çözümler 60
Şekil 3.49 $n = 5$ için bağıl hata karşılaştırması 61
Şekil 3.50 $n = 6$ için bağıl hata karşılaştırması 61
Şekil 3.51 $n = 7$ için SF2 hata grafiği 64
Şekil 3.52 $n = 11$ için SF2 hata grafiği 65
Şekil 3.53 $n = 15$ için SF2 hata grafiği 65
Şekil 3.54 Farklı n değerleri için SF2 çözümleri 66
Şekil 3.55 $n = 7$ için SF4 hata grafiği 68
Şekil 3.56 $n = 9$ için SF4 hata grafiği 68
Şekil 3.57 $n = 11$ için SF4 hata grafiği 69
Şekil 3.58 Farklı n değerleri için SF2 çözümleri 69
Şekil 3.59 $n = 5$ için SEY hata grafiği 70
Şekil 3.60 $n = 6$ için SEY hata grafiği 71
Şekil 3.61 Farklı n değerleri için SEY çözümleri 71
Şekil 3.62 $n = 7$ için PDKY hata grafiği 73

Şekil 3.63 $n = 15$ için PDKY hata grafiği.....73
Şekil 3.64 $n = 20$ için PDKY hata grafiği.....74
Şekil 3.65 Farklı n değerleri için PDKY çözümleri.....74
Şekil 3.66 $n = 7$ için FDKY hata grafiği.....75
Şekil 3.67 $n = 15$ için FDKY hata grafiği.....76
Şekil 3.68 $n = 20$ için FDKY hata grafiği.....76
Şekil 3.69 Farklı n değerleri için FDKY çözümleri.....77
Şekil 3.70 $n = 6$ için tüm çözümler.....78
Şekil 3.71 $n = 5$ için bağıl hata karşılaştırması.....79
Şekil 3.72 $n = 6$ için bağıl hata karşılaştırması.....79

TABLO LİSTESİ

Tablo 2.1 Merkezi fark katsayıları [10]..... 5
Tablo 2.2 İleri Fark Tablosu [10] 6
Tablo 3.1 $n = 7$ için karşılaştırma değerleri.....42
Tablo 3.2 $n = 15$ için karşılaştırma değerleri.....43
Tablo 3.3 $n = 6$ için karşılaştırma değerleri.....62
Tablo 3.4 $n = 6$ için karşılaştırma değerleri.....80

ÖZET

İki-Noktalı Singüler Sınır Değer Problemlerinin Sayısal Çözümleri

Gözde BAYAT

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Selmahan SELİM

Bu tezin amacı, bir boyutlu sınır değer problemlerinin özel bir türü olan iki-noktalı lineer ve lineer olmayan singüler sınır değer problemlerinin sayısal çözümlerini incelemektir. Bu problemlerin sayısal çözümleri için sonlu farklar yöntemi, sonlu elemanlar yöntemi ve diferansiyel kareleme yöntemi kullanılmıştır. Üretilen sonuçlar için mutlak ve bağıl hata analizi yapılmıştır. Ayrıca, söz konusu yöntemlerin birbirlerine göre avantaj ve dezavantajları tartışılmıştır. Çözümler, bizim tarafımızdan üretilen MATLAB kodları kullanılarak hesaplanmaktadır.

Anahtar Kelimeler: İki-noktalı singüler sınır değer problemi, sonlu farklar yöntemi, sonlu elemanlar yöntemi, diferansiyel kareleme yöntemi

ABSTRACT

Numerical Solutions of Two-Point Singular Boundary Value Problems

Gözde BAYAT

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Adviser: Dr. Selmahan SELİM

The aim of this thesis is to investigate numerical solutions of linear and nonlinear singular two-point boundary value problems which are a special type of one dimensional boundary value problems. For numerical solutions of these problems, finite difference method, finite element method and differential quadrature method are used. Discussions through absolute and relative errors analysis are performed for the produced results. Furthermore, the advantages and disadvantages of these methods compared to each other are discussed. The solutions are computed by using MATLAB codes produced by us.

Keywords: Singular two-point boundary value problem, finite difference method, finite element method, differential quadrature method

1
GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Uygulamalı bilimlerde ortaya çıkan birçok probleme bir adi diferansiyel denklem karşılık getirilerek çeşitli çözümler arandığı, diferansiyel denklemler teorisinden bilinir. Bu durum uygulamalı matematik, elektrohidrodinamik, bazı termal patlamalar ve fiziğin gaz dinamiği, nükleer fizik, kimyasal reaksiyonlar, atomik yapılar, atomik hesaplamalar ve doğrusal olmayan eliptik denklemlerin pozitif radyal çözümlerinin incelenmesi, nanoteknoloji gibi birçok dalda adi diferansiyel denklemler için iki-noktalı singüler sınır değer problemleri olarak sıklıkla ortaya çıkar. Çağlar ve arkadaşlarının [1] kaleme aldığı makalede lineer olmayan sınır değer problemleri tanımlanmış ve B-spline fonksiyonları kullanılarak sayısal bir çözüm önerilmiştir. Arqub ve arkadaşlarının [2] yazdığı makalede öncelikle iki-noktalı singüler sınır değer problemleri tanımlanmış ve sonlu farklar yöntemi ile çözümleri incelenmiştir. Pandey [3] tarafından yazılan makalede iki-noktalı singüler sınır değer problemleri ayrıntılı şekilde tanımlanmış ve seçilen örnek problemler sonlu farklar yöntemi kullanarak çözülmüştür. Ayrıca kullanılan yöntemin yakınsaklığı teorem ile açıklanmış ve ispatlanmıştır. Yine Pandey [4] tarafından yazılan makalede düzenli iki-noktalı singüler sınır değer problem sınıfı tanımlanmış ve lineer sınır değer problemlerinin çözümlerinin varlığı ve tekliği ispatlanmıştır. Abukhaled ve arkadaşları [5] tarafından kaleme alınan çalışmada iki-noktalı singüler sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümlerini bulmak için iki sayısal yönteme başvurulmuştur. Birinci yaklaşımda L'Hopital kuralı kullanılırken ikinci yaklaşımda Chebyshev polinomlarından faydalanılmıştır. Verilen örneklerle çalışmanın altı beslenmiştir. Bu çalışmada kullanılan iki-noktalı singüler sınır değer problemlerinin genel tanımları için bu makalelerden faydalanılmıştır.

Çoğu durumda iki-noktalı singüler sınır değer problemlerinin analitik yöntemler ile çözümü pek mümkün değildir. Aslında, karşılaşılan çoğu fiziksel durumda analitik yöntem ile çözülmesi neredeyse imkansızdır. Bu nedenle, bu tür problemler çeşitli

sayısal yöntemlerle çözülmektedir. Bu çalışmada, sonlu farklar yönteminin tarihçesini yazmak için Fadugba ve arkadaşlarının [6] kaleme aldığı çalışmadan faydalanılmıştır. Causon ve Mingham'ın [7] kitabında kısmi diferansiyel denklemler tanımlanmış ve çözümleri için sonlu farklar yönteminin nasıl kullanılacağı açıklanmıştır. Yang'ın [8] çalışmasında sonlu farklar yöntemi detaylı şekilde anlatılmış ve yöntem için örnek MATLAB kodları verilmiştir. Urroz'un [9] kitabında türev için sonlu fark yaklaşımları anlatılmıştır. Fornberg'in [10] çalışmasında sonlu fark formülleri ayrıntılı bir şekilde anlatılmıştır. Bu çalışmada kullanılan sonlu fark formülleri için [10] çalışması detaylıca incelenmiştir ve örnek problemlerin çözümü için [10] çalışmasındaki sonlu fark katsayı tabloları kullanılmıştır. Chapra ve Canale'ın [11] kitabında adi diferansiyel denklemlerin çözümü için birçok yöntem açıklanmıştır. Eliptik ve parabolik denklemlerin çözümü için sonlu farklar yöntemi ayrıntılı şekilde verilmiştir. Bu çalışmada kullanılan sonlu farklar yönteminin daha iyi anlaşılması için kitap dikkatlice incelenmiştir. Reddy'nin [12] kitabı sonlu elemanlar yöntemi için çok önemli bir kaynaktır. Kitapta sonlu elemanlar yöntemi ayrıntılı bir şekilde anlatılmıştır ve çalışmada kullanılan sonlu elemanlar yönteminin anlaşılması ve seçilen örneklere uygulanabilmesi için derinlemesine incelenmiştir. Zienkiewicz'in [13] kitabı sonlu elemanlar yöntemi ile igili bilgileri içermektedir. Bayraktar'ın [14] tezinde sonlu elemanlar yöntemi lineer olmayan sınır değer problemlerine uygulanmıştır. Courant [15] tarafından kaleme alınan çalışmada sonlu elemanlar yönteminin tarihçesi verilmiştir. Sonlu elemanlar yönteminin genel işlem adımları [15] çalışmasında ve [12] kitabında açıklanmıştır. İki-noktalı singüler sınır değer problemlerinin çözümünde kullanılabilecek yöntemlerden biri olan Spline yöntemler ile ilgili genel bilgiler Mohanty ve Evans'ın [16] çalışmasında açıklanmıştır. Bu çalışmada kullanılan son yöntem diferansiyel kareleme yöntemidir. Diferansiyel kareleme yöntemi ile ilgili genel bilgiler Bellman ve arkadaşlarının [17] çalışmasında verilmiştir. Yücel ve Sarı [18] çalışmasında iki-noktalı singüler sınır değer problem sınıfının çözümü için diferansiyel kareleme yöntemi kullanılmıştır. Analitik çözümü bilinen örnekler diferansiyel kareleme yöntemi ile çözülmüş ve çeşitli hata hesaplamalarıyla yöntemin güvenilirliği tartışılmıştır. Bert ve Malik'in [19] çalışmasında diferansiyel kareleme yönteminin tarihçesi ayrıntılı bir şekilde açıklanmış ve yöntemin işleyişi ve adımları verilmiştir. Chen'in [20] çalışması bir boyutlu lineer olmayan problemler için diferansiyel

kareleme yönteminin nasıl kullanılacağını göstermiştir. Son olarak Shu'nun [21] kitabında ve Shu ve Richards'ın [22] çalışmasında diferansiyel kareleme yöntemi geniş bir şekilde incelenmiş ve uygulamalar ile gösterilmiştir. İki-noktalı singüler sınır değer problemleri için kullanılabilecek bir diğer yöntem olan seri yöntemler ile ilgili bilgiler ve uygulamalar Roul ve Biswal'in [23] çalışmasında ve Roul'un [24] çalışmasında verilmiştir. Görgün ve arkadaşlarının [25] çalışmasında ve Shu ve Chew'in [26] çalışmasında Fourier açılımı bazlı diferansiyel kareleme yönteminin işlem adımları detaylı bir şekilde açıklanmış ve örneklerle detaylandırılmıştır. Çalışmamızda kullanılan Fourier açılımı bazlı diferansiyel kareleme yöntemi için [25] ve [26] çalışmalarından yararlanılmıştır. Son olarak, çalışmamızda kullanılan problemler [27], [28] ve [29] çalışmalarından seçilmiştir.

1.2 Tezin Amacı

Bu tezin amacı bir boyutlu iki-noktalı lineer ve lineer olmayan singüler sınır değer problemlerinin sırasıyla sonlu farklar yöntemi, sonlu elemanlar yöntemi, diferansiyel kareleme yöntemi ile sayısal çözümlerini elde etmek ve analitik sonuçlar ile karşılaştırılıp uygulanan bu yöntemleri kıyaslamaktır.

1.3 Hipotez

Sonlu farklar, sonlu elemanlar ve diferansiyel kareleme yöntemlerinin iki-noktalı singüler sınır değer problemlerine uygulanabilirliğidir.

2
YÖNTEMLER

2.1 Sonlu Farklar Yöntemi (SFY)

Türevler için sonlu fark yaklaşımları, diferansiyel denklemleri çözmenin en basit ve en eski yöntemlerinden biridir. Leonhard Euler tarafından yaklaşık 1768 yılında bir boyutlu denklemler için bulunmuştur. 1908 yılında Carl David Tolmé Runge tarafından iki boyutlu denklemler için geliştirilmiştir. Sayısal uygulamalarda sonlu fark tekniklerinin ortaya çıkışı 1950'lerin başlarında başlamıştır ve gelişimi, bilim ve teknolojinin karmaşık problemleri ile başa çıkmak için uygun bir çerçeve sunan bilgisayarların ortaya çıkmasıyla hızlanmıştır[6].

Diferansiyel denklemleri sayısal olarak çözmek için denklemdeki türevler ayrıklaştırılmış bir bölgedeki sonlu fark yaklaşımları ile değiştirilir. Burada ayrıklaştırılmış alandaki bağımsız değişken x_i değerlerine karşılık gelen bağımlı değişken y_i değerlerini elde etmek için explicit (açık) yöntemler veya implicit (kapalı) yöntemler kullanılarak cebirsel denklem sistemleri elde edilir[9].

Bu yöntem, $[a, b]$ aralığının, $h = (b - a) / N$ genişliğinde N tane alt aralığa bölünmesi ve her bir grid noktası için diferansiyel denklemlerdeki tüm türevlerin yerine ileri fark, geri fark veya merkezi fark gibi bazı fark formüllerinin yazılması temeline dayanır.

Aşağıdaki tablo, bazı doğruluk mertebeleri ve düzenli grid aralıkları için merkezi fark katsayılarını verir:

Tablo 2.1 Merkezi fark katsayıları [10]

Türev	Doğruluk Mertebesi	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
1	2				$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$			
	4			$\frac{1}{12}$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{12}$		
	6		$-\frac{1}{60}$	$\frac{3}{20}$	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{20}$	$\frac{1}{60}$	
2	2				1	−2	1			
	4			$-\frac{1}{12}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{12}$		
	6		$\frac{1}{90}$	$-\frac{3}{20}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{49}{18}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{20}$	$\frac{1}{90}$	
3	2			$-\frac{1}{2}$	1	0	−1	$\frac{1}{2}$		
	4		$\frac{1}{8}$	−1	$\frac{13}{8}$	0	$-\frac{13}{8}$	1	$-\frac{1}{8}$	
	6	$-\frac{7}{240}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{169}{120}$	$\frac{61}{30}$	0	$-\frac{61}{30}$	$\frac{169}{120}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{7}{240}$
4	2			1	−4	6	−4	1		
	4		$-\frac{1}{6}$	2	$-\frac{13}{2}$	$\frac{28}{3}$	$-\frac{13}{2}$	2	$-\frac{1}{6}$	
	6	$\frac{7}{240}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{169}{60}$	$-\frac{122}{15}$	$\frac{91}{8}$	$-\frac{122}{15}$	$\frac{169}{60}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{7}{240}$
5	2		$-\frac{1}{2}$	2	$-\frac{5}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	−2	$\frac{1}{2}$	
6	2		1	−6	15	−20	15	−6	1	

Örneğin, 2. mertebe doğruluk değeri için 3. mertebe türev hesabı merkezi fark yaklaşımı kullanılarak

$$u'''(x_0) \approx \frac{-\frac{1}{2}u(x_{-2})+u(x_{-1})-u(x_{+1})+\frac{1}{2}u(x_{+2})}{h^3} + O(h^2) \qquad (2.1)$$

şeklinde elde edilebilir. Burada h, $x_n = x_0 + nh, n = 1, 2, \dots, N$ olacak şekilde eşit sonlu fark aralıkları arasındaki uzaklığı gösterir.

Aşağıdaki tablo, bazı doğruluk mertebeleri ve düzenli grid aralıkları için ileri fark katsayılarını verir:

Tablo 2.2 İleri Fark Tablosu [10]

Türev	Doğruluk Mertebesi	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	-1	1						
	2	$-\frac{3}{2}$	2	$-\frac{1}{2}$					
	3	$-\frac{11}{6}$	3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{3}$				
	4	$-\frac{25}{12}$	4	-3	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{4}$			
	5	$-\frac{137}{60}$	5	-5	$\frac{10}{3}$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{1}{5}$		
2	1	1	-2	1					
	2	2	-5	4	-1				
	3	$\frac{35}{12}$	$-\frac{26}{3}$	$\frac{19}{2}$	$-\frac{14}{3}$	$\frac{11}{12}$			
	4	$\frac{15}{4}$	$-\frac{77}{6}$	$\frac{107}{6}$	-13	$\frac{61}{12}$	$-\frac{5}{6}$		
	5	$\frac{203}{45}$	$-\frac{87}{5}$	$\frac{117}{4}$	$-\frac{254}{9}$	$\frac{33}{2}$	$-\frac{27}{5}$	$\frac{137}{180}$	
3	1	-1	3	-3	1				
	2	$-\frac{5}{2}$	9	-12	7	$-\frac{3}{2}$			
	3	$-\frac{17}{4}$	$\frac{71}{4}$	$-\frac{59}{2}$	$\frac{49}{2}$	$-\frac{41}{4}$	$\frac{7}{4}$		
	4	$-\frac{49}{8}$	29	$-461/8$	62	$-307/8$	13	$-15/8$	
	5	$-\frac{967}{120}$	$\frac{638}{15}$	$-\frac{3929}{40}$	$\frac{389}{3}$	$-\frac{2545}{24}$	$\frac{268}{5}$	$-\frac{1849}{120}$	$\frac{29}{15}$
4	1	1	-4	6	-4	1			
	2	3	-14	26	-24	11	-2		
	3	$\frac{35}{6}$	-31	$\frac{137}{2}$	$-\frac{242}{3}$	$\frac{107}{2}$	-19	$\frac{17}{6}$	
	4	$\frac{28}{3}$	$-\frac{111}{2}$	142	$-\frac{1219}{6}$	176	$-\frac{185}{2}$	$\frac{82}{3}$	$-\frac{7}{2}$

Örneğin, 3. mertebe doğruluk değeri için 1. mertebe türev hesabı ve 2. mertebe doğruluk değeri için 2. mertebe türev hesabı ileri fark yaklaşımı kullanılarak

$$u'(x_0) \approx \frac{-\frac{11}{6}u(x_0)+3u(x_{+1})-\frac{3}{2}u(x_{+2})+\frac{1}{3}u(x_{+3})}{h} + O(h^3) \tag{2.2}$$

$$u''(x_0) \approx \frac{2u(x_0)-5u(x_{+1})+4u(x_{+2})-u(x_{+3})}{h^2} + O(h^2) \tag{2.3}$$

şeklinde elde edilebilir. Burada h, $x_n = x_0 + nh, n = 1, 2, \dots, N$ olacak şekilde eşit sonlu fark aralıkları arasındaki uzaklığı gösterir.

Aynı tablo geri fark yaklaşımları için de kullanılabilir. Tek mertebeli türevler için katsayıların işaretleri toplama işlemine göre ters çevrilirken çift mertebeli türevler için katsayılar aynı şekilde kullanılır. Örneğin, 3. mertebe doğruluk değeri için 1. mertebe türev hesabı ve 2. mertebe doğruluk değeri için 2. mertebe türev hesabı geri fark yaklaşımı kullanılarak

$$u'(x_0) \approx \frac{\frac{11}{6}u(x_0)-3u(x_{+1})+\frac{3}{2}u(x_{+2})-\frac{1}{3}u(x_{+3})}{h} + O(h^3) \tag{2.4}$$

$$u''(x_0) \approx \frac{2u(x_0)-5u(x_{+1})+4u(x_{+2})-u(x_{+3})}{h^2} + O(h^2) \tag{2.5}$$

şeklinde elde edilebilir. Burada h, $x_n = x_0 + nh, n = 1, 2, \dots, N$ olacak şekilde eşit sonlu fark aralıkları arasındaki uzaklığı gösterir.

Bu yöntemi matematiksel olarak ifade etmek için, $a \le x \le b$ bölgesinde tek değişkenli bir $u\,(x)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. İkinci mertebeden lineer diferansiyel denklemi içeren bir sınır değer problemi

$$u(x_0 = a) = u_0,\ u(x_n = b) = u_n$$

sınır değerleri ile (2.6)

$$u''(x)+a_1(x)u'(x)+a_0(x)u(x) = f(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Sonlu fark yönteminde, $[a, b]$ aralığı N tane alt aralığa bölünür. Her bir alt aralık $x_i = x_0 + ih$ olmak üzere (2.6) denklemindeki türevler sonlu fark yaklaşımlarına dönüştürülür.

$$\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}+a_{1i}\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}+a_{0i}u_i=f_i$$

(2.7)

$$(2-ha_{1i})u_{i-1}+(-4+2h^2a_{0i})u_i+(2+ha_{1i})u_{i+1}=2h^2f_i$$

Daha sonra, sınır koşulları göz önüne alınarak ve $(N-1)$ tane denklemin tümü toplanarak tridiagonal bir denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} -4+2h^2a_{01} & 2+ha_{11} & 0 & \cdots & & 0\ 0\ 0 & \\ 2-ha_{12} & -4+2h^2a_{02} & 2+ha_{12} & \cdots & & 0\ 0\ 0 & \\ 0 & 2-ha_{13} & -4+2h^2a_{03} & & & 0\ 0\ 0 & \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ & 0\ 0\ 0 & & & -4+2h^2a_{0,N-3} & 2+ha_{1,N-3} & 0 \\ & 0\ 0\ 0 & & \cdots & 2-ha_{1,N-2} & -4+2h^2a_{0,N-2} & 2+ha_{1,N-2} \\ & 0\ 0\ 0 & & & 0 & 2-ha_{1,N-1} & -4+2h^2a_{0,N-1} \end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-3} \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2h^2f_1-(2-ha_{11})u_0 \\ 2h^2f_2 \\ 2h^2f_3 \\ \vdots \\ 2h^2f_{N-3} \\ 2h^2f_{N-2} \\ 2h^2f_{N-1}-(2-ha_{1,N-1})u_N \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Burada elde edilen tridiagonal denklem sistemi MATLAB'teki 'trid ()' komutu kullanılarak çözülebilir.

2.2 Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY)

Sonlu elemanlar yöntemi, mühendislik ve matematiksel fizik problemlerini çözmek için kullanılan bir sayısal çözüm yöntemidir. Sonlu elemanlar yönteminin buluşunun bir tarihini söylemek zor olsa da, yöntem, sivil ve havacılık mühendisliğinde karmaşık elastikiyet ve yapısal analiz problemlerini çözme ihtiyacından kaynaklanmıştır. Bu yöntemin gelişimi, 1940'ların başında Courant tarafından yazılan eserde görülebilir[15].

Sonlu elemanlar yönteminde ele alınan mühendislik probleminin çözüm bölgesi alt bölgelere ayrıklaştırılır ve her bir alt bölgede aranan fonksiyonun ifadesi polinom

olacak şekilde seçilir. Belirli işlemler dahilinde her alt bölgede polinom olarak kabul edilen çözümün katsayıları belirlenmeye çalışılır.

Sonlu elemanlar yöntemi işlem adımları temel olarak şöyledir [12]:

1) Fiziksel problemin matematiksel modeli kurulur.

2) Probleme ait varyasyonel ifade oluşturulur.

3) Çözüm bölgesi sonlu alt bölgelere ayrılır.

4) Her sonlu elemanda aranan fonksiyon ifadesi, polinom olarak kabul edilir. Bu fonksiyonlar varyasyonel ifadede yerine yazılarak her sonlu eleman için verilen temel denklemler cebirsel denklemlere dönüştürülür.

Örneğin e. sonlu eleman için bu cebirsel denklem

$$K^{(e)}.u^{(e)} = F^{(e)} \tag{2.9}$$

şeklindedir. Burada K katsayılar matirisini, u bilinmeyenleri içeren vektörü ve F sağ taraf vektörünü temsil etmektedir.

5) Her sonlu eleman için ayrı ayrı bulunan (2.9) denklemleri uygun şekilde birleştirilerek bütün sisteme ait cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$K.u = F \tag{2.10}$$

Bu sisteme sınır koşulları uygun satır ve sütun işlemleriyle dahil edilerek indirgenmiş sistem bulunur.

6) İndirgenmiş sistemin çözülmesiyle her bir nodda aranan büyüklükler bulunur.

7) Son olarak elde edilen çözüm grafik ya da tablo yardımıyla sunulur.

Varyasyonel ifadenin oluşturulması için kullanılan Galerkin yönteminin ise genel olarak işlem adımları aşağıdaki gibidir:

1) Hata fonksiyonu elde edilir.

2) Çözüm bölgesi üzerinde hata fonksiyonunun test fonksiyonu ile çarpımının integrali sıfıra eşitlenir.

3) Kısmi integrasyon yardımıyla aranan fonksiyon ile test fonksiyonunun türev mertebeleri eşitlenir.

4) Sınır koşulları kısmi integrasyondan gelen bütün terimlere uygulanır.

Bu yöntemi matematiksel olarak ifade etmek için,

$$u(a) = u_1 \ , \ u(b) = u_2 \tag{2.11}$$

sınır koşulları ile

$$p(x)u''(x) + q(x)u'(x) + r(x)u(x) = f(x), \quad a < x < b \tag{2.12}$$

şeklinde tanımlanan bir sınır değer problemini ele alalım.

Burada öncelikle eşitliğin sağ tarafındaki ifade sol tarafa alınır ve ikinci merteden türev içeren terimin katsayısından kurtulmak için (2.12)'teki eşitliğin tamamı $p(x)$ e bölünür. Böylece hata fonksiyonu oluşturulur.

$$u''(x) + \frac{q(x)}{p(x)}u'(x) + \frac{r(x)}{p(x)}u(x) - \frac{f(x)}{p(x)} = 0 \tag{2.13}$$

Ardından yöntemin uygulanabilmesi için $w(x)$ test fonksiyonu seçilir. Hata fonksiyonu ve test fonksiyonun çarpımının integrali sıfıra eşitlenir.

$$\int_a^b \left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{q(x)}{p(x)}\frac{du}{dx} + \frac{r(x)}{p(x)}u(x) - \frac{f(x)}{p(x)}\right) w(x)dx = 0 \tag{2.14}$$

Türev mertebelerini eşitlemek için kısmi integrasyon uygulanır. Böylece Galerkin yöntemi ile varyasyonel ifade aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\int_a^b \left(-\frac{dw}{dx}\frac{du}{dx} + w\frac{q(x)}{p(x)}\frac{du}{dx} + w\frac{r(x)}{p(x)}u(x) - w\frac{f(x)}{p(x)}\right) dx + \left[w\frac{du}{dx}\right]_a^b = 0 \tag{2.15}$$

Sonraki adımda çözüm bölgesi $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b$ olacak şekilde $N + 1$ alt aralığa ayrıklaştırılır.

$w(x)$ ve $u(x)$ fonksiyonları $w = \psi_i^e$ ve $u = \sum_{i=1}^n u_j^e \psi_j^e$ şeklinde tanımlanır. Burada ψ_i^e fonksiyonları e. eleman için baz takımını ifade etmektedir. $w(x)$ ve $u(x)$ fonksiyonları (2.15) denkleminde yerine yazılır ve e. eleman için $\sum_{j=1}^n K_{ij}^e u_j^e = f_i^e + Q_i^e$, $i = 1,2, \dots, n$ şeklinde bir cebirsel denklem elde edilir. Burada

$$K_{ij}^e = \int_a^b \left(-\frac{d\psi_i^e}{dx}\frac{d\psi_j^e}{dx} + \psi_i^e \frac{p(x)}{q(x)}\frac{d\psi_j^e}{dx} + \psi_i^e \frac{r(x)}{p(x)}\psi_j^e\right) dx \tag{2.16}$$

$$f_i^e = \int_a^b \psi_i^e \frac{f(x)}{p(x)} dx \tag{2.17}$$

Q_i^e lineer olmayan terimleri ifade etmektedir. Bu çalışma boyunca lineer baz fonksiyonları kullanılmıştır ve kullanılan baz foksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h}, & x_{i-1} \le x < x_i \\ \frac{x_{i+1} - x}{h}, & x_i \le x < x_{i+1} \\ 0, & diğer \end{cases} \tag{2.18}$$

Her bir eleman için oluşturulan denklemler birleştirildiğinde $\sum_{j=1}^{n} K_{ij} u_{ij} = f_i + Q_i \quad i = 1, 2, \dots, n$ denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & \cdots & 0 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 + K_{11}^3 & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & 0 \quad 0 \quad 0 & & \cdots & K_{22}^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 + f_1^3 \\ \vdots \\ f_2^N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 + Q_1^2 \\ Q_2^2 + Q_1^3 \\ \vdots \\ Q_2^N \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

Burada elde edilen tridiagonal denklem sistemi MATLAB'teki 'trid ()' komutu kullanılarak çözülebilir.

2.3 Diferansiyel Kareleme Yöntemi (DKY)

Diferansiyel kareleme yöntemi diferansiyel denklemleri çözmek için ilk kez Bellman tarafından 1970'lerin başında bulunmuştur[17]. Yöntem, fonksiyonun türevini kullanan kareleme yönteminin temelini kullanır.

Yöntemin matematiksel sunumunu göstermek için $a \le x \le b$ bölgesinde tek değişkenli bir $u(x)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $u(x)$ fonksiyonunun n. mertebeden türevinin x_i grid noktasındaki değeri aşağıdaki şekilde yazılabilir[18]:

$$\left.\frac{d^n u}{dx^n}\right|_{x=x_i} = \sum_{k=1}^{N} \omega_k^{(n)}(x_i) u(x_k) \ , \ i = 1, 2, \dots, N \quad n = 1, 2, \dots, N-1 \tag{2.20}$$

Burada, N tüm bölgenin grid noktalarının sayısı $(a = x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b)$ ve $\omega_k^{(n)}(x_i)$ n. türevin ağırlıklı katsayılarıdır.

(2.20) denkleminden görüldüğü gibi, Diferansiyel kareleme yönteminin uygulamalarından elde edilen yaklaşık sonuçların kalitesi iki önemli faktör tarafından kontrol edilir. Bunlar, ağırlıklı katsayıların değerleri ve ayrık

değişkenlerin konumudur. Öncelikle ağırlıklı katsayılar hesaplanır, diferansiyel denklemin türevleri için (2.20) denklemindeki ifade kullanılır.

(2.20) denklemindeki ağırlıklı katsayıyı belirlemek için $u(x)$ bazı test fonksiyonlarına yaklaşmak zorundadır. Uygun bir test fonksiyonu seçmek için, aşağıdaki şartların sağlanması gerekir:

- Diferansiyellenebilirlik: diferansiyel denklemin test fonksiyonu en azından n. türeve kadar diferansiyellenebilir olmalıdır. (burada n, diferansiyel denklemin mertebesidir.)
- Düzgünlük: $u(x)$, diferansiyellenebilirliğin koşulunu yeterince düzgün şekilde sağlamak zorundadır.

2.3.1 Polinom Bazlı Diferansiyel Kareleme Yöntemi (PDKY)

Shu [21] ve Shu ve Richards [22], ağırlık katsayılarını daha yüksek mertebeden bir polinom yaklaşımı ve doğrusal bir vektör uzayının kapsamı içinde hesaplamak için bazı açık formülasyonlar sundular. Bir boyutlu diferansiyel denklemin çözümünün $(N-1)$. dereceden bir polinoma yaklaştığı varsayıldığında aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k x^k \tag{2.21}$$

$\omega_k(x),\ k = 1, 2, \dots, N,\ V_N$ ($N-$boyutlu lineer vektör) uzayında temel polinomlar olmak üzere, $u\ (x)$ aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$u(x) = \sum_{k=1}^{N} d_k \omega_k(x) \tag{2.22}$$

Buradaki baz polinomları $\omega_k(x),\ k = 1, 2, \dots, N,$ Lagrange enterpolasyonları olarak aşağıdaki gibi seçilir:

$$\omega_k(x) = \frac{M(x)}{(x-x_k).M^{(1)}(x_k)} \tag{2.23}$$

$$M(x) = \prod_{j=1}^{N}(x - x_j) \tag{2.24}$$

$$M^{(1)}(x_k) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{N}(x_k - x_j) \tag{2.25}$$

$x_i, i = 1, 2, \ldots, N$ rastgele seçilen grid noktalarının koordinatlarıdır. (2.22) denklemi (2.20) denkleminde yerine yazılır ve (2.23) denklemi kullanılırsa 1.mertebe türev ve 2. mertebe türev için aşağıdaki ağırlıklı katsayılar elde edilir:

$$\omega_k^{(1)}(x_i) = \frac{M^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_k)M^{(1)}(x_k)}, \quad k \neq i, \quad i, k = 1,2, \ldots, N \tag{2.26}$$

$$\omega_i^{(1)}(x_i) = -\sum_{\substack{k=1 \\ i \neq k}}^{N} \omega_k^{(1)}(x_i),$$

$$\omega_k^{(2)}(x_i) = 2\omega_k^{(1)}(x_i)\left(\omega_i^{(1)}(x_i) - \frac{1}{x_i - x_k}\right), \quad k \neq i, \quad i, k = 1,2, \ldots, N \tag{2.27}$$

$$\omega_i^{(2)}(x_i) = -\sum_{\substack{k=1 \\ i \neq k}}^{N} \omega_k^{(2)}(x_i)$$

İki-noktalı singüler sınır değer problemini PDKY kullanarak hesaplamak için öncelikle problem aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$y'' + q(x)y' - f(x, y) = 0 \tag{2.28}$$

burada $q(x) = \frac{p\prime(x)}{p(x)}$tir. [0,1] aralığı, N grid noktalarının sayısı olmak üzere, $0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_N = 1$ şeklinde ayrıklaştırılır. (2.28) denklemine PDKY uygulandığında

$$\sum_{k=1}^{N} \omega_{ik}^{(2)} y_k + q_i \sum_{k=1}^{N} \omega_{ik}^{(1)} y_k - f_i = 0, \quad i = 2, 3, \ldots, N-1 \tag{2.29}$$

bulunur. $\omega_{ik}^{(1)}$ ve $\omega_{ik}^{(2)}$ sırasıyla birinci ve ikinci mertebe türevlerin ağırlıklı katsayılarını göstermektedir. Elde edilen bu sistem, bazı iterasyon yöntemleri kullanılarak çözülebilir.

2.3.2 Fourier Açılımı Bazlı Diferansiyel Kareleme Yöntemi (FDKY)

Diferansiyel kareleme fikrinin ardında, bir grid noktasındaki herhangi bir türevin, tüm hesaplama alanındaki tüm fonksiyonel değerlerin doğrusal bir toplamı ile

yaklaştığı varsayılmaktadır[25]. Örneğin, bir x_i noktasındaki $u(x)$ 'in birinci ve ikinci mertebeden türevleri, yaklaşık olarak

$$u_x(x_i) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}.u(x_j) \ , i = 1, 2, \dots, N \tag{2.30}$$

$$u_{xx}(x_i) = \sum_{j=1}^{N} b_{ij}.u(x_j) \ , i = 1, 2, \dots, N \tag{2.31}$$

şeklinde tanımlanır. Burada N grid noktalarının sayısını ve a_{ij} ve b_{ij} ağırlıklı katsayıları göstermektedir.

$u(x)$ fonksiyonunun Fourier seri açılımına yakınsadığı varsayılır:

$$u(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{N/2}(c_k cos kx + d_k sin kx) \tag{2.32}$$

(2.32) denklemindeki $u(x)$ fonksiyonunun $(N-1)$ boyutlu lineer vektör uzayını oluşturduğunu göstermek kolaydır. Lineer bağımsızlık kavramından, lineer bir vektör uzayının bazları, tüm alanı kapsayan lineer bağımsız bir alt küme olarak düşünülebilir. Burada, eğer $r_k\ (x), k = 0, 1, \dots, N$ baz fonksiyonları ise, uzaydaki herhangi bir fonksiyon, $r_k\ (x), k = 0, 1, \dots, N$ fonksiyonlarının lineer bir kombinasyonu olarak ifade edilebilir. Lineer vektör uzayında birkaç baz fonksiyonu kümesi bulunabilir. Her bir baz fonksiyonu kümesi, başka bir baz fonksiyon kümesi tarafından tek bir şekilde ifade edilebilir. (2.32) denkleminde baz fonksiyonlarının bir kümesinin $1, sinx, cosx, sin2x, cos2x, \dots, \sin\left(\frac{Nx}{2}\right), \cos\left(\frac{Nx}{2}\right)$ olduğu açıkça görülmektedir. Fourier açılımı bazlı diferansiyel kareleme yönteminde genel olarak, iki tane baz fonksiyonu kümesi kullanılacaktır. İlk olarak, Lagrange enterpolasyonlu trigonometrik bir baz fonksiyonları kümesi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$r_k(x) = \frac{sin\frac{x-x_0}{2}\dots sin\frac{x-x_{k-1}}{2} sin\frac{x-x_{k+1}}{2}\dots sin\frac{x-x_N}{2}}{sin\frac{x_k-x_0}{2}\dots sin\frac{x_k-x_{k-1}}{2} sin\frac{x_k-x_{k+1}}{2}\dots sin\frac{x_k-x_N}{2}} \ , k = 0, 1, \dots, N \tag{2.33}$$

düzenlendiğinde

$$M(x) = \prod_{k=0}^{N} sin\frac{x-x_k}{2} = N(x, x_k) sin\frac{x-x_k}{2} \tag{2.34}$$

burada

$$N(x_i, x_i) = \prod_{k=0, k\neq i}^{N} sin\frac{x_i - x_k}{2} = P(x_i)$$

$$N(x_i, x_j) = N(x_i, x_i).\delta_{ij} \tag{2.35}$$

şeklindedir. δ_{ij} Kronecker delta operatörüdür. Denklem (2.33) düzenlendiğinde

$$r_k(x) = \frac{N(x,x_k)}{P(x_k)} \tag{2.36}$$

elde edilir. (2.36) denklemi ile verilen tüm baz fonksiyonlarının bilineer sınırlı bağıntılarının (2.30) ve (2.31) denklemlerini sağladığı kabul edilir. Böylece, aşağıdaki iki formülasyona ulaşılır:

$$a_{ij} = \frac{N^{(1)}(x_i,x_j)}{P(x_j)} \tag{2.37}$$

$$b_{ij} = \frac{N^{(2)}(x_i,x_j)}{P(x_j)} \tag{2.38}$$

Burada $N^{(1)}(x_i, x_j)$ ve $N^{(2)}(x_i, x_j)$ değerleri sırasıyla $N(x, x_k)$ değerinin birinci ve ikinci mertebe türevlerini ifade etmektedir. $P(x_j)$, (2.35) ile kolayca hesaplanabilir olduğundan ve (2.37)-(2.38) denklemlerinden, a_{ij} ve b_{ij} hesaplamasının $N^{(1)}(x_i, x_j)$ ve $N^{(2)}(x_i, x_j)$ değerlerinin hesaplanmasına eşdeğer olduğu görülmüştür. $N^{(1)}(x_i, x_j)$ ve $N^{(2)}(x_i, x_j)$ hesaplandığında (2.34) denklemi aşağıdaki gibi türetilir:

$$M^{(1)}(x) = N^{(1)}(x, x_k)sin\frac{x-x_k}{2} + \frac{1}{2}N(x, x_k)cos\frac{x-x_k}{2} \tag{2.39}$$

$$M^{(2)}(x) = N^{(2)}(x, x_k)sin\frac{x-x_k}{2} + N^{(1)}(x, x_k)cos\frac{x-x_k}{2} - \frac{1}{4}N(x, x_k)sin\frac{x-x_k}{2} \tag{2.40}$$

$$M^{(3)}(x) = N^{(3)}(x, x_k)sin\frac{x-x_k}{2} + \frac{3}{2}N^{(2)}(x, x_k)cos\frac{x-x_k}{2} - \frac{3}{4}N^{(1)}(x, x_k)sin\frac{x-x_k}{2} - \frac{1}{8}N(x, x_k)cos\frac{x-x_k}{2} \tag{2.41}$$

Yukarıdaki eşitliklerden aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$M^{(1)}(x_i) = \frac{1}{2}N(x_i, x_i) = \frac{1}{2}P(x_i) \tag{2.42}$$

$$N^{(1)}(x_i, x_j) = \frac{M^{(1)}(x_i)}{sin\frac{x_i-x_j}{2}} \quad j \neq i \tag{2.43}$$

$$N^{(1)}(x_i, x_i) = M^{(2)}(x_i) \tag{2.44}$$

$$N^{(2)}(x_i, x_j) = \frac{M^{(2)}(x_i) - N^{(1)}(x_i, x_j) cos\frac{x_i - x_j}{2}}{sin\frac{x_i - x_j}{2}} \quad , j \neq i \tag{2.45}$$

$$N^{(2)}(x_i, x_i) = \frac{2}{3}[M^{(3)}(x_i) + \frac{1}{8}N(x_i, x_j)] \tag{2.46}$$

(2.42)-(2.44) denklemleri (2.37) denkleminde yerine yazıldığında aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$a_{ij} = \frac{1}{2}\frac{P(x_i)}{sin\frac{x_i - x_j}{2}P(x_j)} \quad , \; j \neq i \tag{2.47}$$

$$a_{ii} = \frac{M^{(2)}(x_i)}{P(x_i)} \tag{2.48}$$

Benzer şekilde (2.45) ve (2.46) denklemleri, (2.47) ve (2.48) denklemleri kullanılarak, (2.38) denkleminde yerlerine yazıldığında aşağıdaki formülasyonlar elde edilir:

$$b_{ij} = a_{ij}\left[2a_{ii} - cot\frac{x_i - x_j}{2}\right], \; j \neq i \tag{2.49}$$

$$b_{ii} = \frac{2}{3}[\frac{M^{(3)}(x_i)}{P(x_i)} + \frac{1}{8}] \tag{2.50}$$

(2.47) ve (2.49) denklemlerinden a_{ij} ve b_{ij} kolayca hesaplanabilir. Bununla birlikte, a_{ii} ve b_{ii} değerlerini hesaplamak $M^{(2)}(x_i)$ ve $M^{(3)}(x_i)$ hesaplamalarını içerdiğinden çok kolay değildir. Bu zorluk aşağıdaki analizle ortadan kaldırılabilir. Lineer bir vektör uzayının analizine göre bir baz fonksiyonlar kümesi, bir başka baz fonksiyonlar kümesinin lineer bir toplamı ile tek bir şekilde ifade edilebilir. Bu nedenle, bir baz fonksiyon kümesi (2.30) veya (2.31) gibi bir lineer denklemi sağlarsa, başka bir baz fonksiyon kümesi de sağlar. Böylece, a_{ij} ve b_{ij} değerleri $1, sinx, cosx, sin2x, cos2x, \dots, \sin\left(\frac{Nx}{2}\right), \cos\left(\frac{Nx}{2}\right)$ baz fonksiyonlar kümesi arasındaki baz fonksiyonunu kullanarak elde edilen aşağıdaki denklemleri de sağlamalıdır:

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} = 0 \tag{2.51}$$

$$\sum_{j=1}^{N} b_{ij} = 0 \tag{2.52}$$

(2.51) ve (2.52) denklemleri kullanılarak, a_{ii} ve b_{ii} değerleri a_{ij} $(i \neq j)$ ve b_{ij} $(i \neq j)$ sayesinde kolayca hesaplanır.

(2.47), (2.49), (2.51) ve (2.52) denklemleri kullanılarak birinci ve ikinci mertebe türev değerlerinin ağırlıklı katsayıları Fourier açılımı bazlı diferansiyel kareleme yöntemi ile kolaylıkla hesaplanabilir. FDKY periyodik ve periyodik olmayan problemlere uygulanabilir.

İki-noktalı singüler sınır değer problemini FDKY kullanarak hesaplamak için öncelikle problem aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$y'' + q(x)y' - f(x,y) = 0, \tag{2.53}$$

burada $q(x) = \frac{p'(x)}{p(x)}$tir. [0,1] aralığı, N grid noktalarının sayısı olmak üzere, $0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_N = 1$ ayrıklaştırılır. (2.53) denklemine FDKY uygulandığında

$$\sum_{k=1}^{N} b_{ik} y_k + q_i \sum_{k=1}^{N} a_{ik} y_k - f_i = 0, \quad i = 2, 3, \dots, N-1 \tag{2.54}$$

bulunur. a_{ik} ve b_{ik} sırasıyla birinci ve ikinci mertebe türevlerin ağırlıklı katsayılarını göstermektedir. Elde edilen bu sistem bazı iterasyon yöntemleri kullanılarak çözülebilir.

3

İKİ-NOKTALI SİNGÜLER SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Uygulamalı bilimlerde sıkça görülen iki-noktalı singüler sınır değer problem sınıfı genel olarak

$$(p(x)y')' = p(x)f(x,y), \quad 0 < x \leq 1, \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada sınır koşulları

$$y(0) = A, \quad \alpha y(1) + \beta y'(1) = B, \tag{3.2}$$

ya da

$$y'(0) = 0, \quad \alpha y(1) + \beta y'(1) = B, \tag{3.3}$$

şeklindedir. Tanımda $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ ve A, B sonlu iki sabit sayıdır. $p(x)$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlar:

1) (0,1] aralığında $p(x) > 0$,

2) $p(x) > 0 \in C^1(0,1]$,

3) [0,1] aralığında $p(x) = x^{b_0} g(x)$. Burada $r > 1$ için, $1/g(x)$ fonksiyonu $\{z: |z| < r\}$ kümesinde analitiktir.

Ayrıca, $f(x,y)$ fonksiyonu da aşağıdaki koşulları sağlar:

1) $f(x,y) \in \{[0,1] \times \mathbb{R}\}$ süreklidir.

2) $\frac{\partial f}{\partial y}$ vardır ve süreklidir.

3) $\forall 0 \leq x \leq 1$ ve tüm y reel sayıları için $\frac{\partial f}{\partial y} \geq 0$.

Problem (3.1), (3.2) ya da (3.3) koşulları altında tek bir çözüme sahiptir[4].

Bu bölümde seçilen sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümleri 2. mertebe sonlu farklar, 4. mertebe sonlu farklar, sonlu elemanlar yöntemleri, polinom bazlı

diferansiyel kareleme ve Fourier açılımı bazlı diferansiyel kareleme kullanılarak ayrı ayrı incelenmiştir.

3.1 Problem 1'in Sayısal Çözümü ve Karşılaştırılması

Bu bölümde amaç, analitik çözümü bilinen lineer yapıdaki iki-noktalı singüler sınır değer problemini üç farklı yöntem ile çözmek ve yöntemlerin etkilerini ve hassasiyetlerini karşılaştırmaktır. Yaklaşık çözümlerin performansı kesin ve mutlak hatalar ile ölçülmüştür.

Genel formülü (3.1)-(3.3) denklemlerinde tanımlanan iki-noktalı singüler sınır değer problemi özel olarak aşağıdaki şekilde tanımlansın. Kumar[27]:

$$(xy')' = -xcosx - sinx,\ 0 < x \leq 1 \tag{3.4}$$

sınır koşulları

$$y'(0) = 0,\ y(1) = cos1 \tag{3.5}$$

şeklinde verilsin. Bu denklemin analitik çözümünün $y(x) = cosx$ olduğu bilinmektedir. Şimdi, bu bölümde bu problemin çözümü ele alınacaktır.

3.1.1 Sonlu Farklar Yöntemi ile Çözümü

Bu çalışma boyunca sonlu farklar yöntemi, 2. mertebe sonlu fark ve 4. mertebe sonlu fark olmak üzere iki farklı mertebe için ayrı ayrı hesaplanmıştır.

3.1.1.1 2. Mertebe Sonlu Farklar Yöntemi (SF2) ile Çözümü

(3.4) denklemi düzenlendiğinde

$$xy'' + y' + xcosx + sinx = 0 \tag{3.6}$$

denklemi elde edilir. Burada sınır koşulları (3.5) denkleminde verilmiştir.

$0 < x \leq 1$ aralığı n tane düzgün alt aralığa bölündüğünde $i = 1, 2, \ldots, n$ tane denklem elde edilir. Burada adım uzunlukları $h = 1/n$ şeklindedir. Sınır koşulları göz önüne alındığında $y'(0) = 0$ değeri $y_1' = 0$ değerine karşılık gelirken $y(1) = cos1$ değeri de $y_n = cos1$ değerine karşılık gelmektedir.

$y_1' = 0$ değeri için 2. mertebe ileri fark yaklaşımı uygulandığında

$$y_1' = \frac{-\frac{3}{2}y_1 + 2y_2 - \frac{1}{2}y_3}{h} = 0 \tag{3.7}$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapıldığında

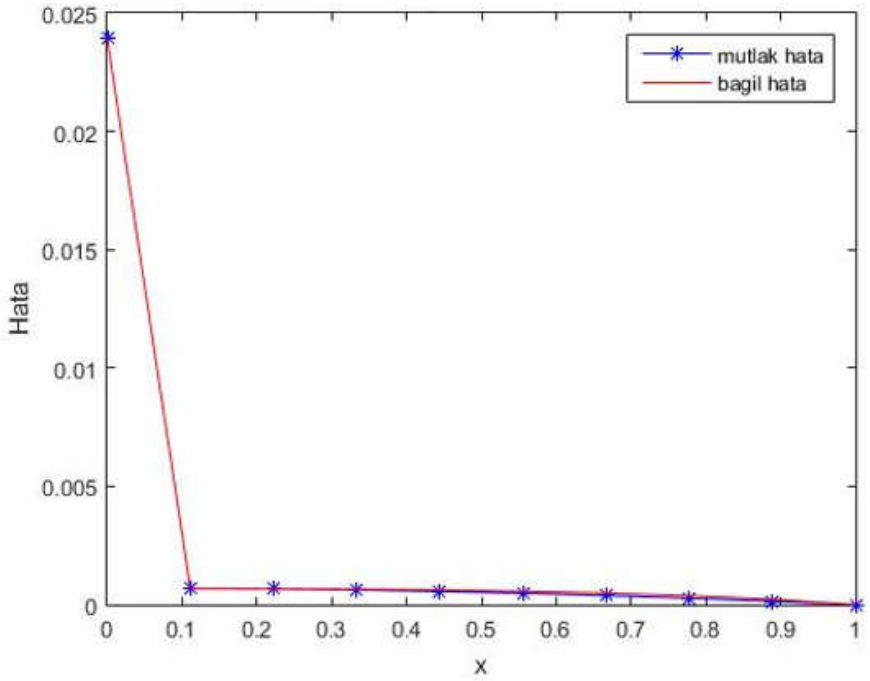
$$y_1 = \frac{4}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3 \text{ ve } y_n = cos1 \tag{3.8}$$

sınır değerine ulaşılır. Sınır koşulları dışında kalan noktalar için merkezi fark yaklaşımı denklemdeki türevlerde yerine yazıldığında (3.4) denklemi $i = 2, 3, \ldots, n-1$ için aşağıdaki formdadır:

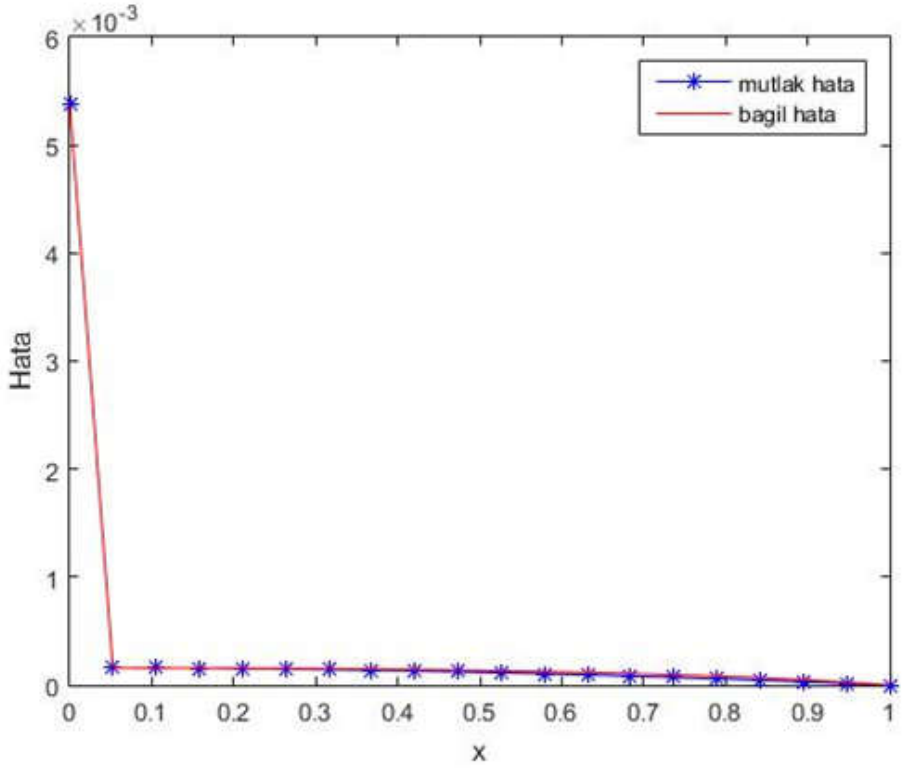
$$x_i \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + \frac{\frac{-1}{2}y_{i-1} + \frac{1}{2}y_{i+1}}{h} + x_i cos x_i + sin x_i = 0 \tag{3.9}$$

Yapılan bu düzenleme ve düzenlenen sınır koşullarına göre (3.8) ve (3.9) denklemleri (3.4) denkleminde yerine yazıldığında diferansiyel denklem içeren ifade $(n-2)$ bilinmeyenli $(n-2)$ denklemden oluşan bir cebirsel denklem sistemine dönüşür. Bu cebirsel denklem sistemini çözmek için bilinen iterasyon yöntemleri kullanılabilir. Bu çalışmada cebirsel denklem sisteminin çözümünde MATLAB fonksiyonları kullanılmıştır.

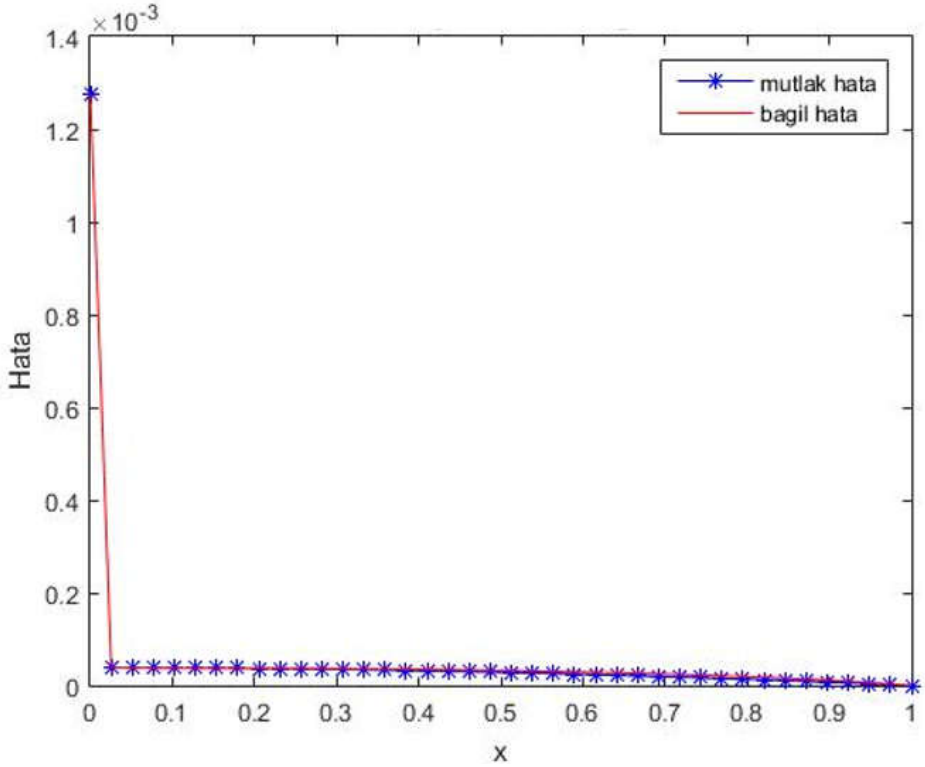
Aşağıdaki grafikler farklı n değerleri için SF2 sonuçlarını göstermektedir:



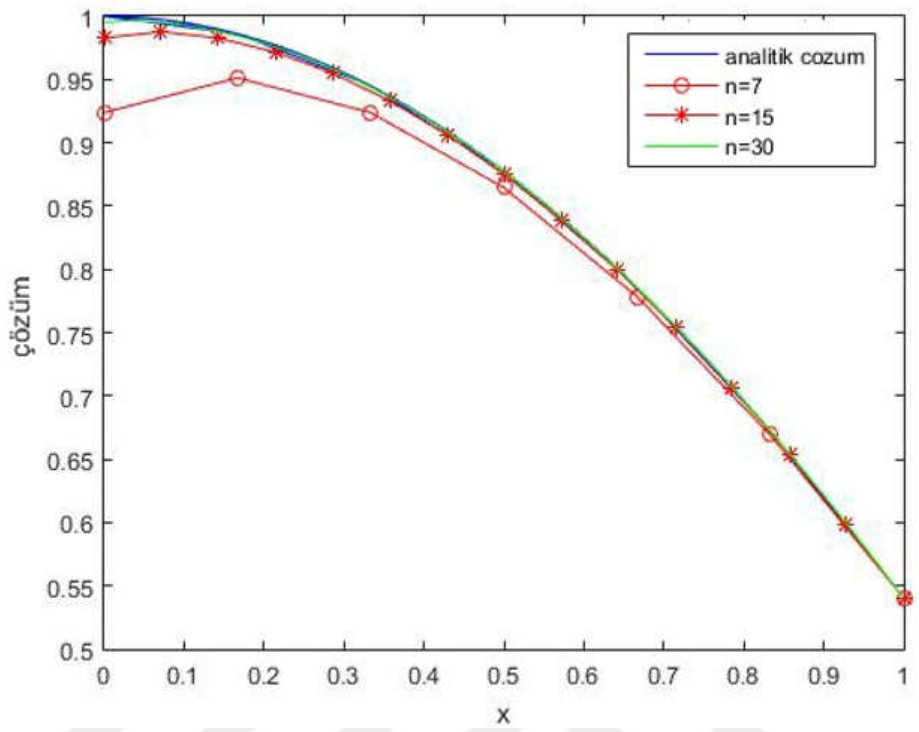
Şekil 3.1 $n = 10$ için SF2 hata grafiği



Şekil 3.2 $n = 20$ için SF2 hata grafiği



Şekil 3.3 $n = 40$ için SF2 hata grafiği



Şekil 3.4 Farklı n değerleri için SF2 çözümleri

3.1.1.2 4. Mertebe Sonlu Farklar Yöntemi (SF4) ile Çözümü

$0 < x \leq 1$ aralığı n tane düzgün alt aralığa bölündüğünde $i = 1, 2, \ldots, n$ tane denklem elde edilir. Burada adım uzunlukları $h = 1/n$ şeklindedir Sınır koşulları göz önüne alındığında $y'(0) = 0$ değeri $y_1' = 0$ değerine karşılık gelirken $y(1) = cos1$ değeri de $y_n = cos1$ değerine karşılık gelmektedir.

$y_1' = 0$ değeri için 4. mertebe ileri fark yaklaşımı uygulandığında

$$y_1' = \frac{-\frac{25}{12}y_1 + 4y_2 - 3y_3 + \frac{4}{3}y_4 - \frac{1}{4}y_5}{h} = 0 \qquad (3.10)$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$y_1 = \frac{48}{25}y_2 - \frac{36}{25}y_3 + \frac{16}{25}\,y_4 - \frac{3}{25}y_5 \text{ ve } y_n = cos1 \qquad (3.11)$$

sınır değerine ulaşılır.

Sınır koşulları dışında kalan noktalar için sonlu fark yaklaşımı denklemdeki türevlerde yerine yazılacaktır. Ancak 4. mertebe sonlu fark yaklaşımının yapısından ötürü ilk iki ve son iki noktasına merkezi fark yaklaşımı uygulanamaz. Sınır

koşullarından dolayı $i = 1$ ve $i = n$ değerleri bilinen değerlerdir. $i = 2$ değeri için 4. mertebe ileri fark yaklaşımı, $i = n - 1$ için 4. mertebe geri fark yaklaşımı ve $i = 3, 4, \ldots, n - 2$ için 4. mertebe merkezi fark yaklaşımları (3.6) denkleminde yerine yazıldığında aşağıdaki denklem sistemleri elde edilir:

$i = 2$ için

$$x_i \frac{\frac{15}{4}y_i - \frac{77}{6}y_{i+1} + \frac{107}{6}y_{i+2} - 13y_{i+3} + \frac{61}{12}y_{i+4} - \frac{5}{6}y_{i+5}}{h^2} + \frac{\frac{-25}{12}y_i + 4y_{i+1} - 3y_{i+2} + \frac{4}{3}y_{i+3} - \frac{1}{4}y_{i+4}}{h} + x_i cosx_i + sinx_i = 0 \quad (3.12)$$

$i = 3, 4, \ldots, n - 2$ için

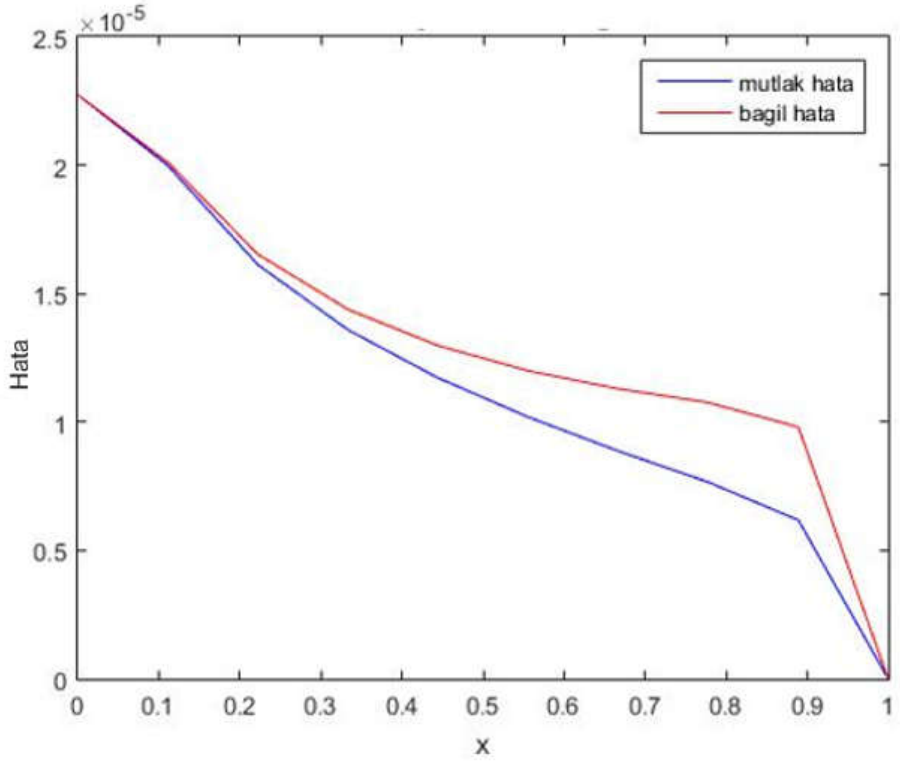
$$x_i \frac{\frac{-1}{12}y_{i-2} + \frac{4}{3}y_{i-1} - \frac{5}{2}y_i - \frac{4}{3}y_{i+1} - \frac{1}{12}y_{i+2}}{h^2} + \frac{\frac{1}{12}y_{i-2} - \frac{2}{3}y_{i-1} + \frac{2}{3}y_{i+1} - \frac{1}{12}y_{i+2}}{h} + x_i cosx_i + sinx_i = 0 \quad (3.13)$$

$i = n - 1$ için

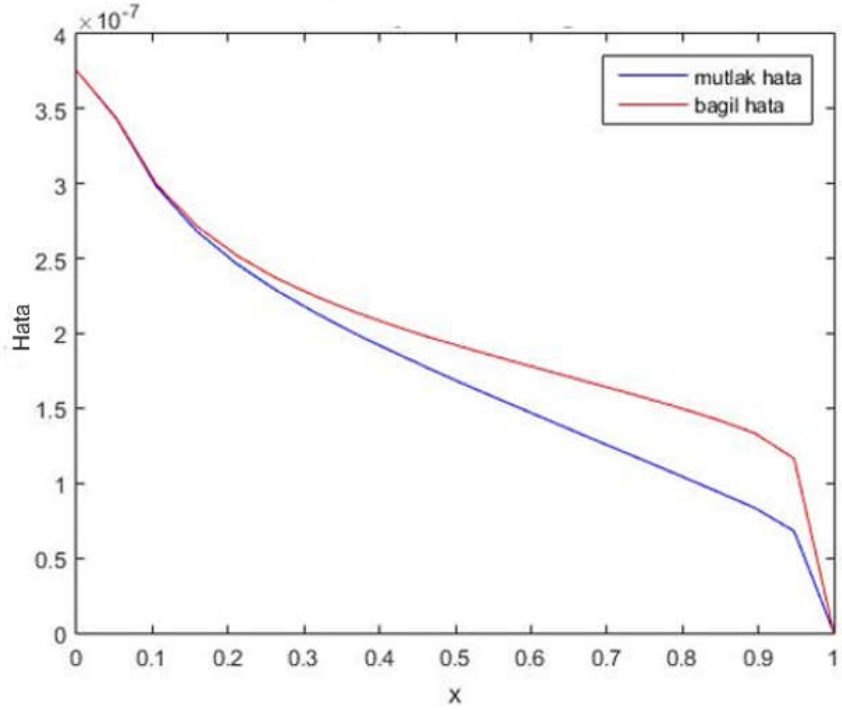
$$x_i \frac{\frac{15}{4}y_{i-5} - \frac{77}{6}y_{i-4} + \frac{107}{6}y_{i-3} - 13y_{i-2} + \frac{61}{12}y_{i-1} - \frac{5}{6}y_i}{h^2} + \frac{\frac{25}{12}y_{i-4} - 4y_{i-3} + 3y_{i-2} - \frac{4}{3}y_{i-1} + \frac{1}{4}y_i}{h} + x_i cosx_i + sinx_i = 0 \quad (3.14)$$

Yapılan bu düzenleme ve düzenlenen sınır koşullarına göre (3.11), (3.12), (3.13) ve (3.14) denklemleri (3.6) denkleminde yerine yazıldığında diferansiyel denklem içeren ifade $(n - 2)$ bilinmeyenli $(n - 2)$ denklemden oluşan bir cebirsel denklem sistemine dönüşür. Bu cebirsel denklem sistemini çözmek için bilinen iterasyon yöntemleri kullanılabilir. Bu çalışmada cebirsel denklem sisteminin çözümünde MATLAB fonksiyonları kullanılmıştır.

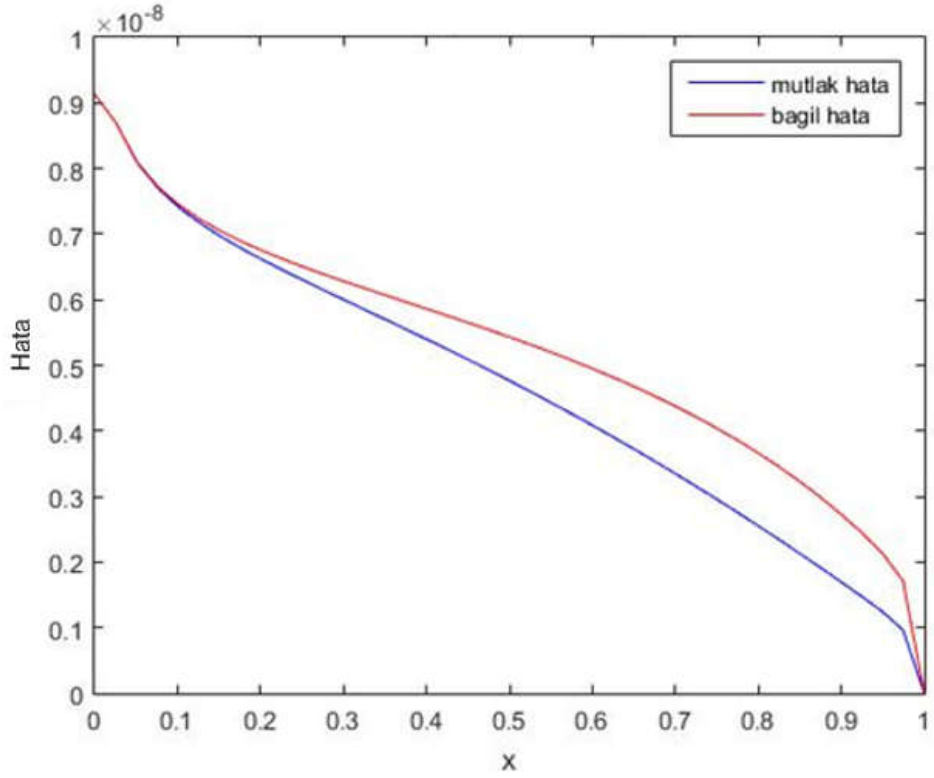
Aşağıdaki grafikler farklı n değerleri için SF4 sonuçlarını göstermektedir:



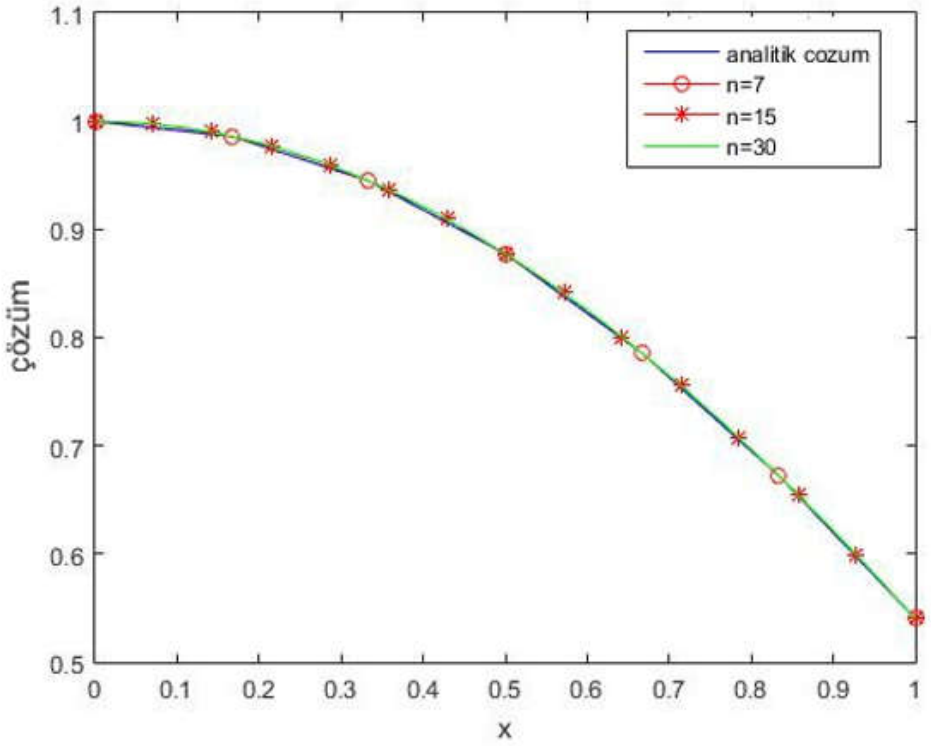
Şekil 3.5 $n = 10$ için SF4 hata grafiği



Şekil 3.6 $n = 20$ için SF4 hata grafiği



Şekil 3.7 $n = 40$ için SF4 hata grafiği



Şekil 3.8 Farklı n değerleri için SF4 çözümleri

Yeni bir öneri olarak 4. mertebe sonlu farklar yöntemi için $i = 2$ için 2. mertebe ileri fark yaklaşımı ve $i = n - 1$ için 2. mertebe geri fark yaklaşımı uygulanabilir.

(3.6) denklemine yukarıdaki tanım uygulandığında aşağıdaki denklemler elde edilir:

$i = 2$ için

$$x_i \frac{2y_i - 5y_{i+1} + 4y_{i+2} - y_{i+3}}{h^2} + \frac{\frac{-3}{2}y_i + 2y_{i+1} - \frac{1}{2}y_{i+2}}{h} + x_i cosx_i + sinx_i = 0 \qquad (3.15)$$

$i = 3, 4, \ldots, n - 2$ için

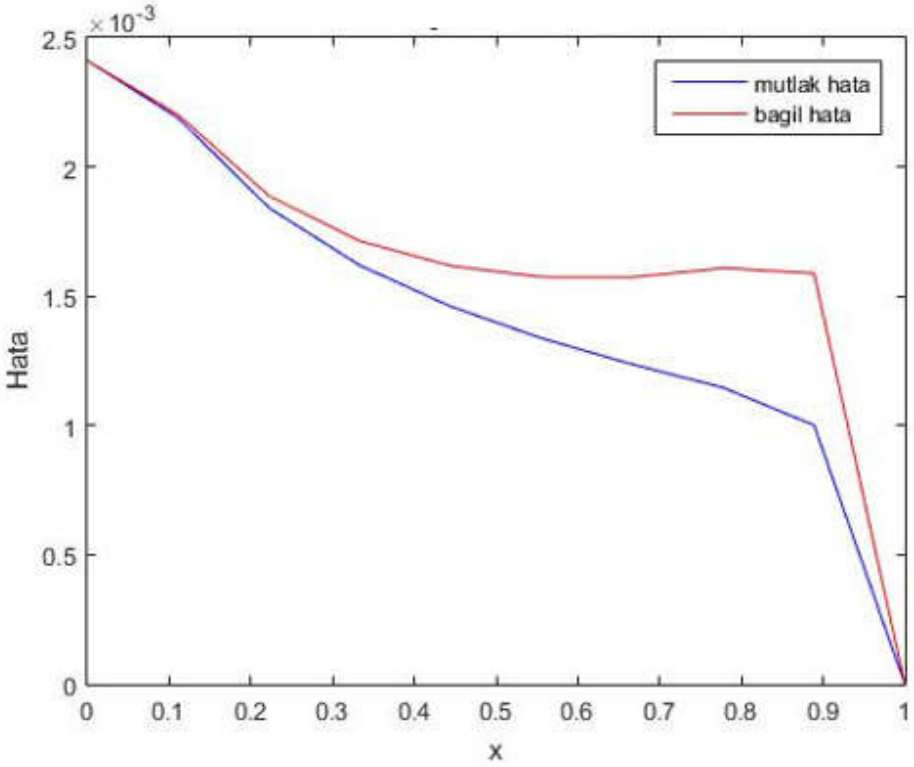
$$x_i \frac{\frac{-1}{12}y_{i-2} + \frac{4}{3}y_{i-1} - \frac{5}{2}y_i - \frac{4}{3}y_{i+1} - \frac{1}{12}y_{i+2}}{h^2} + \frac{\frac{1}{12}y_{i-2} - \frac{2}{3}y_{i-1} + \frac{2}{3}y_{i+1} - \frac{1}{12}y_{i+2}}{h} + x_i cosx_i + sinx_i = 0 \qquad (3.16)$$

$i = n - 1$ için

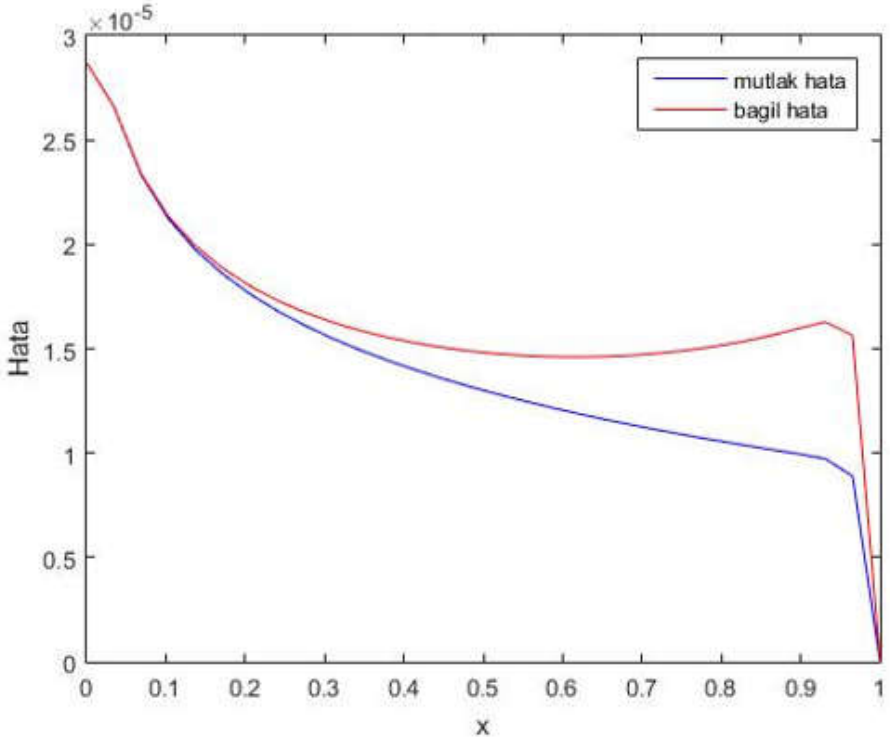
$$x_i \frac{2y_i - 5y_{i-1} + 4y_{i-2} - y_{i-3}}{h^2} + \frac{\frac{3}{2}y_i - 2y_{i-1} + \frac{1}{2}y_{i-2}}{h} + x_i cosx_i + sinx_i = 0 \qquad (3.17)$$

Yapılan bu düzenleme ve düzenlenen sınır koşullarına göre (3.11), (3.15), (3.16) ve (3.17) denklemleri (3.6) denkleminde yerine yazıldığında diferansiyel denklem içeren ifade $(n - 2)$ bilinmeyenli $(n - 2)$ denklemden oluşan bir cebirsel denklem sistemine dönüşür. Bu cebirsel denklem sistemini çözmek için bilinen iterasyon yöntemleri kullanılabilir. Bu çalışmada cebirsel denklem sisteminin çözümünde MATLAB fonksiyonları kullanılmıştır.

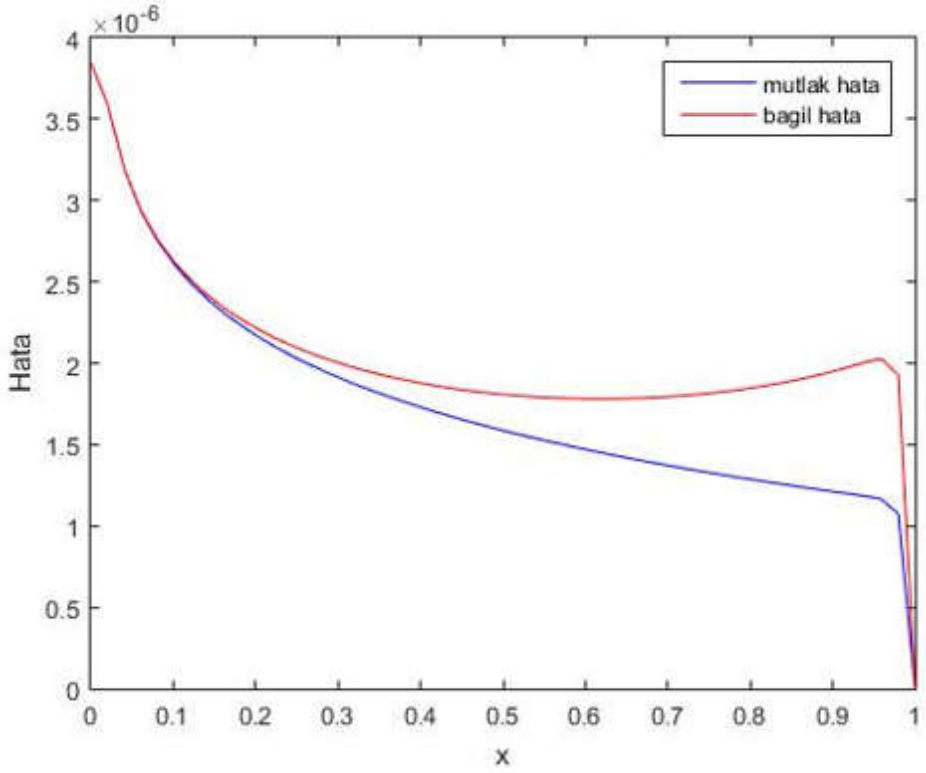
Aşağıdaki grafikler farklı n değerleri için SF4 sonuçlarını göstermektedir:



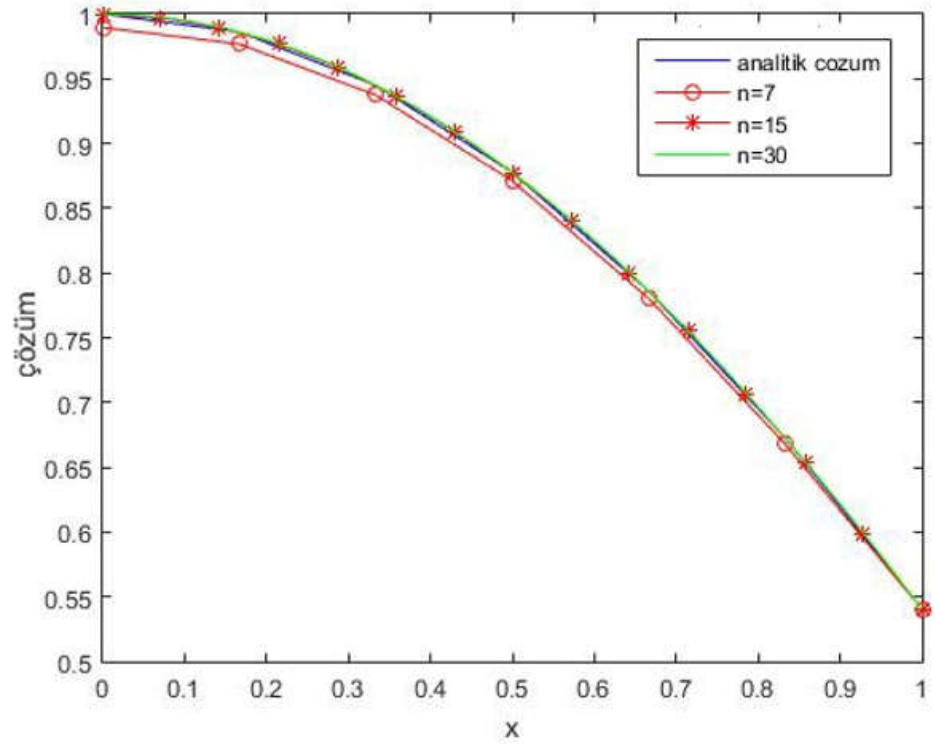
Şekil 3.9 $n = 10$ için SF4 hata grafiği



Şekil 3.10 $n = 30$ için SF4 hata grafiği



Şekil 3.11 $n = 50$ için SF4 hata grafiği



Şekil 3.12 Farklı n değerleri için SF4 çözümleri

3.1.2 Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY) ile Çözümü

Bu çalışma boyunca Galerkin sonlu elemanlar yöntemi kullanılmıştır.

$0 < x \leq 1$ aralığı n tane düzgün alt aralığa bölündüğünde $i = 1, 2, \ldots, n$ tane denklem elde edilir. Burada adım uzunlukları $h = 1/n$ şeklindedir Sınır koşulları göz önüne alındığında $y'(0) = 0$ değeri $y_1' = 0$ değerine karşılık gelirken $y(1) = cos1$ değeri de $y_n = cos1$ değerine karşılık gelmektedir.

Seçilen örnek problem için (2.12) numaralı denkleme göre $p(x) = x$, $q(x) = 1$, $r(x) = 0$ ve $f(x) = -xcosx - sinx$ şeklindedir. Burada eşitliğin sağ tarafı sıfıra eşitlenip tamamı $p(x)$ fonksiyonuna bölünerek hata fonksiyonu (3.7) denklemini elde edilecektir.

Daha önce 2.2 bölümünde bahsedildiği gibi $\omega(x)$ test fonksiyonu seçilir, ardından test fonksiyonu ile hata fonksiyonun çarpımının integrali sıfıra eşitlenir:

$$\int_0^1 \left(y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + cosx + \frac{sinx}{x}\right).w(x)dx = 0 \qquad (3.18)$$

Böylece Galerkin yöntemi ile varyasyonel ifade (2.15)teki gibi bulunur:

$$\int_0^1 (-y'(x).w'(x) + \frac{1}{x}y'(x).w(x) + (cosx + \frac{sinx}{x}).w(x))dx = 0 \qquad (3.19)$$

$w(x)$ ve $y(x)$ fonksiyonları, $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \psi_i$ ve $y = \sum_{i=1}^{n} \beta_j \psi_j$ şeklinde tanımlanır. Seçilen $w(x)$ ve $y(x)$ değerleri Galerkin yöntemi ile elde edilen (3.19) denkleminde yerine yazılır ve aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$-\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_j \psi'_j\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \psi'_i\right)dx + \int_0^1 \frac{1}{x}\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_j \psi'_j\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \psi_i\right)dx + \int_0^1 \left(cosx + \frac{sinx}{x}\right).\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \psi_i\right)dx = 0 \qquad (3.20)$$

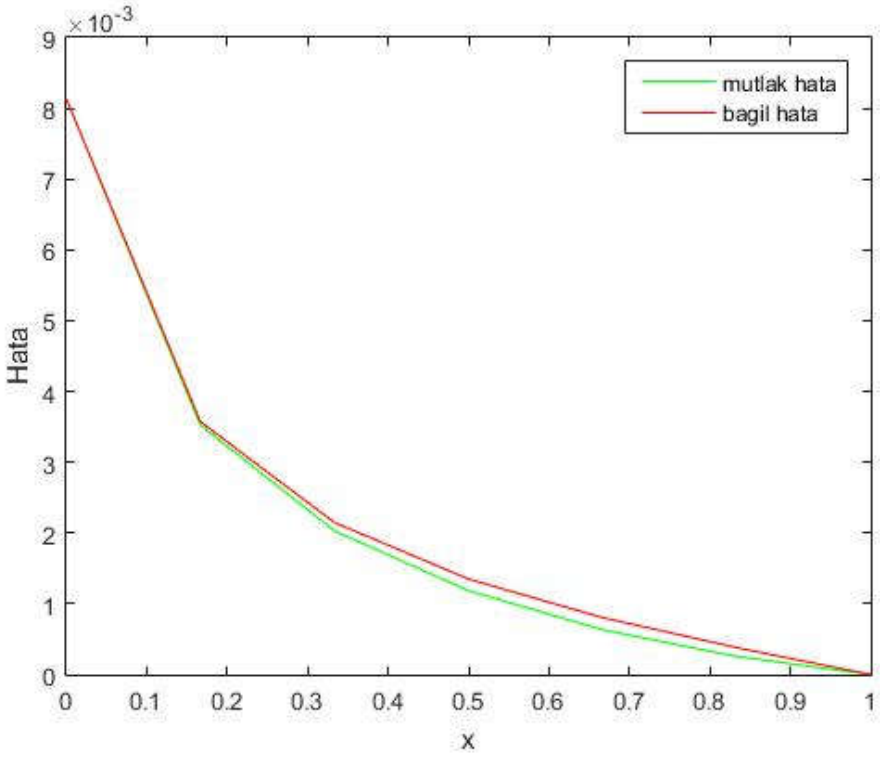
Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left\{\sum_{i=1}^{n} \beta_j \left[\int_0^1 (-\psi'_j \psi'_i + \frac{1}{x}\psi'_j \psi_i)dx\right] + \int_0^1 (cosx + \frac{sinx}{x})\psi_i dx\right\} = 0 \quad (3.21)$$

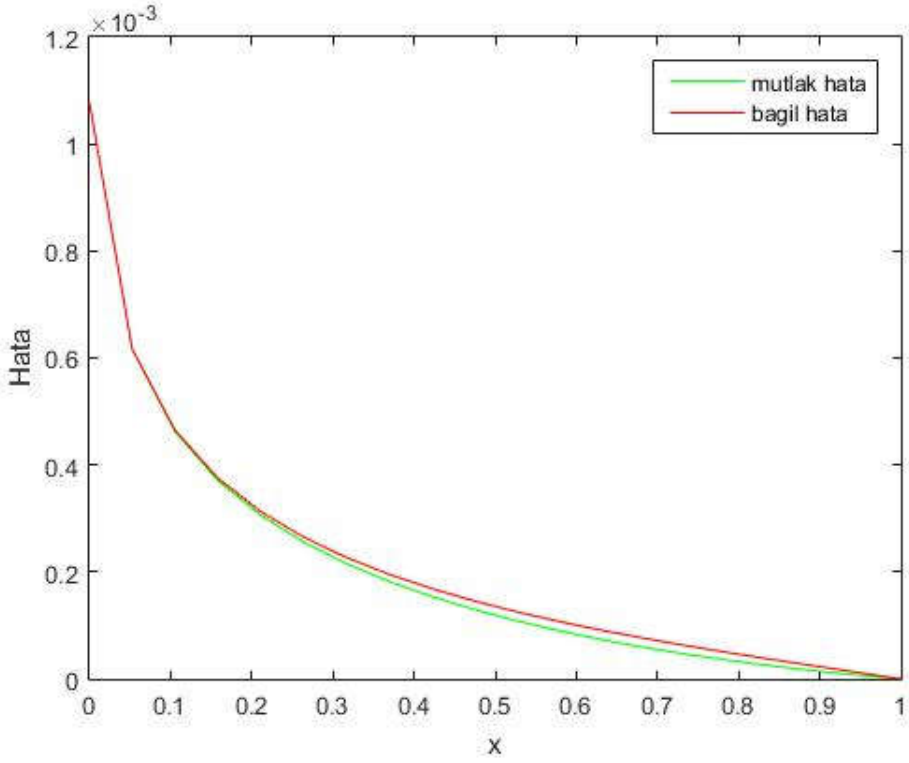
bulunur. Burada

$\int_0^1 (-\psi'_j \psi'_i + \frac{1}{x}\psi'_j \psi_i)dx = K_{ij}$ ve $\int_0^1 (cosx + \frac{sinx}{x})\psi_i dx = f_i$ fonksiyonlarıdır.

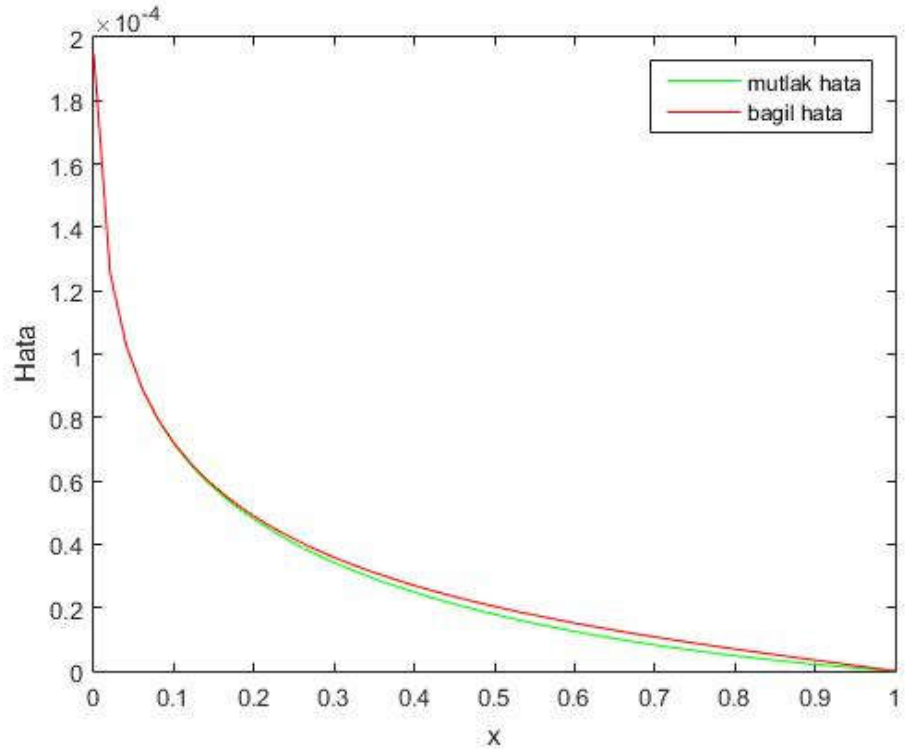
2.2 bölümündeki işlem adımları tamamlandıktan sonra sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak farklı n değerleri için aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:



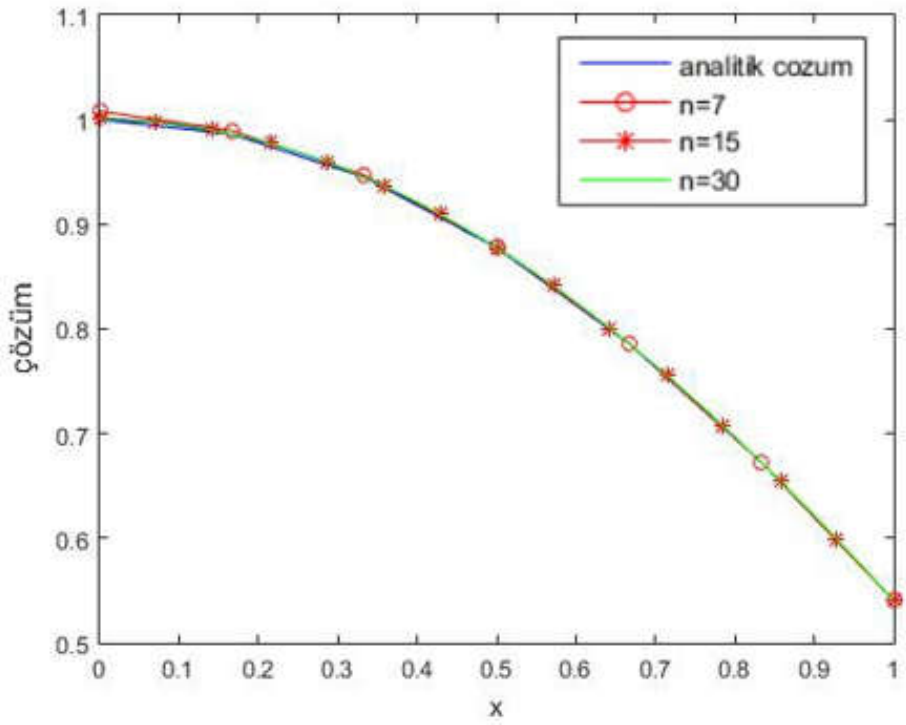
Şekil 3.13 $n = 7$ için SEY hata grafiği



Şekil 3.14 $n = 20$ için SEY hata grafiği



Şekil 3.15 $n = 50$ için SEY hata grafiği



Şekil 3.16 Farklı n değerleri için SEY çözümleri

3.1.3 Diferansiyel Kareleme Yöntemi ile Çözümü

Bu çalışma boyunca polinom bazlı diferansiyel kareleme ve Fourier açılımı bazlı diferansiyel kareleme yöntemleri kullanılmıştır.

$0 < x \leq 1$ aralığı n tane düzgün alt aralığa bölündüğünde $i = 1, 2, \ldots, n$ tane denklem elde edilir. Burada adım uzunlukları $h = 1/n$ şeklindedir Sınır koşulları göz önüne alındığında $y'(0) = 0$ değeri $y_1' = 0$ değerine karşılık gelirken $y(1) = cos1$ değeri de $y_n = cos1$ değerine karşılık gelmektedir.

3.1.3.1 Polinom Bazlı Diferansiyel Kareleme Yöntemi (PDKY) ile Çözümü

$y_1' = 0$ değeri için polinom bazlı diferansiyel kareleme yöntemi uygulandığında

$$y_1 = \frac{-\sum_{k=2}^{N-1} \omega_{1k}^{(1)} . y_k - \omega_{1N}^{(1)} . y_N}{\omega_{11}^{(1)}} \text{ ve } y_n = cos1 \qquad (3.22)$$

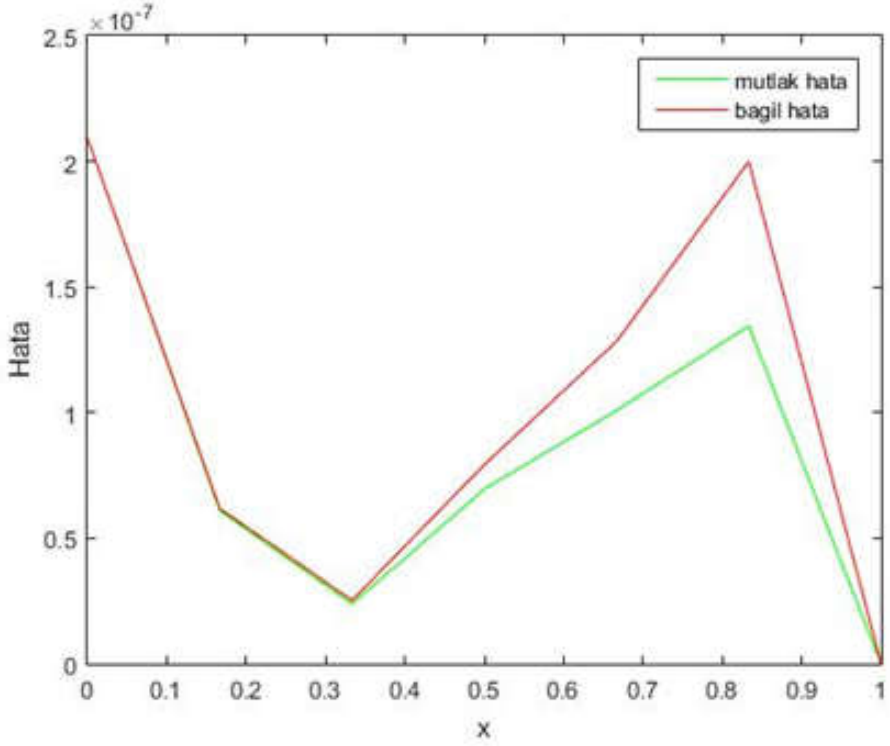
elde edilir. Burada $\omega_{1k}^{(1)}$ ağırlıklı katsayılar (2.26) numaralı formüller ile hesaplanır. Sınır koşulları dışında kalan noktalar için de polinom bazlı diferansiyel kareleme

yöntemi (3.4) denklemine uygulandığında $i = 2, 3, \ldots, n-1$ için aşağıdaki $(N-2) \times (N-2)$ formunda bir cebirsel denklem sistemi elde edilir:

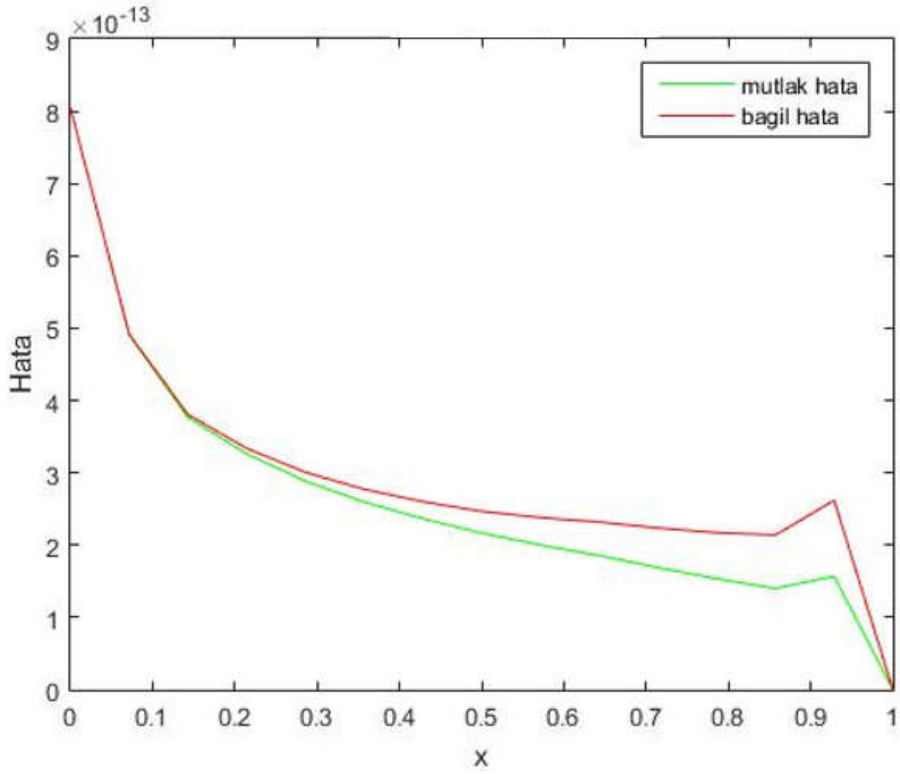
$$\sum_{k=1}^{N} \omega_{ik}^{(2)} y_k + \frac{1}{x_i} \sum_{k=1}^{N} \omega_{ik}^{(1)} y_k + cosx + \frac{sinx}{x} = 0, \quad i = 2, 3, \ldots, N-1 \quad (3.23)$$

Burada $\omega_{ik}^{(2)}$ ve $\omega_{ik}^{(1)}$ lineer ağırlıklı katsayıları (2.26) ve (2.27) numaralı formüller ile hesaplanır. Bu cebirsel denklem sistemini çözmek için bilinen iterasyon yöntemleri kullanılabilir. Bu çalışmada cebirsel denklem sisteminin çözümünde MATLAB fonksiyonları kullanılmıştır.

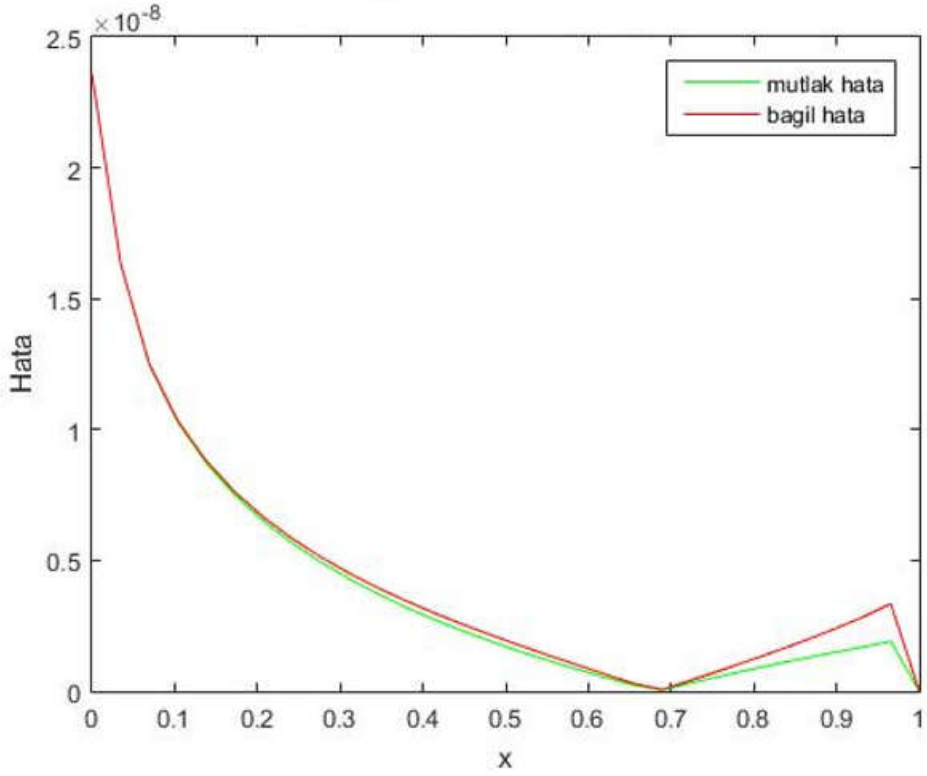
Aşağıdaki grafikler farklı n değerleri için PDKY sonuçlarını göstermektedir:



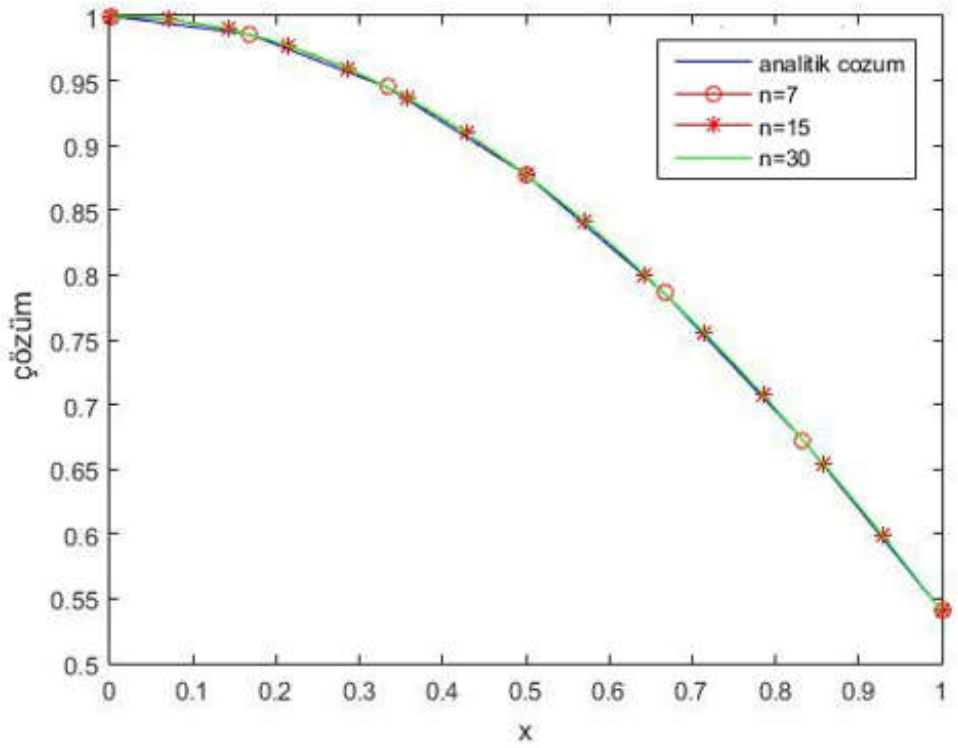
Şekil 3.17 $n = 7$ için PDKY hata grafiği



Şekil 3.18 $n = 15$ için PDKY hata grafiği



Şekil 3.19 $n = 30$ için PDKY hata grafiği



Şekil 3.20 Farklı n değerleri için PDKY çözümleri

3.1.3.2 Fourier Açılımı Bazlı Diferansiyel Kareleme Yöntemi (FDKY) ile Çözümü

$y_1' = 0$ değeri için Fourier açılımı bazlı diferansiyel kareleme yöntemi uygulandığında

$$y_1 = \frac{-\sum_{k=2}^{N-1} a_{1k}.y_k - a_{1N}.y_N}{a_{11}} \text{ ve } y_n = cos1 \tag{3.24}$$

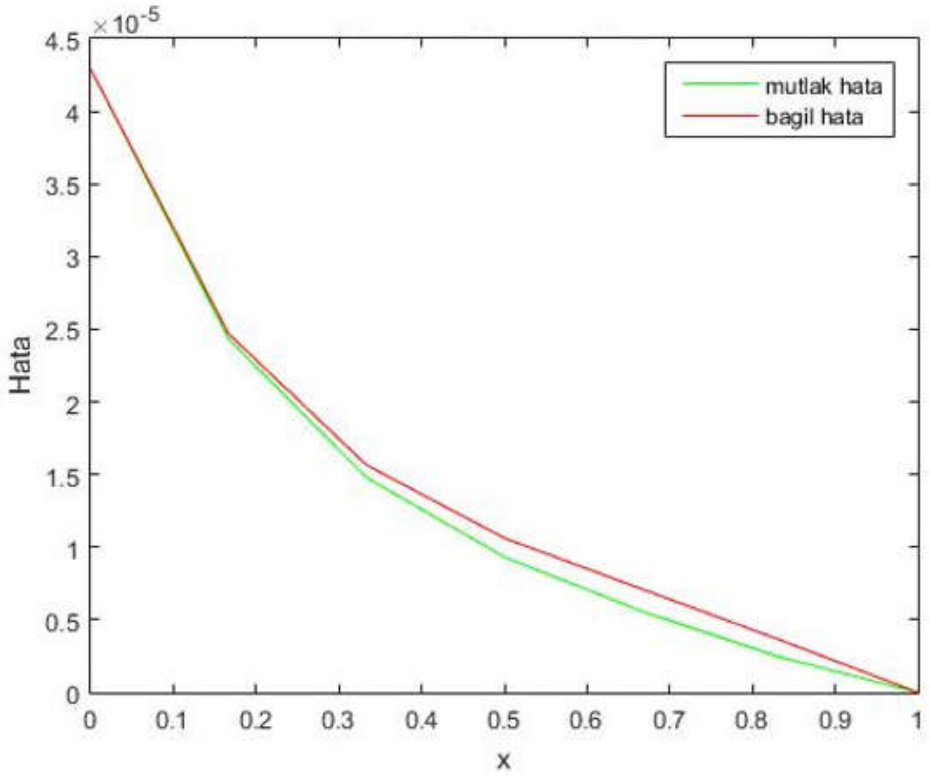
elde edilir. Burada a_{1k} ağırlıklı katsayılar (2.47) ve (2.48)'deki formüller ile hesaplanır. Sınır koşulları dışında kalan noktalar için Fourier açılımı bazlı diferansiyel kareleme yöntemi (3.4) denklemine uygulandığında $i = 2, 3, \ldots, n-1$ için aşağıdaki $(N-2) \times (N-2)$ formunda bir cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$\sum_{k=1}^{N} b_{ik} y_k + \frac{1}{x_i} \sum_{k=1}^{N} a_{ik} y_k + cosx + \frac{sinx}{x} = 0, \quad i = 2, 3, \ldots, N-1 \tag{3.25}$$

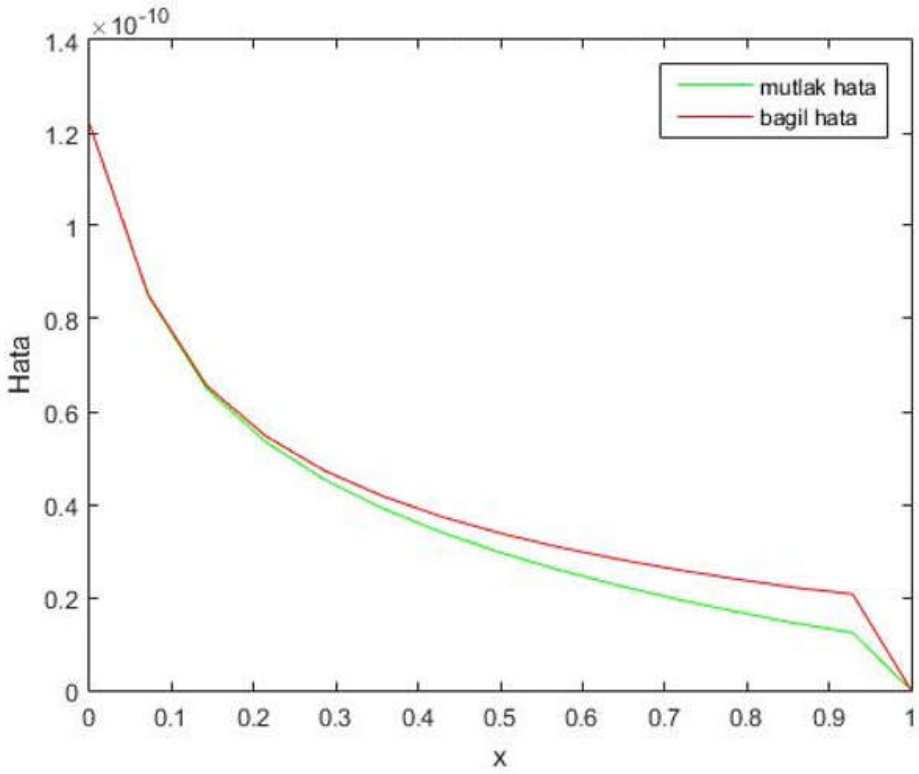
Burada b_{ik} ve a_{ik} lineer ağırlıklı katsayıları sırasıyla (2.49), (2.50) ve (2.47), (2.48) numaralı formüller ile hesaplanır. Bu cebirsel denklem sistemini çözmek için bilinen iterasyon yöntemleri kullanılabilir. Bu çalışmada cebirsel denklem sisteminin

çözümünde MATLAB fonksiyonları kullanılmıştır. Bu iki yöntem arasındaki en temel farklılık lineer ağırlıklı katsayılar hesaplanış şeklidir.

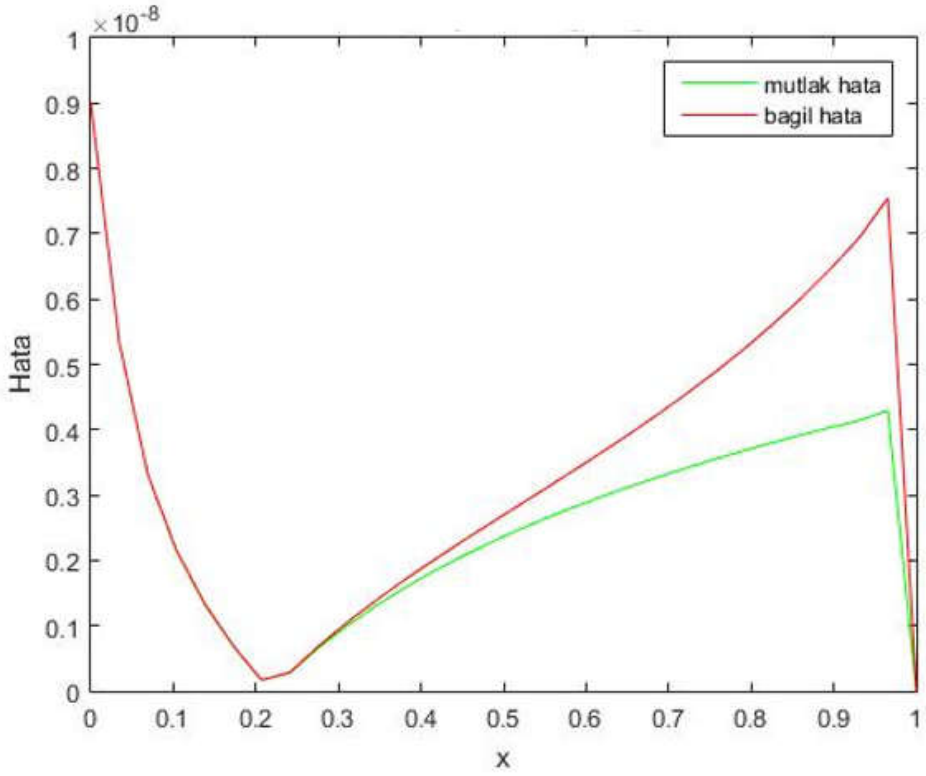
Aşağıdaki grafikler farklı n değerleri için FDKY sonuçlarını göstermektedir:



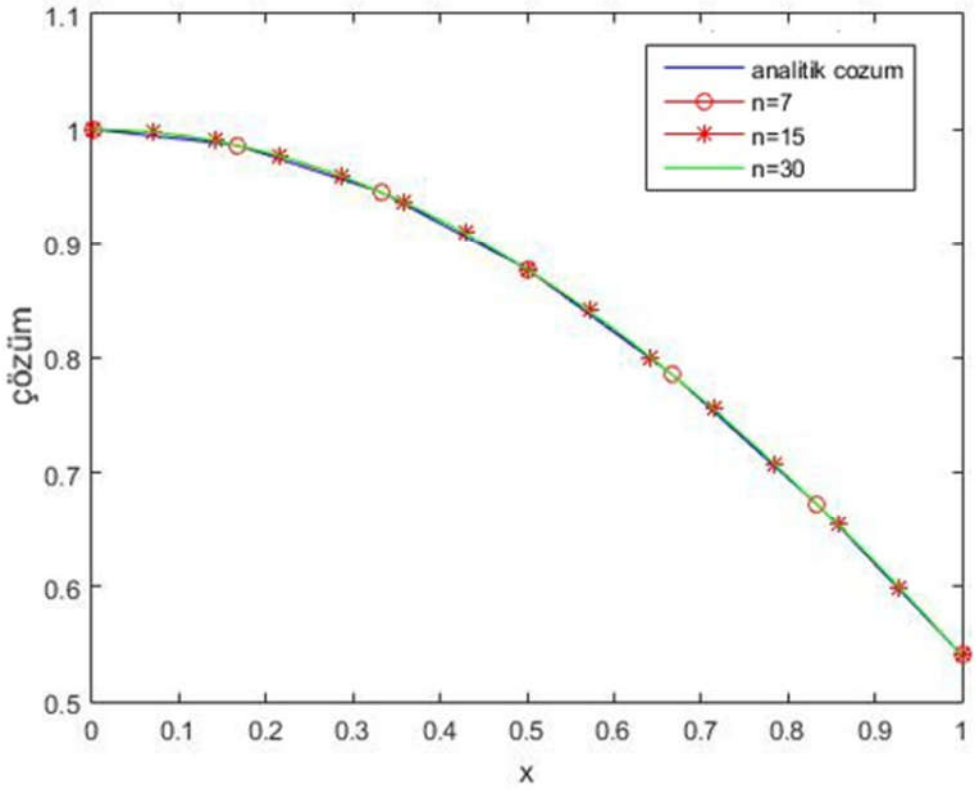
Şekil 3.21 $n = 7$ için FDKY hata grafiği



Şekil 3.22 $n = 15$ için FDKY hata grafiği



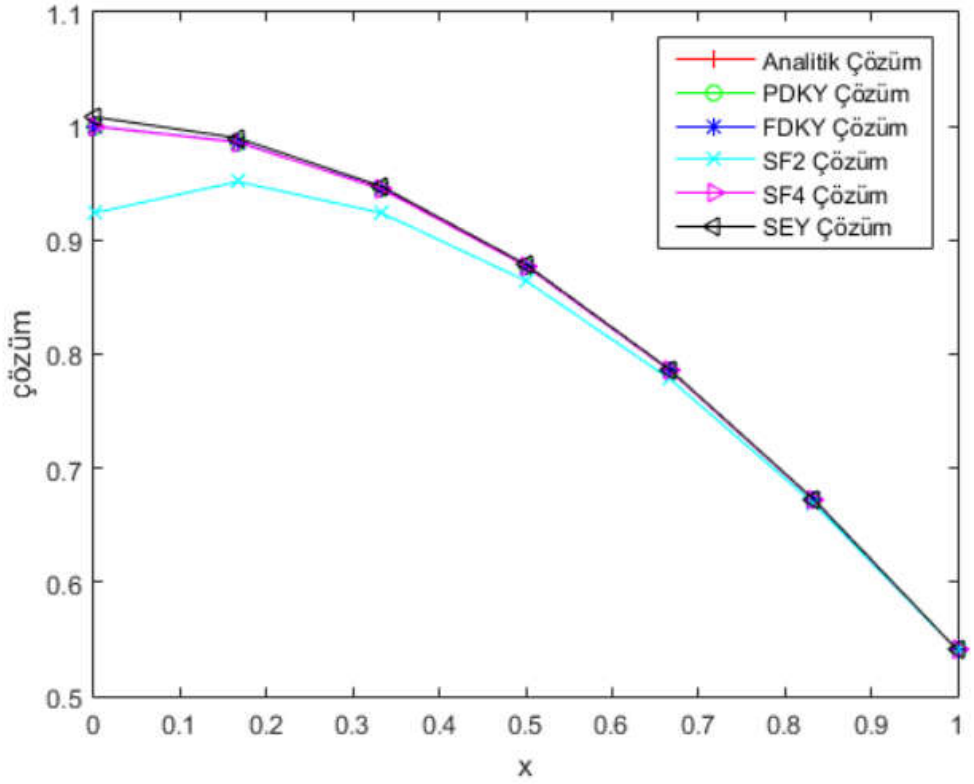
Şekil 3.23 $n = 30$ için FDKY hata grafiği



Şekil 3.24 Farklı n değerleri için FDKY çözümleri

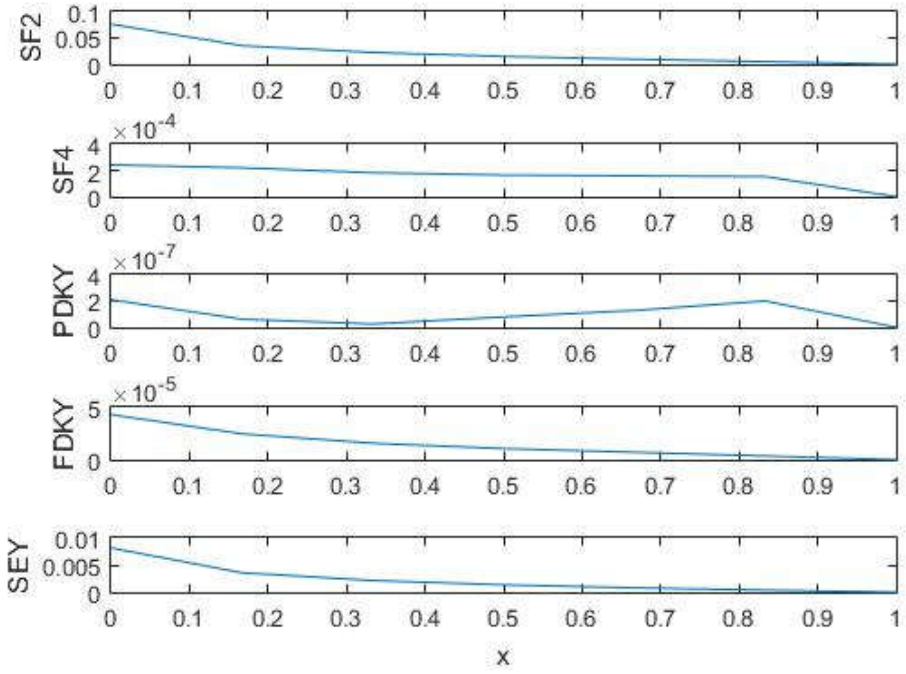
3.1.4 Yöntemlerin Karşılaştırılması

(3.5) sınır koşullarına sahip (3.4) denkleminin sayısal çözümleri yukarıdaki sonuçlarda tek tek incelenmiştir. Aşağıda verilen grafik $n = 7$ grid değeri için kullanılan tüm yöntemlerin sonuçlarını göstermektedir:

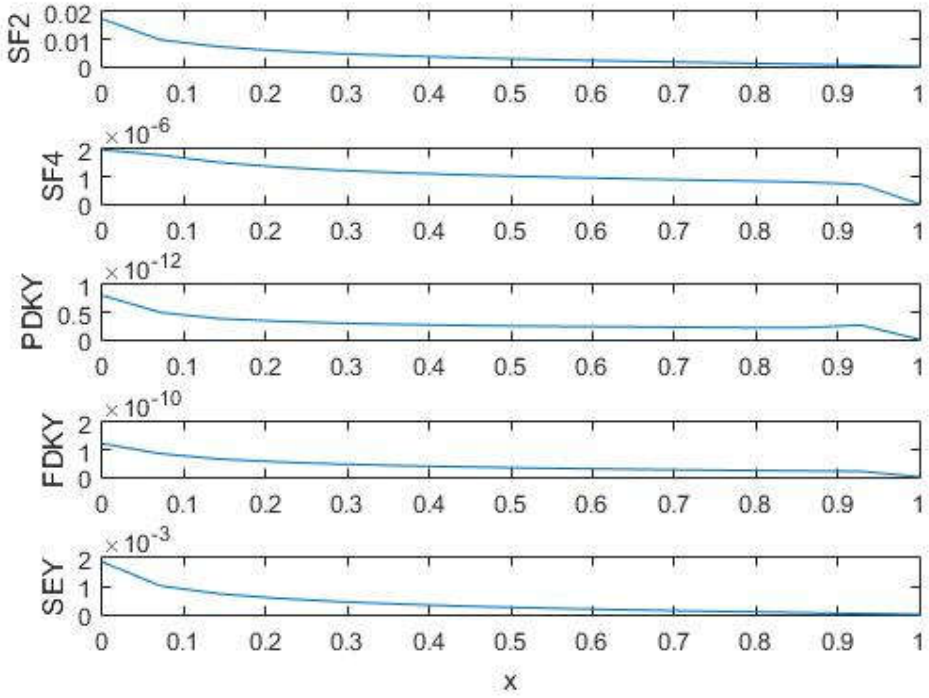


Şekil 3.25 $n = 7$ için tüm çözümler

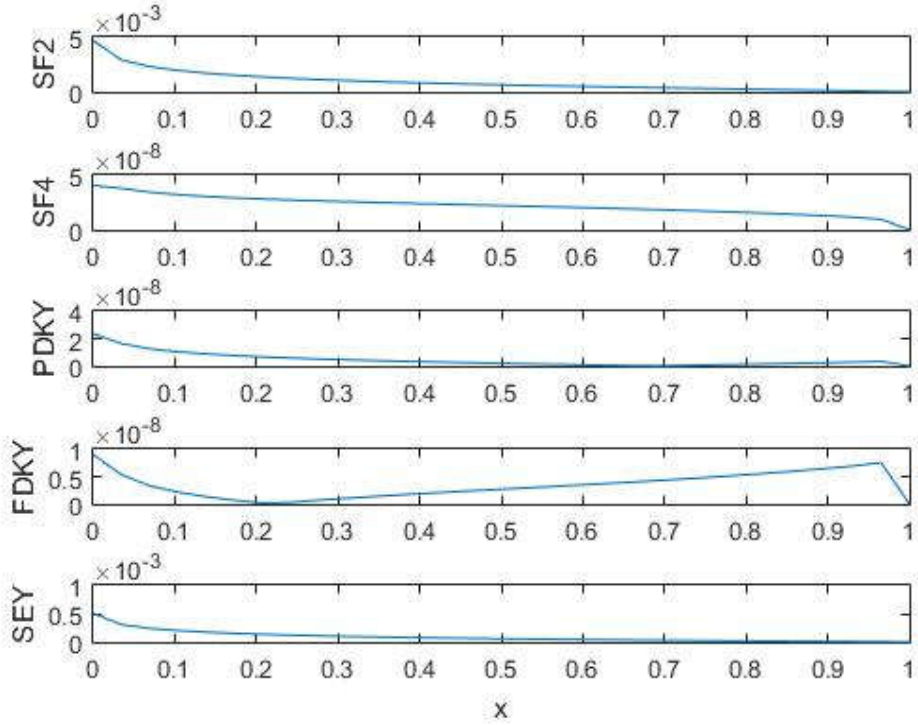
Aşağıda verilen grafikler sırasıyla $n = 7, n = 15$ ve $n = 30$ grid değeri için kullanılan tüm yöntemlerin bağıl hata karşılaştırmasını göstermektedir:



Şekil 3.26 $n = 7$ için bağıl hata karşılaştırması



Şekil 3.27 $n = 15$ için bağıl hata karşılaştırması



Şekil 3.28 $n = 30$ için bağıl hata karşılaştırması

Aşağıdaki tablolarda $n = 7$ ve $n = 15$ için analitik çözüm, sayısal çözümler ve bağıl hata değerleri verilmiştir:

Tablo 3.1 $n = 7$ için karşılaştırma değerleri

x	Analitik çözüm	SF2	SF4	SEY	PDKY	FDKY	SF2 Bağıl Hata	SF4 Bağıl Hata	SEY Bağıl Hata	PDKY Bağıl Hata	FDKY Bağıl Hata
0	1	0.923	0.999	1.008	0.999	1	7.00E-02	2.00E-04	8.00E-03	2.00E-07	4.00E-05
0.166	0.986	0.951	0.985	0.989	0.986	0.986	3.00E-02	2.00E-04	3.00E-03	6.00E-08	2.00E-05
0.333	0.944	0.923	0.944	0.946	0.944	0.945	2.00E-02	1.00E-04	2.00E-03	2.00E-08	1.00E-05
0.5	0.877	0.864	0.877	0.878	0.877	0.877	1.00E-02	1.00E-04	1.00E-03	7.00E-08	1.00E-05
0.666	0.785	0.778	0.785	0.786	0.785	0.785	9.00E-03	1.00E-04	8.00E-04	1.00E-07	7.00E-06
0.833	0.672	0.669	0.672	0.672	0.672	0.672	4.00E-03	1.00E-04	3.00E-04	2.00E-07	3.00E-06
1	0.54	0.54	0.54	0.54	0.54	0.54	0	0	0	0	0

Tablo 3.2 $n = 15$ için karşılaştırma değerleri

x	Analitik çözüm	SF2	SF4	SEY	PDKY	FDKY	SF2 Bağıl Hata	SF4 Bağıl Hata	SEY Bağıl Hata	PDKY Bağıl Hata	FDKY Bağıl Hata
0	1	0.982	1	1.001	0.999	1	1.00E-02	1.90E-06	1.00E-03	8.00E-13	1.00E-10
0.071	0.997	0.987	0.997	0.998	0.997	0.997	9.00E-03	1.70E-06	1.00E-03	4.90E-13	8.00E-11
0.214	0.977	0.971	0.977	0.977	0.977	0.977	5.00E-03	1.30E-06	5.00E-04	3.30E-13	5.00E-11
0.428	0.909	0.906	0.909	0.909	0.909	0.909	3.00E-03	1.00E-06	3.00E-04	2.60E-13	3.00E-11
0.5	0.877	0.875	0.877	0.877	0.877	0.877	2.00E-03	1.00E-06	2.00E-04	2.40E-13	3.00E-11
0.571	0.841	0.839	0.841	0.841	0.841	0.841	2.00E-03	9.00E-07	2.00E-04	2.30E-13	3.00E-11
0.714	0.755	0.754	0.755	0.755	0.755	0.755	1.00E-03	8.00E-07	1.00E-04	2.10E-13	2.00E-11
0.928	0.598	0.598	0.598	0.598	0.598	0.598	4.00E-04	7.00E-07	2.00E-05	2.60E-13	2.00E-11
1	0.54	0.54	0.54	0.54	0.54	0.5403	0	0	0	0	0

Yukarıdaki grafik ve tablolar incelendiğinde, polinom bazlı diferansiyel kareleme yönteminin hata değerleri daha az sayıda grid noktası kullanıldığında diğerlerinden daha kesin sonuçlar verdiği görülmektedir. Grid sayısı arttığında, Fourier açılımı bazlı diferansiyel kareleme yöntemi ve 4. mertebe sonlu farklar yöntemi de polinom bazlı diferansiyel kareleme yöntemi kadar hassas sonuçlar vermektedir. Ayrıca kullanılan yöntemler arasında en az hassas sonuçlar veren yöntem 2. mertebe sonlu farklar yöntemidir. Ancak literatür verilerine göre, grid sayısı çok fazla arttığında benzer bir tartışmanın tekrar yapılabileceği bilinmektedir.

3.2 Problem 2'nin Sayısal Çözümü ve Karşılaştırılması

Bu bölümde amaç analitik çözümü bilinen lineer olmayan yapıdaki iki-noktalı singüler sınır değer problemini üç farklı yöntem ile çözmek ve yöntemlerin etkilerini ve hassasiyetlerini karşılaştırmaktır. Yaklaşık çözümlerin performansı kesin ve mutlak hatalar ile ölçülmüştür.

Genel formülü (3.1)-(3.3) denklemlerinde tanımlanan iki-noktalı singüler sınır değer problemi özel olarak aşağıdaki şekilde tanımlansın. Singh ve Kumar[28]:

$$(x^{\alpha_0}y')' = \beta_0 x^{\alpha_0+\beta_0-2}(\beta_0 x^{\beta_0}e^{y} - \alpha_0 - \beta_0 + 1),\ 0 < x \leq 1 \qquad (3.26)$$

sınır koşulları

$$y(0) = -ln4,\ y(1) = -ln5 \qquad (3.27)$$

şeklinde verilsin. Bu denklemin analitik çözümünün $y(x) = \ln(\frac{1}{4} + x^{\beta_0})$ olduğu bilinmektedir. Burada $0 \leq \alpha_0 < 1$dir. Şimdi, bu bölümde bu problemin çözümü $\alpha_0 = 0.5$, $\beta_0 = 2$ için ele alınacaktır.

3.2.1 Sonlu Farklar Yöntemi ile Çözümü

Bu çalışma boyunca sonlu farklar yöntemi 2. mertebe sonlu fark ve 4. mertebe sonlu fark olmak üzere iki farklı mertebe için ayrı ayrı hesaplanmıştır.

3.2.1.1 2. Mertebe Sonlu Farklar Yöntemi (SF2) ile Çözümü

(3.26) denklemi düzenlendiğinde

$$y'' + \frac{\alpha_0}{x} y' - \beta_0 x^{\beta_0 - 2}(\beta_0 x^{\beta_0} e^y - \alpha_0 - \beta_0 + 1) = 0 \qquad (3.28)$$

denklemi elde edilir. Burada sınır koşulları (3.27) denkleminde verilmiştir.

$0 < x \leq 1$ aralığı n tane düzgün alt aralığa bölündüğünde $i = 1, 2, \ldots, n$ tane denklem elde edilir. Burada adım uzunlukları $h = 1/n$ şeklindedir. Sınır koşulları göz önüne alındığında $y(0) = -ln4$ değeri $y_1 = -ln4$ değerine karşılık gelirken $y(1) = -ln5$ değeri de $y_n = -ln5$ değerine karşılık gelmektedir.

Düzenlenen sınır koşulları aşağıdaki gibidir:

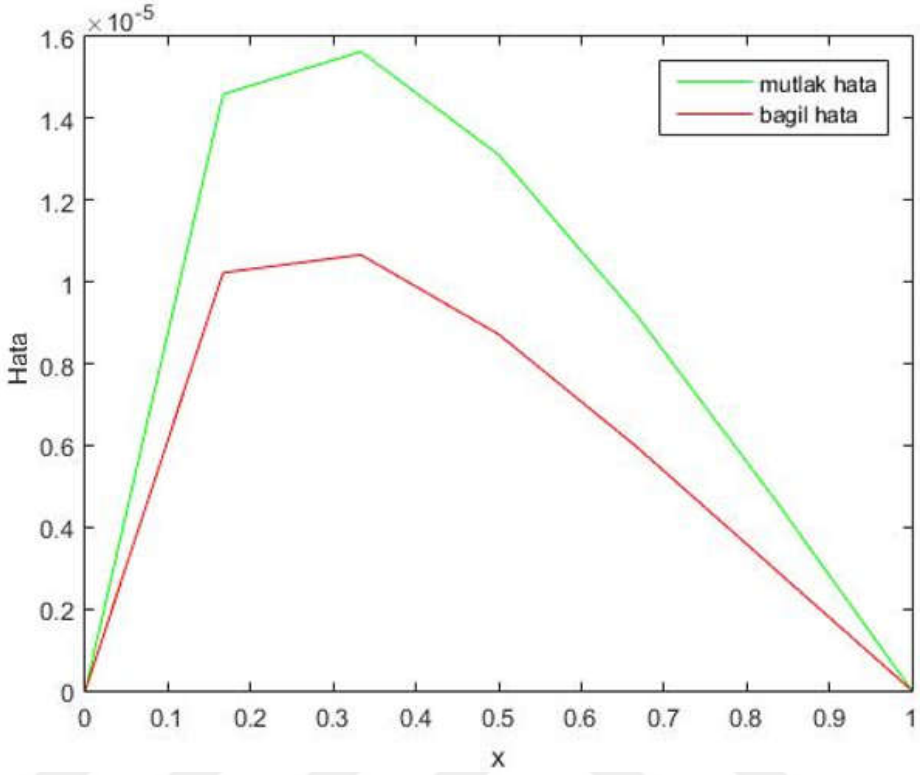
$$y_1 = -ln4 \quad \text{ve} \quad y_n = -ln5 \qquad (3.29)$$

Sınır koşulları dışında kalan noktalar için merkezi fark yaklaşımı denklemdeki türevlerde yerine yazıldığında (3.28) denklemi $i = 2, 3, \ldots, n-1$ için aşağıdaki formda olur:

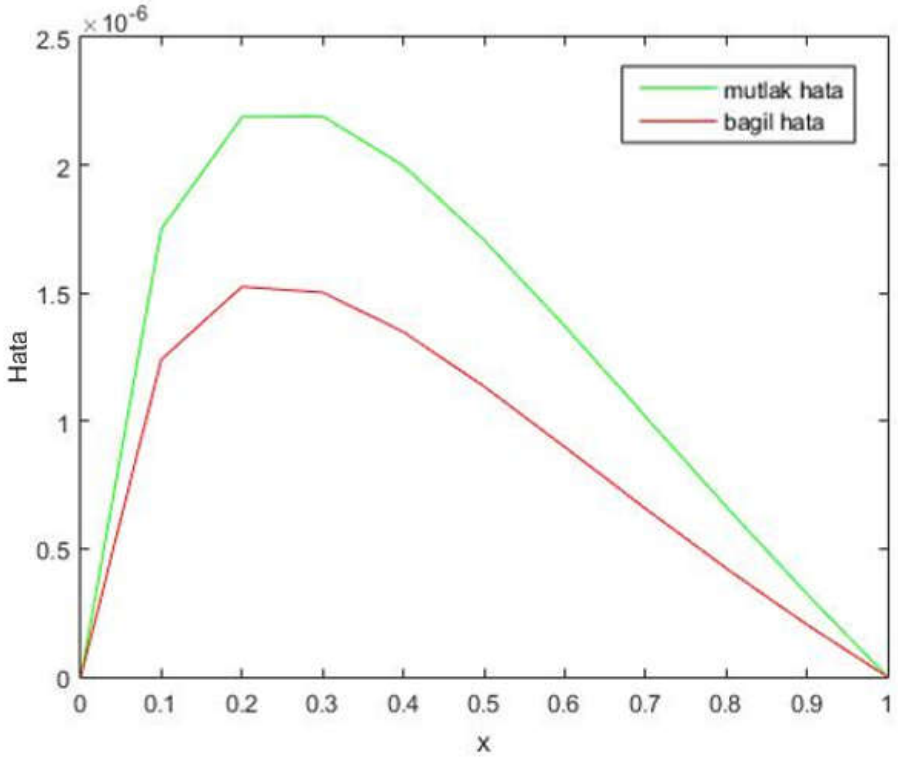
$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + \frac{\alpha_0}{x_i} \frac{\frac{-1}{2} y_{i-1} + \frac{1}{2} y_{i+1}}{h} - \beta_0 {x_i}^{\beta_0 - 2}(\beta_0 {x_i}^{\beta_0} e^y - \alpha_0 - \beta_0 + 1) = 0 \qquad (3.30)$$

Yapılan bu düzenleme ve düzenlenen sınır koşullarına göre (3.29) ve (3.30) denklemleri (3.28) denkleminde yerine yazıldığında diferansiyel denklem içeren ifade $(n-2)$ bilinmeyenli $(n-2)$ denklemden oluşan bir cebirsel denklem sistemine dönüşür. Bu cebirsel denklem sistemini çözmek için bilinen iterasyon yöntemleri kullanılabilir. Bu çalışmada cebirsel denklem sisteminin çözümünde MATLAB fonksiyonları kullanılmıştır.

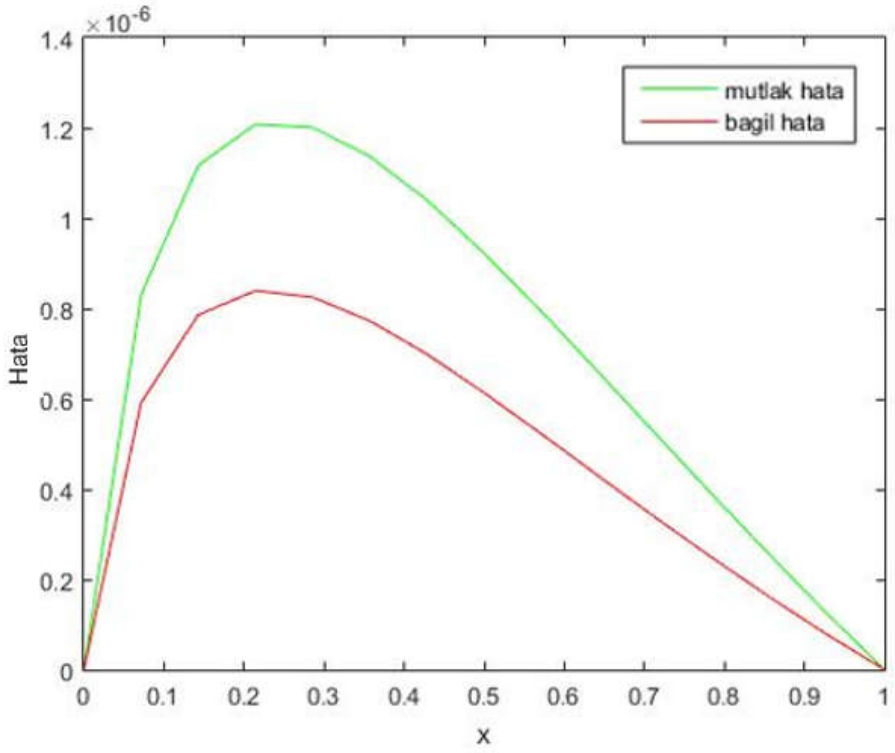
Aşağıdaki grafikler farklı n değerleri için SF2 sonuçlarını göstermektedir:



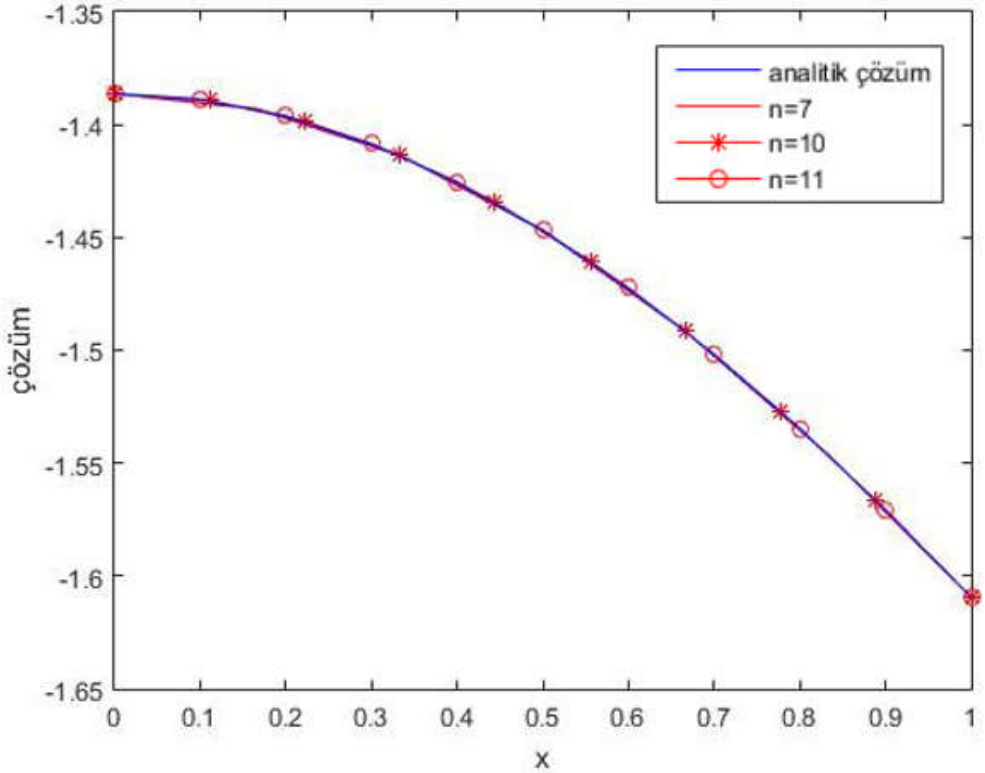
Şekil 3.29 $n = 7$ için SF2 hata grafiği



Şekil 3.30 $n = 11$ için SF2 hata grafiği



Şekil 3.31 $n = 15$ için SF2 hata grafiği



Şekil 3.32 Farklı n değerleri için SF2 çözümleri

3.2.1.2 4. Mertebe Sonlu Farklar Yöntemi (SF4) ile Çözümü

$0 < x \leq 1$ aralığı n tane düzgün alt aralığa bölündüğünde $i = 1, 2, \ldots, n$ tane denklem elde edilir. Burada adım uzunlukları $h = 1/n$ şeklindedir. Sınır koşulları göz önüne alındığında $y(0) = -ln4$ değeri $y_1 = -ln4$ değerine karşılık gelirken $y(1) = -ln5$ değeri de $y_n = -ln5$ değerine karşılık gelmektedir.

Düzenlenen sınır koşulları (3.29) denklemindeki gibidir.

Sınır koşulları dışında kalan noktalar için sonlu fark yaklaşımı denklemdeki türevlerde yerine yazılacaktır. Ancak 4. mertebe sonlu fark yaklaşımının yapısından ötürü ilk iki ve son iki noktasına merkezi fark yaklaşımı uygulanamaz. Sınır koşullarından dolayı $i = 1$ ve $i = n$ değerleri bilinen değerlerdir. $i = 2$ değeri için 4. mertebe ileri fark yaklaşımı, $i = n - 1$ için 4. mertebe geri fark yaklaşımı ve $i = 3, 4, \ldots, n - 2$ için 4. mertebe merkezi fark yaklaşımları (3.28) denkleminde yerine yazıldığında aşağıdaki denklem sistemleri elde edilir:

$i = 2$ için

$$\frac{\frac{15}{4}y_i - \frac{77}{6}y_{i+1} + \frac{107}{6}y_{i+2} - 13y_{i+3} + \frac{61}{12}y_{i+4} - \frac{5}{6}y_{i+5}}{h^2} + \frac{\alpha_0}{x_i}\frac{\frac{-25}{12}y_i + 4y_{i+1} - 3y_{i+2} + \frac{4}{3}y_{i+3} - \frac{1}{4}y_{i+4}}{h}$$

$$- \quad \beta_0 {x_i}^{\beta_0 - 2}({\beta_0 {x_i}^{\beta_0}} e^{y_i} - \alpha_0 - \beta_0 + 1) = 0 \qquad (3.31)$$

$i = 3, 4, \ldots, n - 2$ için

$$\frac{\frac{-1}{12}y_{i-2} + \frac{4}{3}y_{i-1} - \frac{5}{2}y_i - \frac{4}{3}y_{i+1} - \frac{1}{12}y_{i+2}}{h^2} + \frac{\alpha_0}{x_i} \cdot \frac{\frac{1}{12}y_{i-2} - \frac{2}{3}y_{i-1} + \frac{2}{3}y_{i+1} - \frac{1}{12}y_{i+2}}{h} - \beta_0 {x_i}^{\beta_0 - 2}({\beta_0 {x_i}^{\beta_0}} e^{y_i} -$$

$$\alpha_0 - \beta_0 + 1) = 0 \qquad (3.32)$$

$i = n - 1$ için

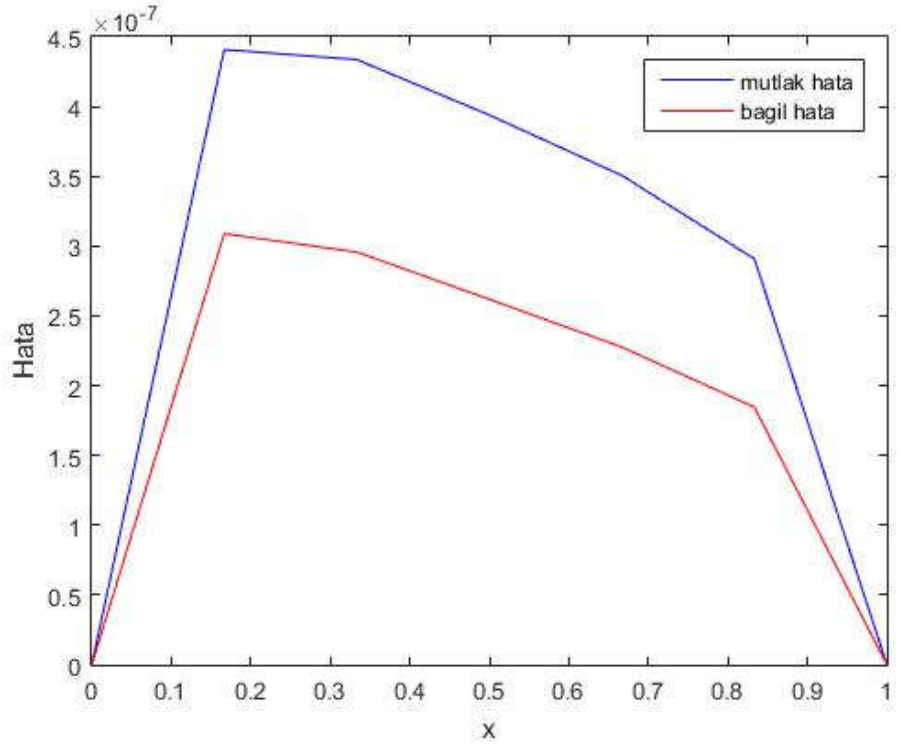
$$\frac{\frac{15}{4}y_{i-5} - \frac{77}{6}y_{i-4} + \frac{107}{6}y_{i-3} - 13y_{i-2} + \frac{61}{12}y_{i-1} - \frac{5}{6}y_i}{h^2} + \frac{\alpha_0}{x_i} \cdot \frac{\frac{25}{12}y_{i-4} - 4y_{i-3} + 3y_{i-2} - \frac{4}{3}y_{i-1} + \frac{1}{4}y_i}{h} -$$

$$\beta_0 {x_i}^{\beta_0 - 2}({\beta_0 {x_i}^{\beta_0}} e^{y_i} - \alpha_0 - \beta_0 + 1) = 0 \qquad (3.33)$$

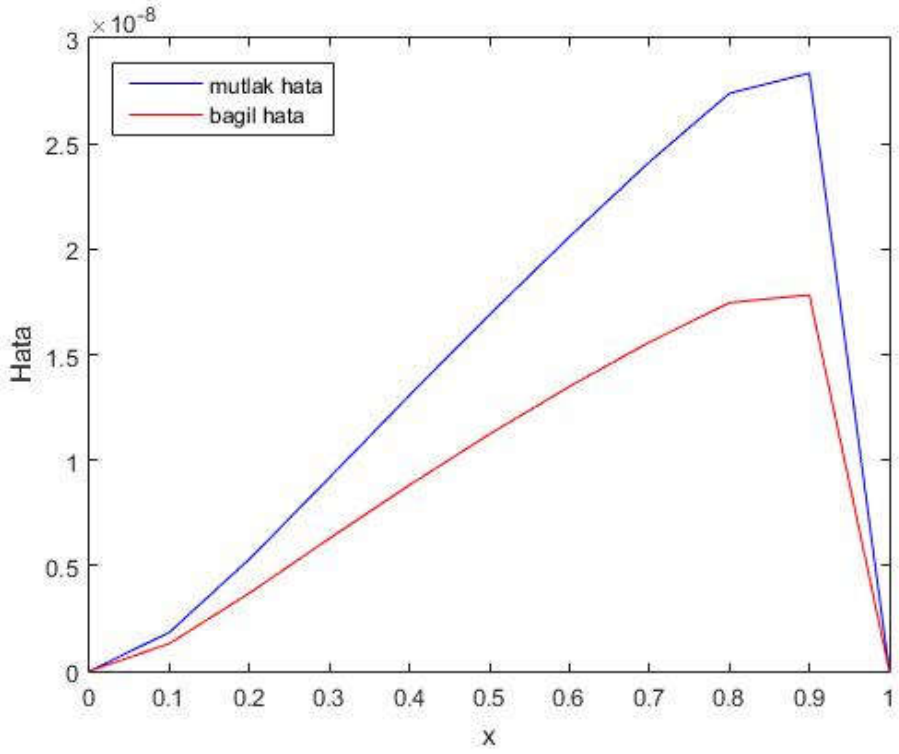
Yapılan bu düzenleme ve düzenlenen sınır koşullarına göre (3.29), (3.31), (3.32) ve (3.33) denklemleri (3.28) denkleminde yerine yazıldığında diferansiyel denklem içeren ifade $(n - 2)$ bilinmeyenli $(n - 2)$ denklemden oluşan bir cebirsel denklem

sistemine dönüşür. Bu cebirsel denklem sistemini çözmek için bilinen iterasyon yöntemleri kullanılabilir. Bu çalışmada cebirsel denklem sisteminin çözümünde MATLAB fonksiyonları kullanılmıştır.

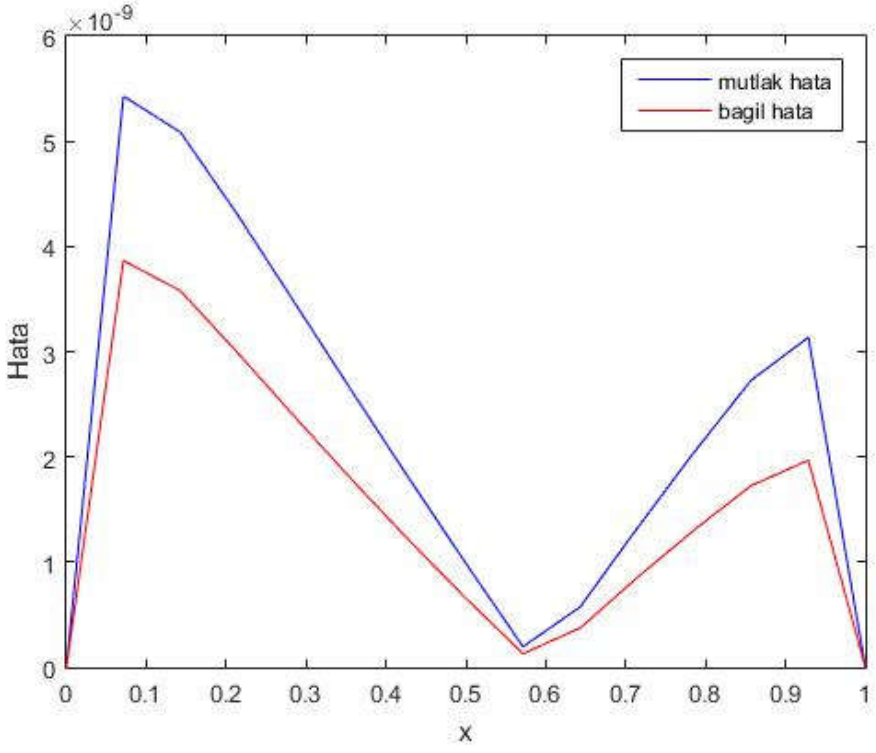
Aşağıdaki grafikler farklı n değerleri için SF4 sonuçlarını göstermektedir:



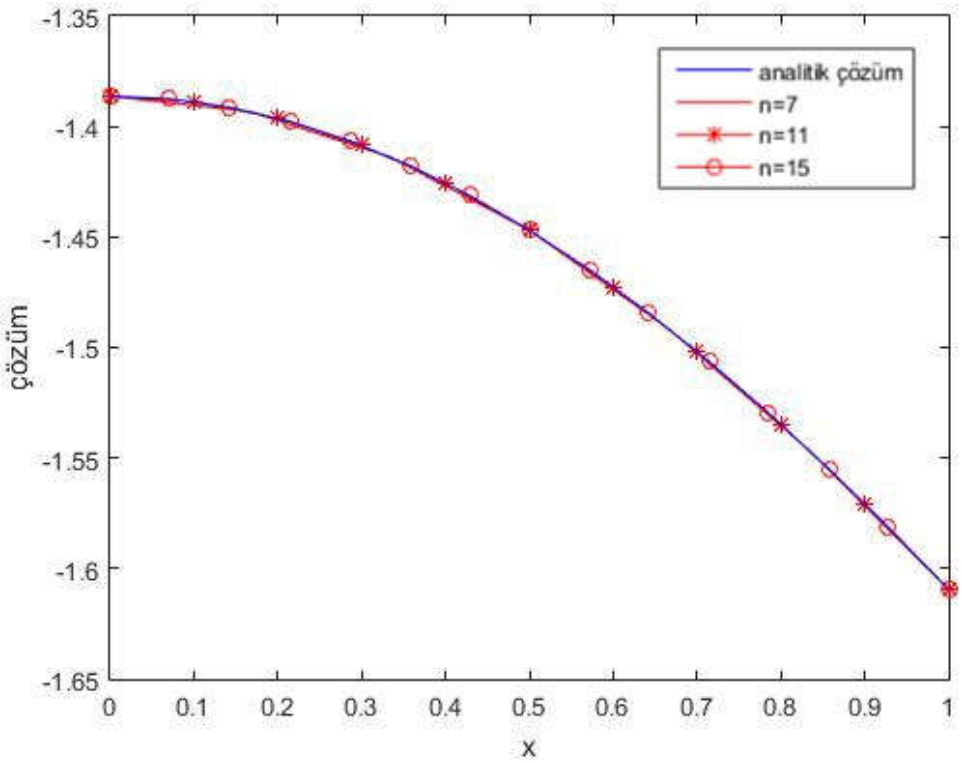
Şekil 3.33 $n = 7$ için SF4 hata grafiği



Şekil 3.34 $n = 11$ için SF4 hata grafiği



Şekil 3.35 $n = 15$ için SF4 hata grafiği



Şekil 3.36 Farklı n değerleri için SF4 çözümleri

3.2.2 Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY) ile Çözümü

$0 < x \leq 1$ aralığı n tane düzgün alt aralığa bölündüğünde $i = 1, 2, \ldots, n$ tane denklem elde edilir. Burada adım uzunlukları $h = 1/n$ şeklindedir. Sınır koşulları göz önüne alındığında $y(0) = -ln4$ değeri $y_1 = -ln4$ değerine karşılık gelirken $y(1) = -ln5$ değeri de $y_n = -ln5$ değerine karşılık gelmektedir.

Düzenlenen sınır koşulları (3.29) denklemindeki gibidir.

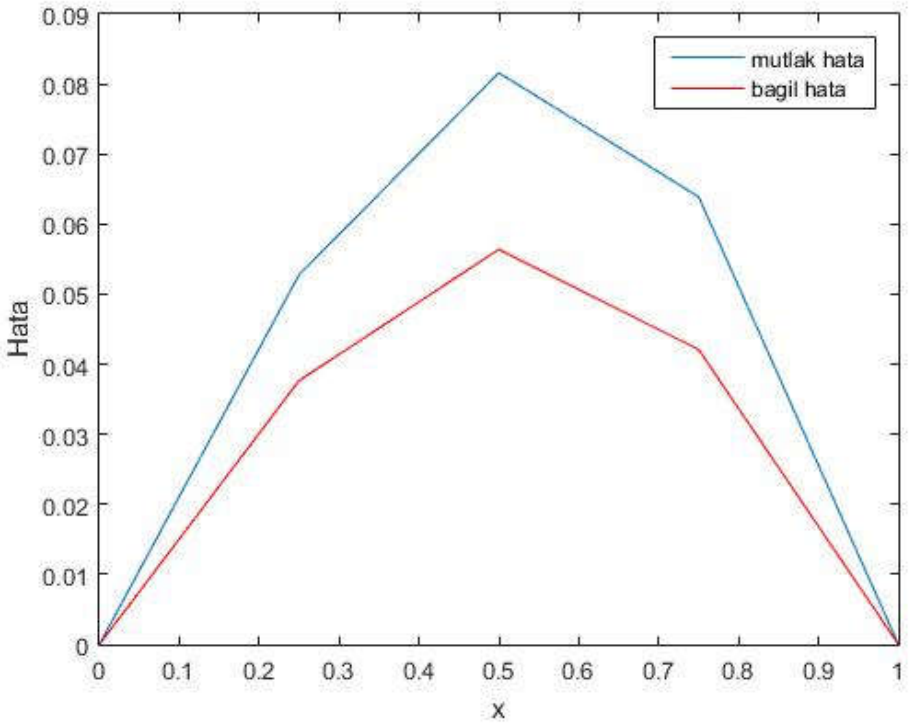
Daha önce 2.2 bölümünde bahsedildiği gibi $\omega(x)$ test fonksiyonu seçilir, ardından test fonksiyonu ile hata fonksiyonun çarpımının integrali sıfıra eşitlenir:

$$\int_0^1 \left(y'' + \frac{\alpha_0}{x} y' - \beta_0 x^{\beta_0 - 2}(\beta_0 x^{\beta_0} e^y - \alpha_0 - \beta_0 + 1)\right).w(x)dx = 0 \qquad (3.34)$$

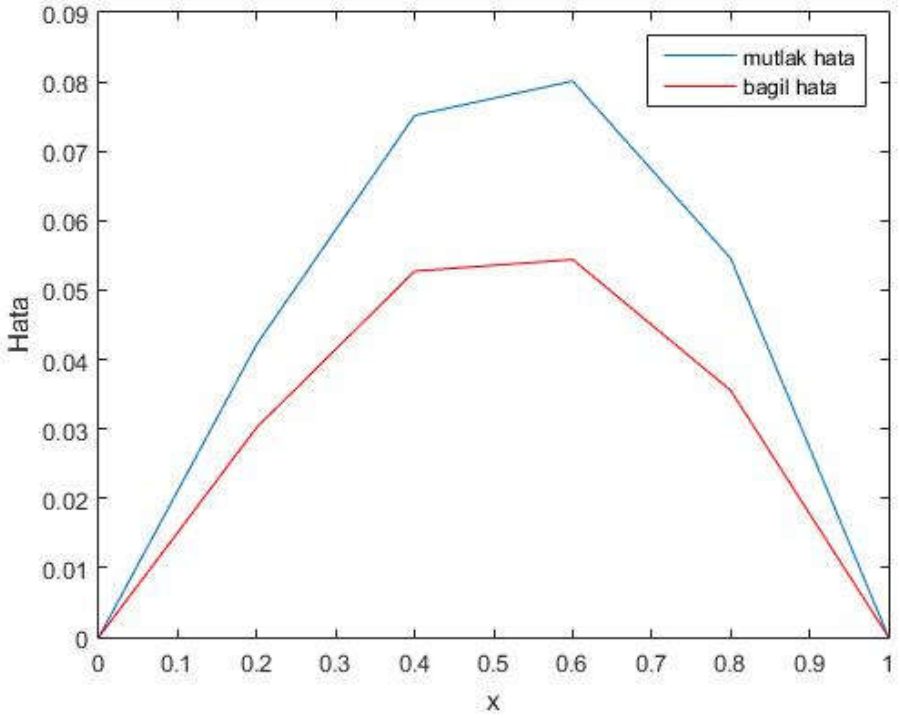
Böylece Galerkin yöntemi ile varyasyonel ifade (2.15)teki gibi bulunur:

$$\int_0^1 (y'(x).w'(x) + \frac{1}{2x} y'(x).w(x) - (e^{2y(x)} - \frac{1}{2x} e^{y(x)}).w(x))dx = 0 \qquad (3.35)$$

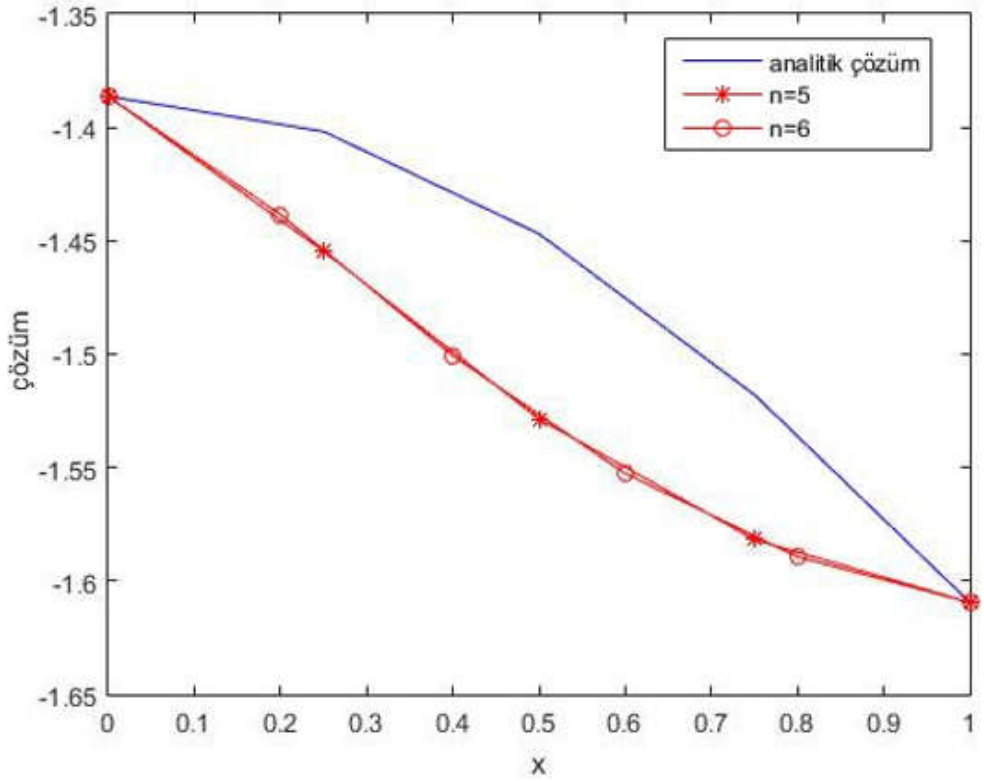
$w(x)$ ve $y(x)$ fonksiyonları baz takımına bağlı olacak şekilde $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \psi_i$ ve $y = \sum_{i=1}^{n} \beta_j \psi_j$ şeklinde tanımlanır. 2.2 ve 3.1.2 bölümlerinde verilen işlem adımları tamamlandığında farklı n değerleri için aşağıdaki grafikler elde edilir:



Şekil 3.37 $n = 5$ için SEY hata grafiği



Şekil 3.38 $n = 6$ için SEY hata grafiği



Şekil 3.39 Farklı n değerleri için SEY çözümleri

3.2.3 Diferansiyel Kareleme Yöntemi ile Çözümü

Bu çalışma boyunca polinom bazlı diferansiyel kareleme ve Fourier açılımı bazlı diferansiyel kareleme yöntemleri kullanılmıştır.

$0 < x \leq 1$ aralığı n tane düzgün alt aralığa bölündüğünde $i = 1, 2, \ldots, n$ tane denklem elde edilir. Burada adım uzunlukları $h = 1/n$ şeklindedir. Sınır koşulları göz önüne alındığında $y(0) = -ln4$ değeri $y_1 = -ln4$ değerine karşılık gelirken $y(1) = -ln5$ değeri de $y_n = -ln5$ değerine karşılık gelmektedir.

3.2.3.1 Polinom Bazlı Diferansiyel Kareleme Yöntemi (PDKY) ile Çözümü

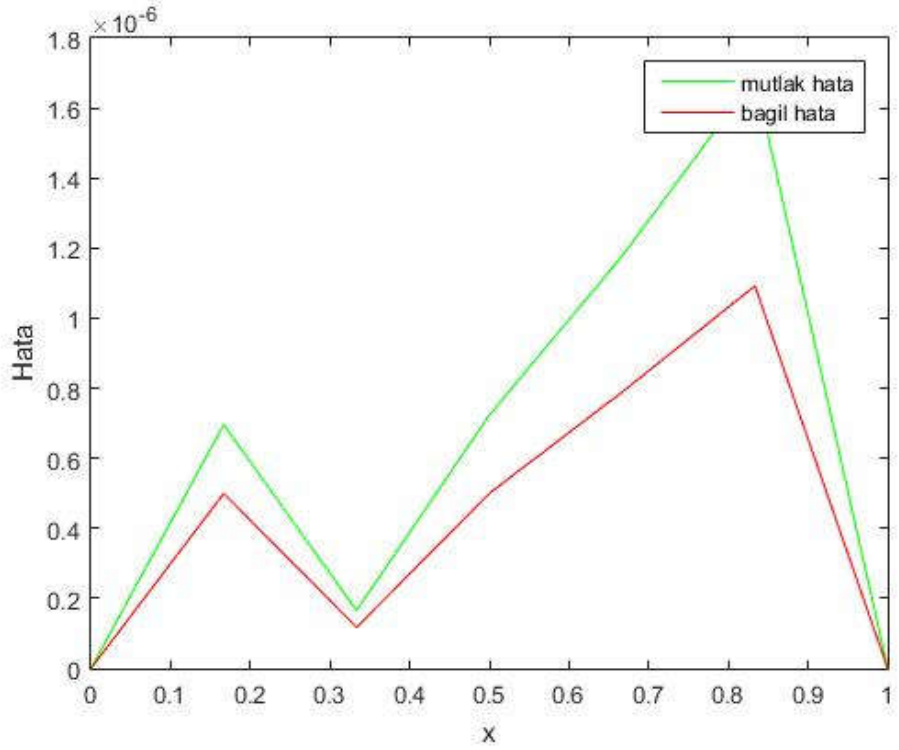
Düzenlenen sınır koşulları (3.29) denklemindeki gibidir.

Sınır koşulları dışında kalan noktalar için de polinom bazlı diferansiyel kareleme yöntemi (3.28) denklemine uygulandığında $i = 2, 3, \ldots, n-1$ için aşağıdaki $(N-2) \times (N-2)$ formunda bir cebirsel denklem sistemi elde edilir:

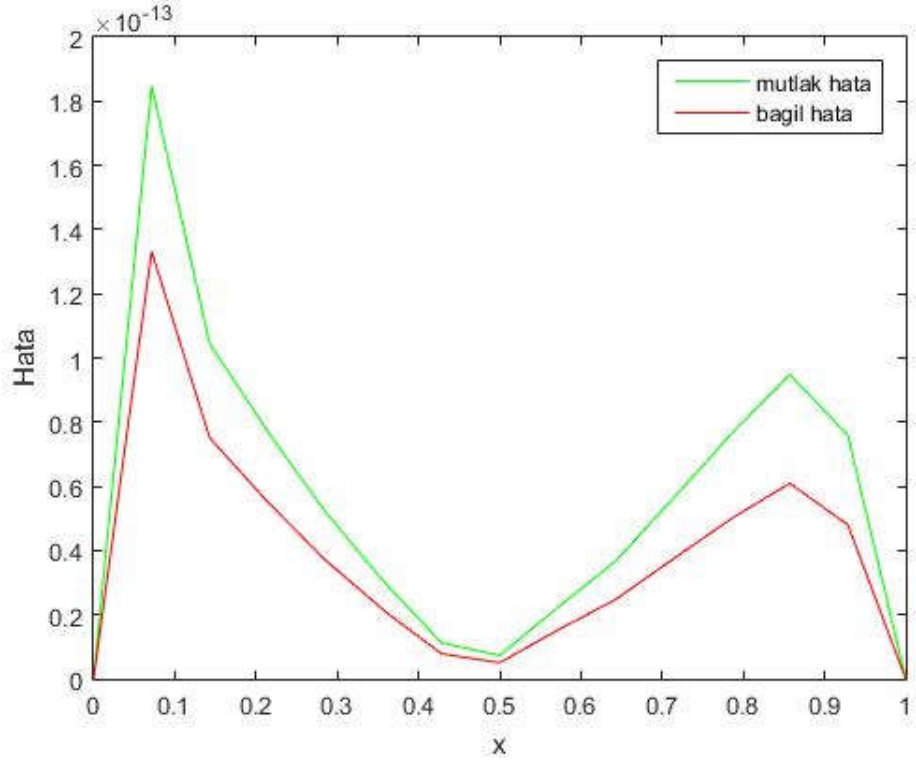
$$\sum_{k=1}^{N} \omega_{ik}^{(2)} y_k + \frac{\alpha_0}{x_i} \sum_{k=1}^{N} \omega_{ik}^{(1)} y_k - \beta_0 {x_i}^{\beta_0 - 2} \left(\beta_0 {x_i}^{\beta_0} e^{y_i} - \alpha_0 - \beta_0 + 1 \right) = 0, \quad (3.36)$$

Burada $\omega_{ik}^{(2)}$ ve $\omega_{ik}^{(1)}$ lineer ağırlıklı katsayıları (2.26) ve (2.27) numaralı formüller ile hesaplanır. Bu cebirsel denklem sistemini çözmek için bilinen iterasyon yöntemleri kullanılabilir. Bu çalışmada cebirsel denklem sisteminin çözümünde MATLAB fonksiyonları kullanılmıştır.

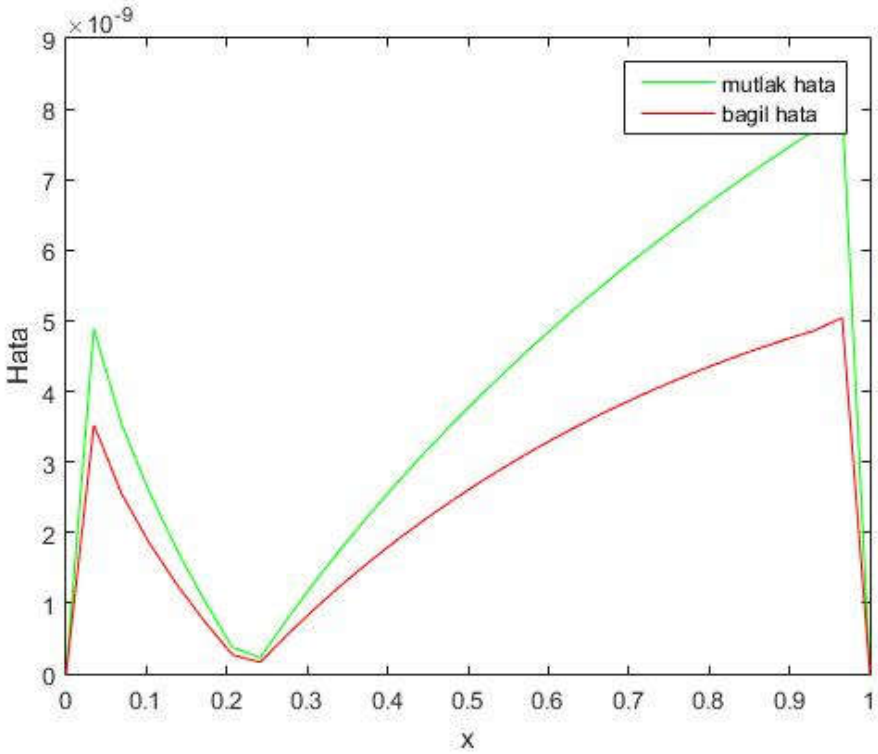
Aşağıdaki grafikler farklı n değerleri için PDKY sonuçlarını göstermektedir:



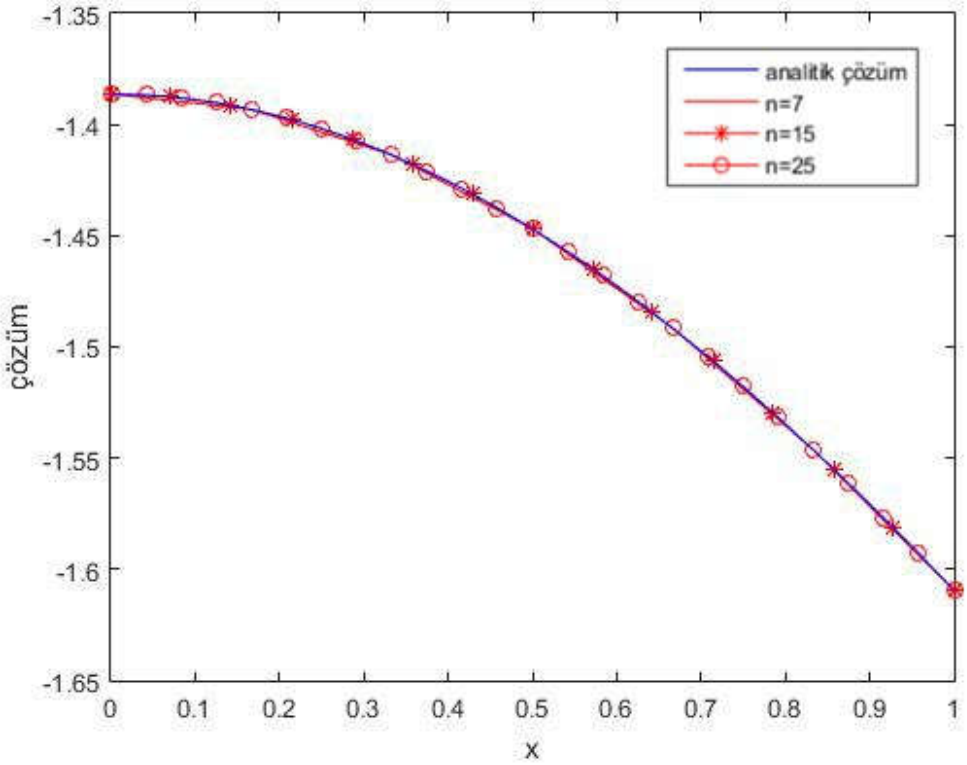
Şekil 3.40 $n = 7$ için PDKY hata grafiği



Şekil 3.41 $n = 15$ için PDKY hata grafiği



Şekil 3.42 $n = 30$ için PDKY hata grafiği



Şekil 3.43 Farklı n değerleri için PDKY çözümleri

3.2.3.2 Fourier Açılımı Bazlı Diferansiyel Kareleme Yöntemi (FDKY) ile Çözümü

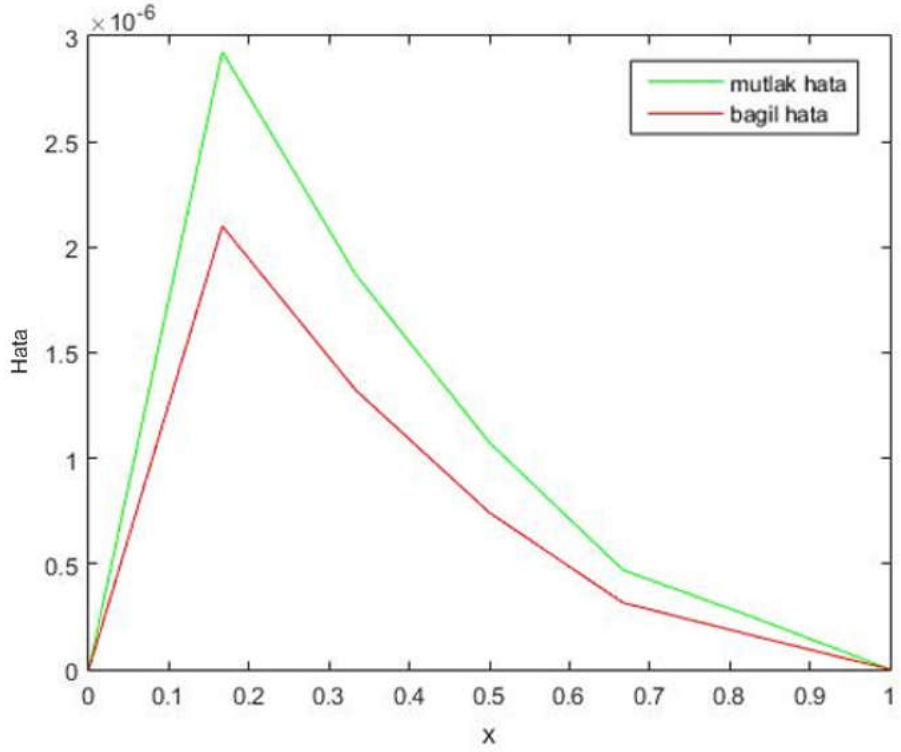
Düzenlenen sınır koşulları (3.29) denklemindeki gibidir.

Sınır koşulları dışında kalan noktalar için Fourier açılımı bazlı diferansiyel kareleme yöntemi (3.28) denklemine uygulandığında $i = 2, 3, \ldots, n-1$ için aşağıdaki $(N-2) \times (N-2)$ formunda bir cebirsel denklem sistemi elde edilir:

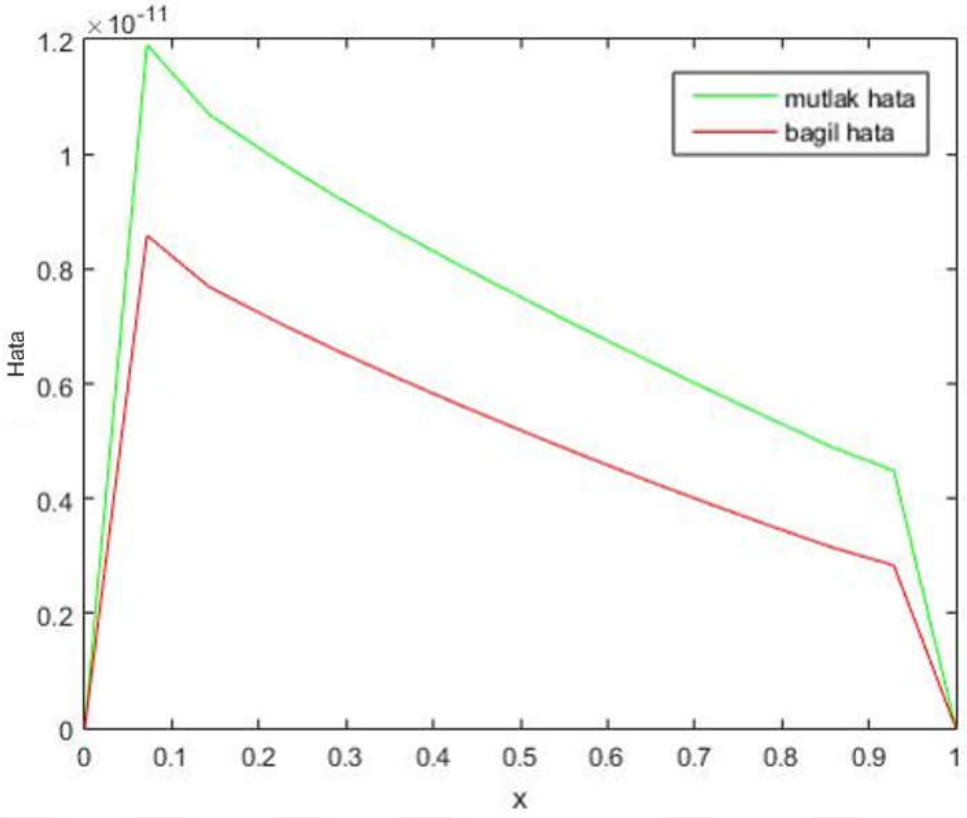
$$\sum_{k=1}^{N} b_{ik} y_k + \frac{\alpha_0}{x_i} \sum_{k=1}^{N} a_{ik} y_k - \beta_0 {x_i}^{\beta_0 - 2} \left(\beta_0 {x_i}^{\beta_0} e^{y_i} - \alpha_0 - \beta_0 + 1 \right) = 0 \quad (3.37)$$

Burada b_{ik} ve a_{ik} lineer ağırlıklı katsayıları sırasıyla (2.49), (2.50) ve (2.47), (2.48)'deki formüller ile hesaplanır. Bu cebirsel denklem sistemini çözmek için bilinen iterasyon yöntemleri kullanılabilir. Bu çalışmada cebirsel denklem sisteminin çözümünde MATLAB fonksiyonları kullanılmıştır. Bu iki yöntem arasındaki en temel farklılık lineer ağırlıklı katsayılar hesaplanış şeklidir.

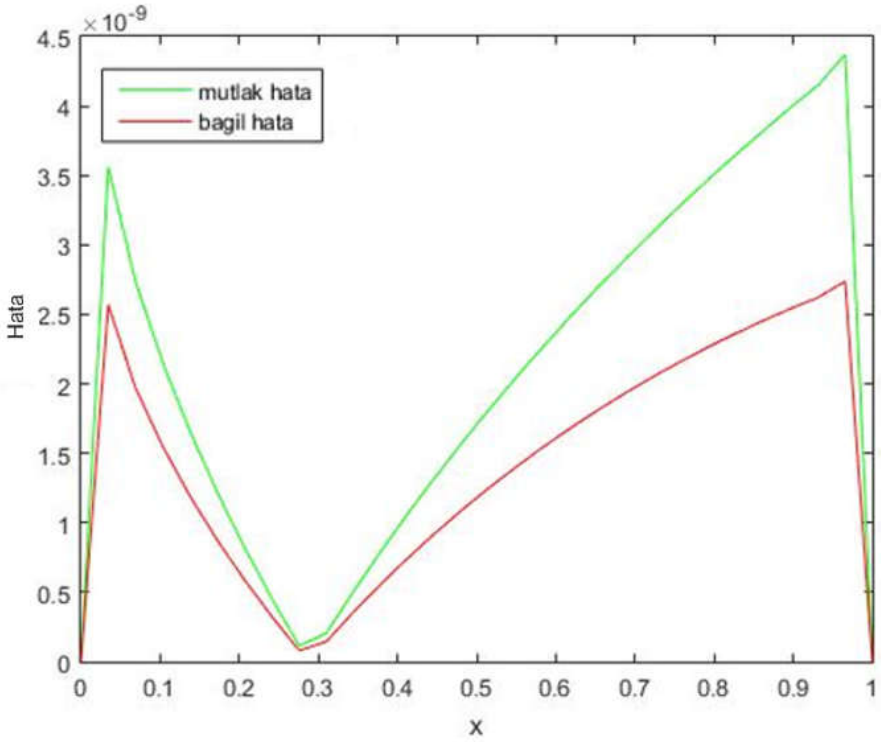
Aşağıdaki grafikler farklı n değerleri için FDKY sonuçlarını göstermektedir:



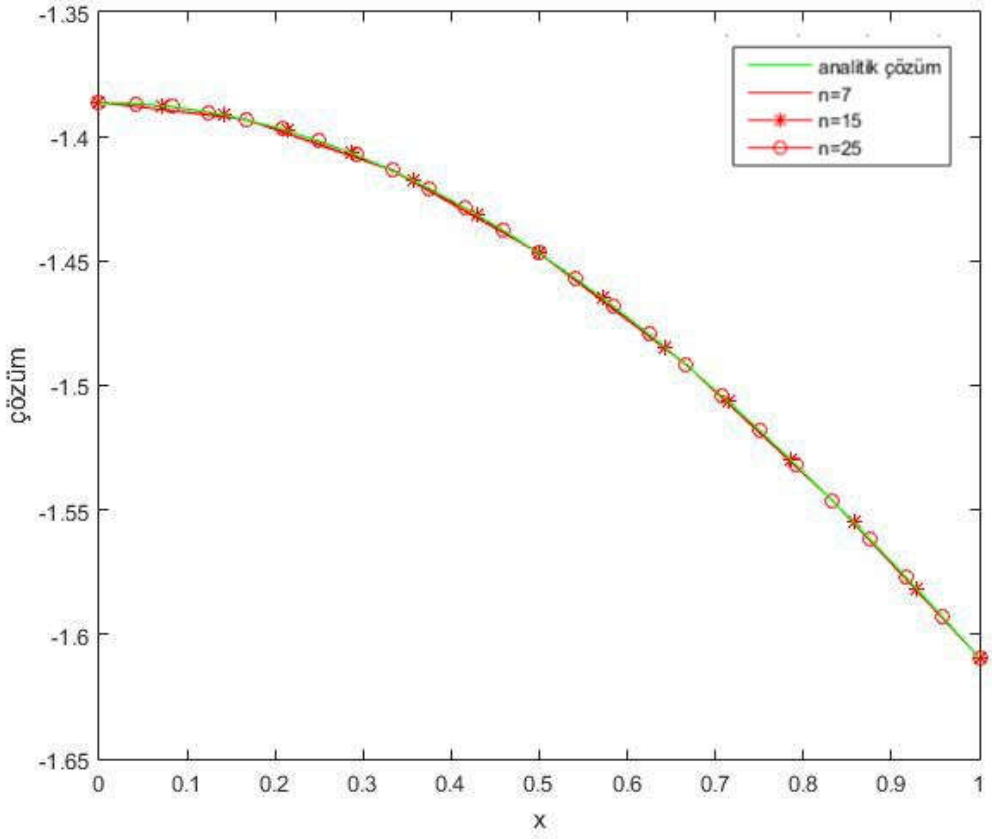
Şekil 3.44 $n = 7$ için FDKY hata grafiği



Şekil 3.45 $n = 15$ için FDKY hata grafiği



Şekil 3.46 $n = 30$ için FDKY hata grafiği

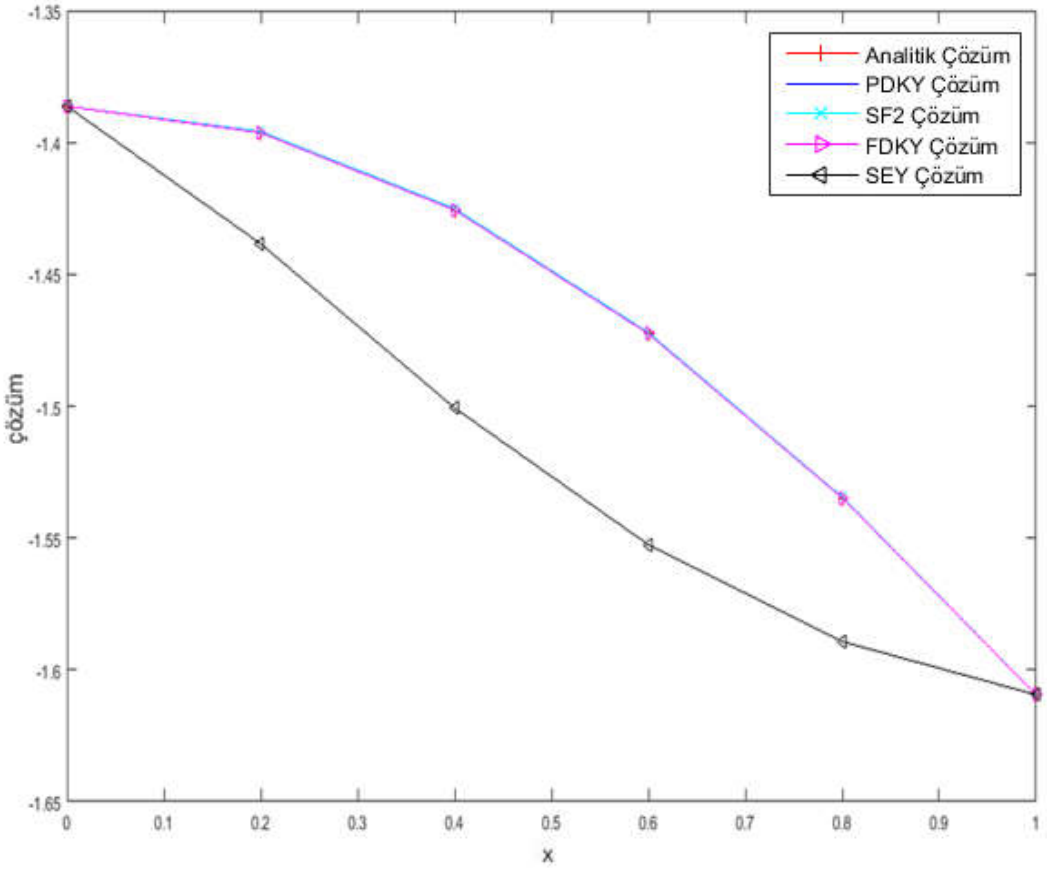


Şekil 3.47 Farklı n değerleri için PDKY çözümleri

3.2.4 Yöntemlerin Karşılaştırılması

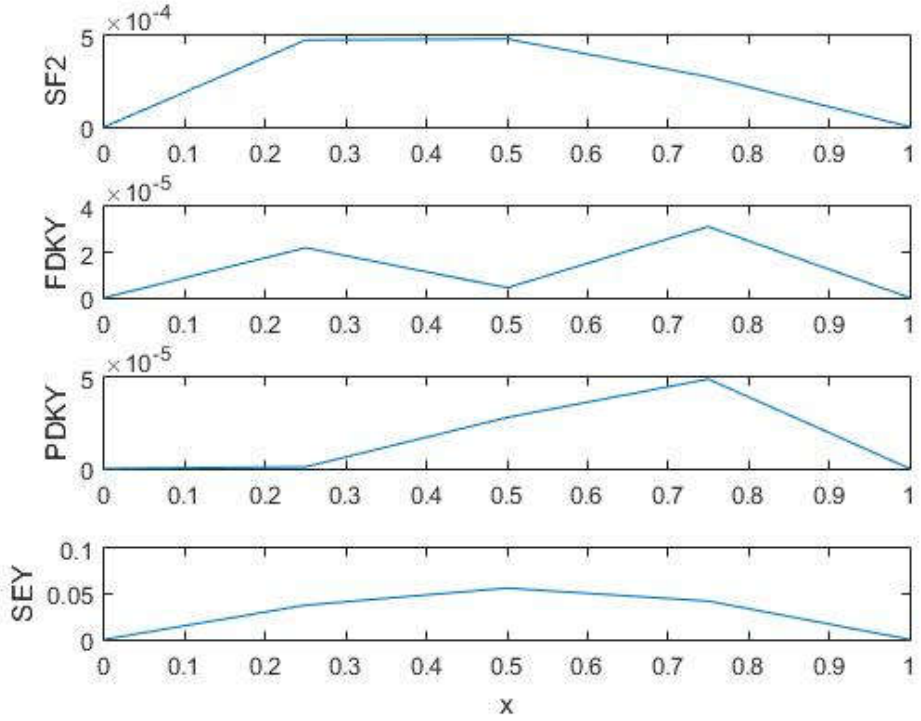
(3.27) sınır koşullarına sahip (3.26) denkleminin sayısal çözümleri yukarıdaki sonuçlarda tek tek incelenmiştir.

Aşağıda verilen grafik $n = 6$ grid noktası için tüm yöntemlerin ve kesin çözümün sonuç değerlerini göstermektedir.

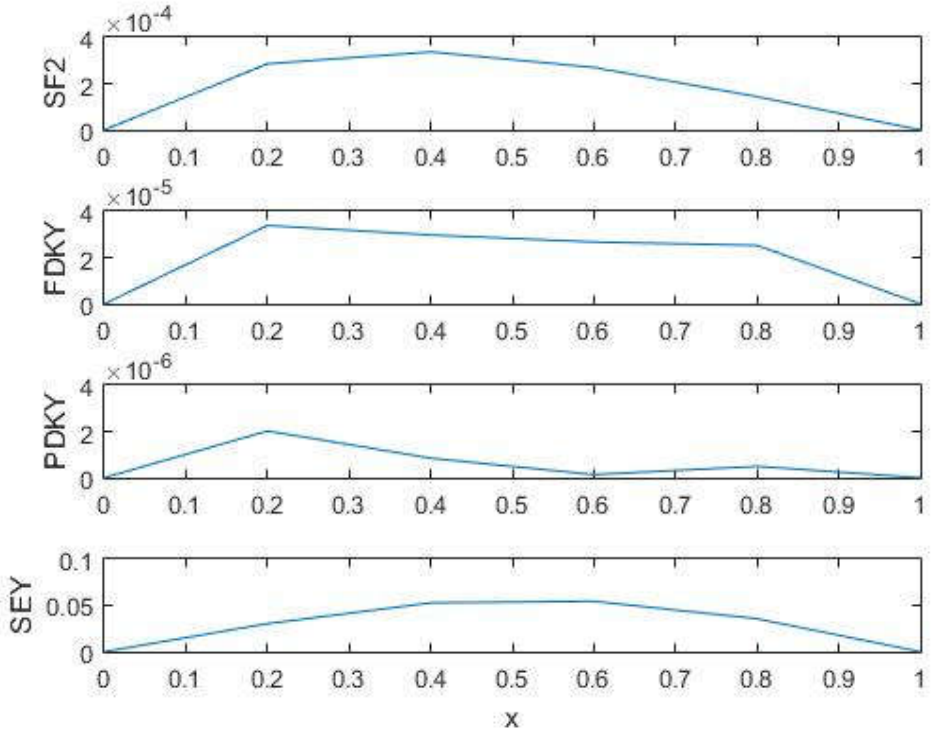


Şekil 3.48 $n = 6$ için tüm çözümler

Aşağıda verilen grafikler sırasıyla $n = 5$ ve $n = 6$ grid değeri için kullanılan yöntemlerin bağıl hata karşılaştırmasını göstermektedir:



Şekil 3.49 $n = 5$ için bağıl hata karşılaştırması



Şekil 3.50 $n = 6$ için bağıl hata karşılaştırması

Bu karşılaştırmada kullanılan yöntemlerden SF4 gösterilememiştir. Çünkü çalışmamız boyunca lineer olmayan örnek problemlerin çözümünde kullanılan SEY kodları $n = 5$ ve $n = 6$ için çalışmaktadır. Ancak SF4 yöntemi çalışabilmek için en az $n = 7$ grid nokta gerekmektedir.

Aşağıdaki tabloda $n = 6$ için analitik çözüm, sayısal çözümler ve bağıl hata değerleri verilmiştir:

Tablo 3.3 $n = 6$ için karşılaştırma değerleri

x	Analitik Çözüm	SF2	PDKY	FDKY	SEY	SF2 Bağıl Hata	PDKY Bağıl Hata	FDKY Bağıl Hata	SEY Bağıl Hata
0	-1.38629	-1.38629	-1.3862	-1.38629	-1.3862	0	0	0	0
0.2	-1.39624	-1.39584	-1.3962	-1.39629	-1.4384	2.85E-04	2.02E-06	3.38E-05	0.03023
0.4	-1.42551	-1.42503	-1.4255	-1.42555	-1.5006	3.37E-04	8.44E-07	2.97E-05	0.05273
0.6	-1.47247	-1.47207	-1.4724	-1.47251	-1.5525	2.70E-04	1.37E-07	2.67E-05	0.05440
0.8	-1.53471	-1.53449	-1.5347	-1.53475	-1.5892	1.43E-04	4.93E-07	2.52E-05	0.03556
1	-1.60943	-1.60943	-1.6094	-1.60943	-1.6094	0	0	0	0

Yukarıdaki tablo ve grafikler incelendiğinde, polinom bazlı diferansiyel kareleme yönteminin hata değerleri daha az sayıda grid noktası kullanıldığında diğerlerinden daha kesin sonuçlar verdiği görülmektedir. Grid sayısı arttığında, Fourier açılımı bazlı diferansiyel kareleme yöntemi ve 4. mertebe sonlu farklar yöntemi de polinom bazlı diferansiyel kareleme yöntemi kadar hassas sonuçlar vermektedir. Ayrıca kullanılan yöntemler arasında en az hassas sonuçlar veren yöntem sonlu elemanlar yöntemidir. Ancak literatür verilerine göre, grid sayısı çok fazla arttığında benzer bir tartışmanın tekrar yapılabileceği bilinmektedir.

3.3 Problem 3'ün Sayısal Çözümü ve Karşılaştırılması

Bu bölümde amaç analitik çözümü bilinen lineer olmayan yapıdaki iki-noktalı singüler sınır değer problemini üç farklı yöntem ile çözmek ve yöntemlerin

etkilerini ve hassasiyetlerini karşılaştırmaktır. Yaklaşık çözümlerin performansı kesin ve mutlak hatalar ile ölçülmüştür.

Genel formülü (3.1)-(3.3) denklemlerinde tanımlanan yapıdaki iki-noktalı singüler sınır değer problemi özel olarak aşağıdaki şekilde tanımlansın. Kumar ve Singh[29]:

$$(x^{0.5}y')' = x^{0.5}(0.5e^{y} - e^{2y}),\ 0 < x \leq 1 \tag{3.38}$$

sınır koşulları

$$y(0) = ln2,\ y(1) = 0 \tag{3.39}$$

şeklinde verilsin. Bu denklemin analitik çözümünün $y(x) = \ln(\frac{2}{1+x^2})$ olduğu bilinmektedir.

3.3.1 Sonlu Farklar Yöntemi ile Çözümü

Bu çalışma boyunca sonlu farklar yöntemi 2. mertebe sonlu fark ve 4. mertebe sonlu fark olmak üzere iki farklı mertebe için ayrı ayrı hesaplanmıştır.

3.3.1.1 2. Mertebe Sonlu Farklar Yöntemi (SF2) ile Çözümü

(3.38) denklemi düzenlendiğinde

$$y'' + \frac{0.5}{x}y' - 0.5e^{y} + e^{2y} = 0 \tag{3.40}$$

denklemi elde edilir. Burada sınır koşulları (3.39) denkleminde verilmiştir.

$0 < x < 1$ aralığı n tane düzgün alt aralığa bölündüğünde $i = 1, 2, \ldots, n$ tane denklem elde edilir. Burada adım uzunlukları $h = 1/n$ şeklindedir. Sınır koşulları göz önüne alındığında $y(0) = ln2$ değeri $y_1 = ln2$ değerine karşılık gelirken $y(1) = 0$ değeri de $y_n = 0$ değerine karşılık gelmektedir.

Düzenlenen sınır koşulları aşağıdaki gibidir:

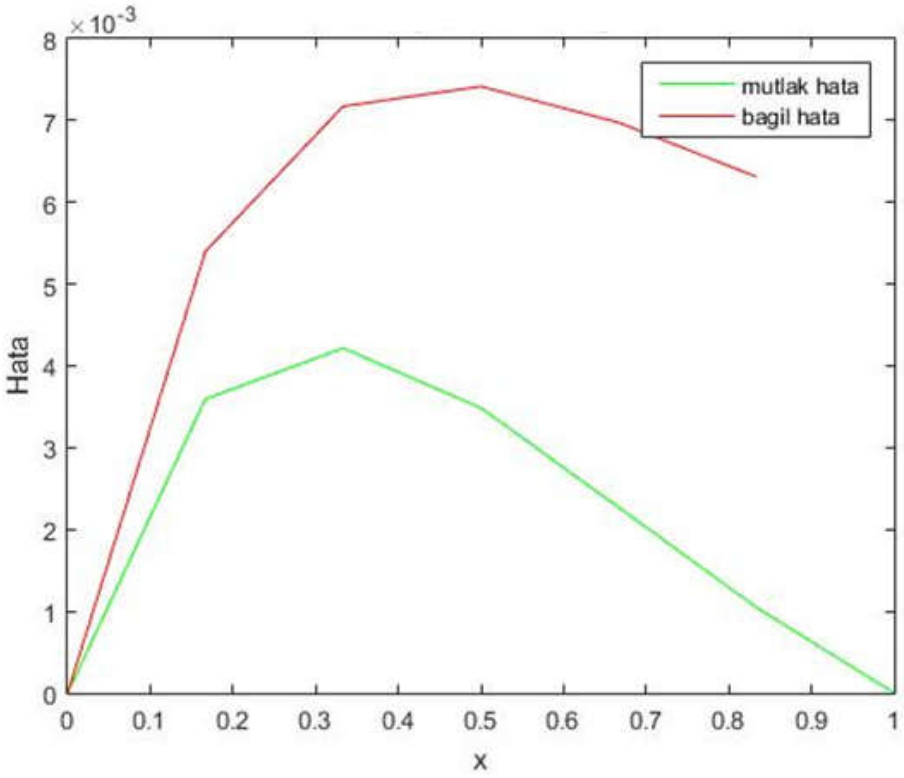
$$y_1 = ln2 \quad \text{ve} \quad y_n = 0 \tag{3.41}$$

Sınır koşulları dışında kalan noktalar için merkezi fark yaklaşımı denklemdeki türevlerde yerine yazıldığında (3.40) denklemi $i = 2, 3, \ldots, n-1$ için aşağıdaki formda olur:

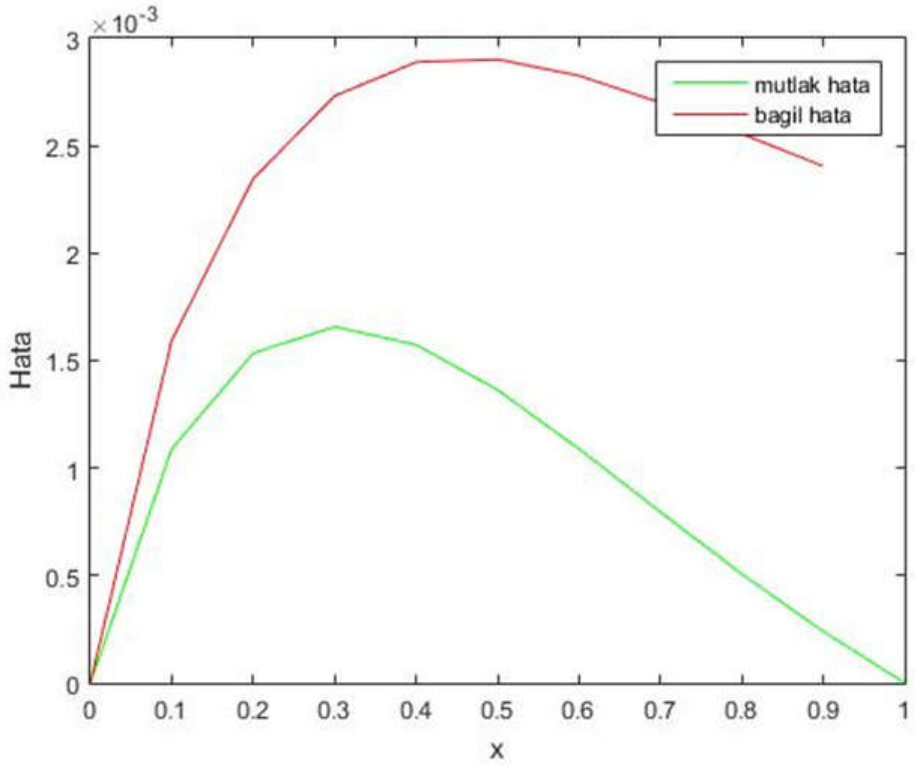
$$\frac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{h^2}+\frac{0.5}{x_i}\frac{\frac{-1}{2}y_{i-1}+\frac{1}{2}y_{i+1}}{h}-0.5e^{y_i}+e^{2y_i}=0 \qquad (3.42)$$

Yapılan bu düzenleme ve düzenlenen sınır koşullarına göre (3.41) ve (3.42) denklemleri (3.40) denkleminde yerine yazıldığında diferansiyel denklem içeren ifade $(n-2)$ bilinmeyenli $(n-2)$ denklemden oluşan bir cebirsel denklem sistemine dönüşür. Bu cebirsel denklem sistemini çözmek için bilinen iterasyon yöntemleri kullanılabilir. Bu çalışmada cebirsel denklem sisteminin çözümünde MATLAB fonksiyonları kullanılmıştır.

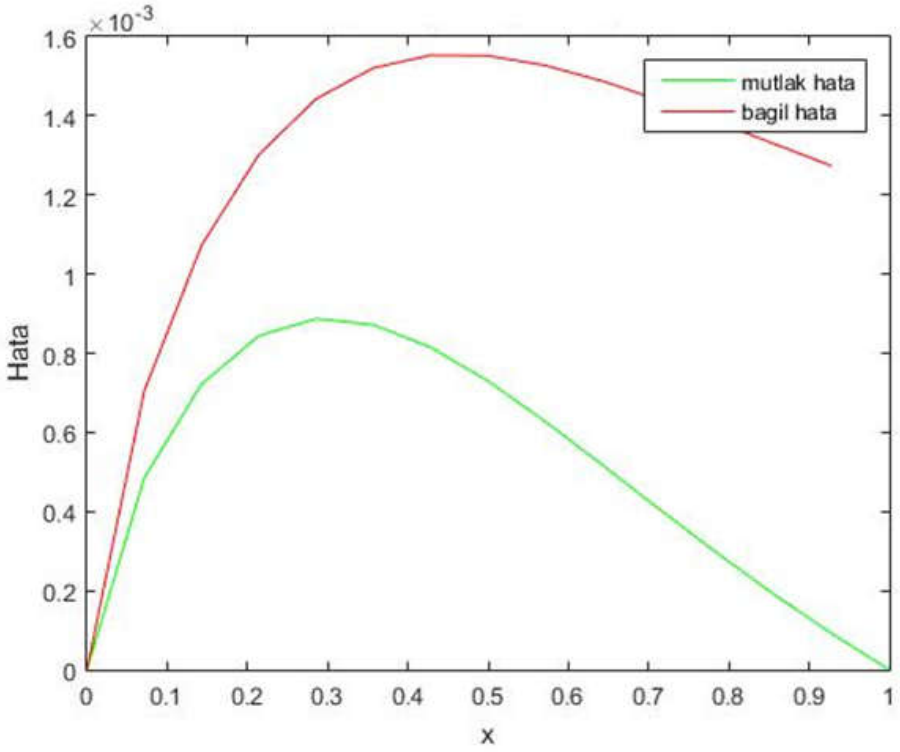
Aşağıdaki grafikler farklı n değerleri için SF2 sonuçlarını göstermektedir:



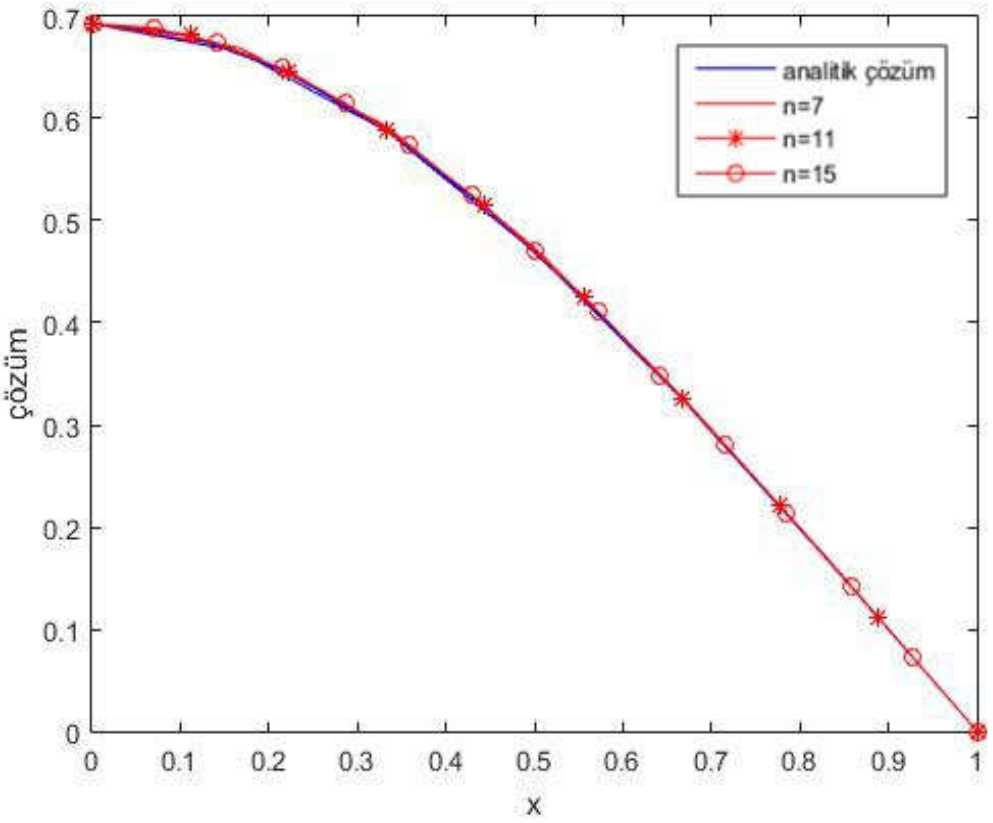
Şekil 3.51 $n=7$ için SF2 hata grafiği



Şekil 3.52 $n = 11$ için SF2 hata grafiği



Şekil 3.53 $n = 15$ için SF2 hata grafiği



Şekil 3.54 Farklı n değerleri için SF2 çözümleri

3.3.1.2 4. Mertebe Sonlu Farklar Yöntemi (SF4) ile Çözümü

$0 < x < 1$ aralığı n tane düzgün alt aralığa bölündüğünde $i = 1, 2, \ldots, n$ tane denklem elde edilir. Burada adım uzunlukları $h = 1/n$ şeklindedir. Sınır koşulları göz önüne alındığında $y(0) = ln2$ değeri $y_1 = ln2$ değerine karşılık gelirken $y(1) = 0$ değeri de $y_n = 0$ değerine karşılık gelmektedir.

Düzenlenen sınır koşulları (3.41) denklemindeki gibidir.

Sınır koşulları dışında kalan noktalar için sonlu fark yaklaşımı denklemdeki türevlerde yerine yazılacaktır. Ancak 4. mertebe sonlu fark yaklaşımının yapısından ötürü ilk iki ve son iki noktasına merkezi fark yaklaşımı uygulanamaz. Sınır koşullarından dolayı $i = 1$ ve $i = n$ değerleri bilinen değerlerdir. $i = 2$ değeri için 4. mertebe ileri fark yaklaşımı, $i = n - 1$ için 4. mertebe geri fark yaklaşımı ve $i = 3, 4, \ldots, n - 2$ için 4. mertebe merkezi fark yaklaşımları (3.40) denkleminde yerine yazıldığında aşağıdaki denklem sistemleri elde edilir:

$i = 2$ için

$$\frac{\frac{15}{4}y_i - \frac{77}{6}y_{i+1} + \frac{107}{6}y_{i+2} - 13y_{i+3} + \frac{61}{12}y_{i+4} - \frac{5}{6}y_{i+5}}{h^2} + \frac{0.5}{x_i}\frac{\frac{-25}{12}y_i + 4y_{i+1} - 3y_{i+2} + \frac{4}{3}y_{i+3} - \frac{1}{4}y_{i+4}}{h} - 0.5e^{y_i} + e^{2y_i} = 0 \quad (3.43)$$

$i = 3, 4, \ldots, n-2$ için

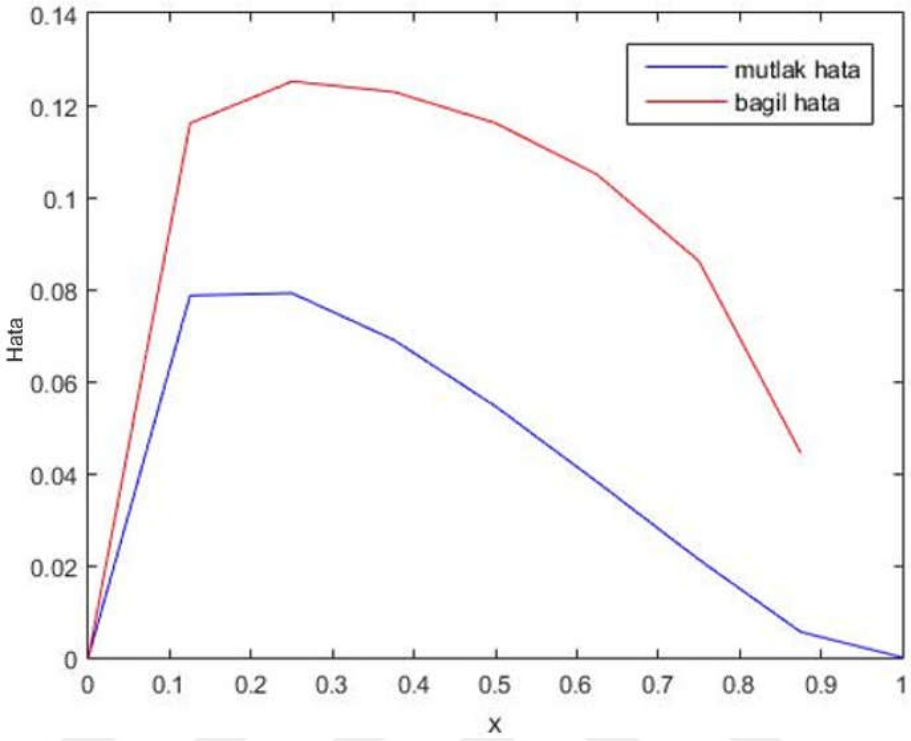
$$\frac{\frac{-1}{12}y_{i-2} + \frac{4}{3}y_{i-1} - \frac{5}{2}y_i - \frac{4}{3}y_{i+1} - \frac{1}{12}y_{i+2}}{h^2} + \frac{0.5}{x_i}\frac{\frac{1}{12}y_{i-2} - \frac{2}{3}y_{i-1} + \frac{2}{3}y_{i+1} - \frac{1}{12}y_{i+2}}{h} - 0.5e^{y_i} + e^{2y_i} = 0 \quad (3.44)$$

$i = n-1$ için

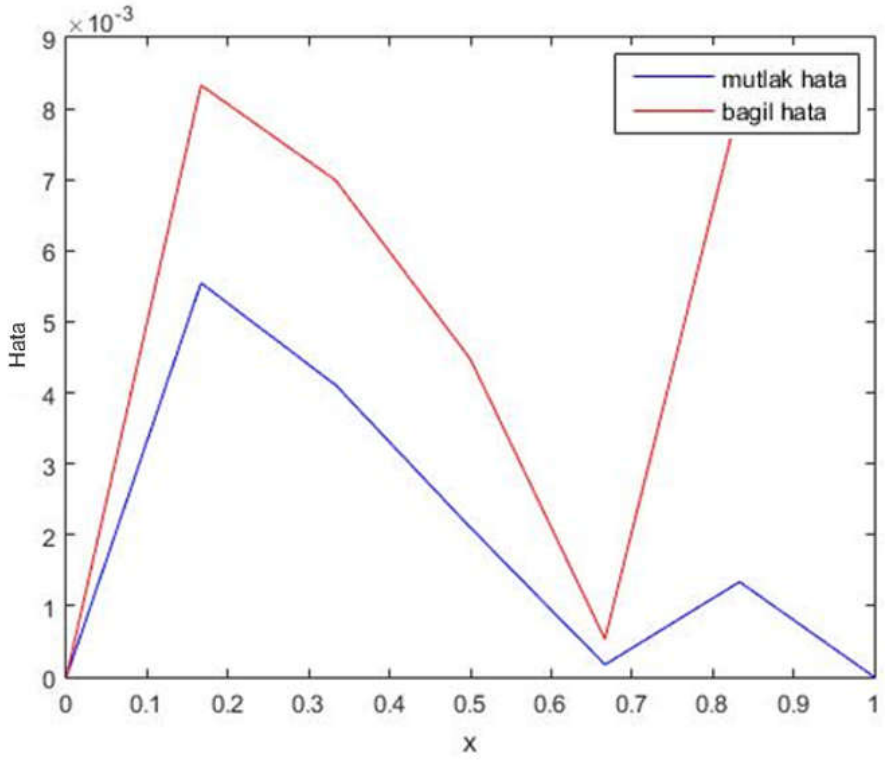
$$\frac{\frac{15}{4}y_{i-5} - \frac{77}{6}y_{i-4} + \frac{107}{6}y_{i-3} - 13y_{i-2} + \frac{61}{12}y_{i-1} - \frac{5}{6}y_i}{h^2} + \frac{0.5}{x_i}\frac{\frac{25}{12}y_{i-4} - 4y_{i-3} + 3y_{i-2} - \frac{4}{3}y_{i-1} + \frac{1}{4}y_i}{h} - 0.5e^{y_i} + e^{2y_i} = 0 \quad (3.45)$$

Yapılan bu düzenleme ve düzenlenen sınır koşullarına göre (3.41), (3.43), (3.44) ve (3.45) denklemleri (3.40) denkleminde yerine yazıldığında diferansiyel denklem içeren ifade $(n-2)$ bilinmeyenli $(n-2)$ denklemden oluşan bir cebirsel denklem sistemine dönüşür. Bu cebirsel denklem sistemini çözmek için bilinen iterasyon yöntemleri kullanılabilir. Bu çalışmada cebirsel denklem sisteminin çözümünde MATLAB fonksiyonları kullanılmıştır.

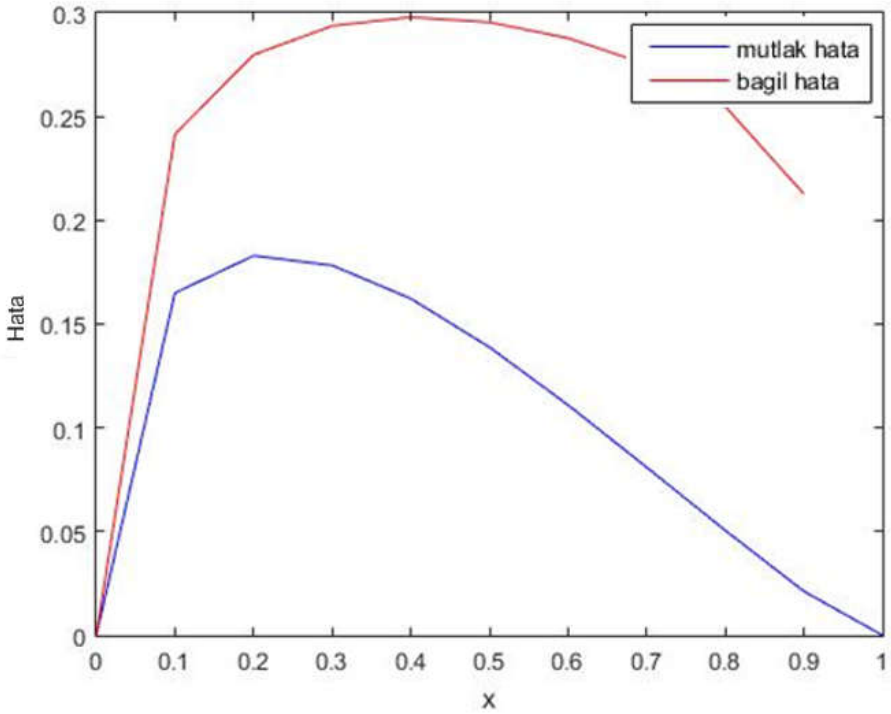
Aşağıdaki grafikler farklı n değerleri için SF4 sonuçlarını göstermektedir:



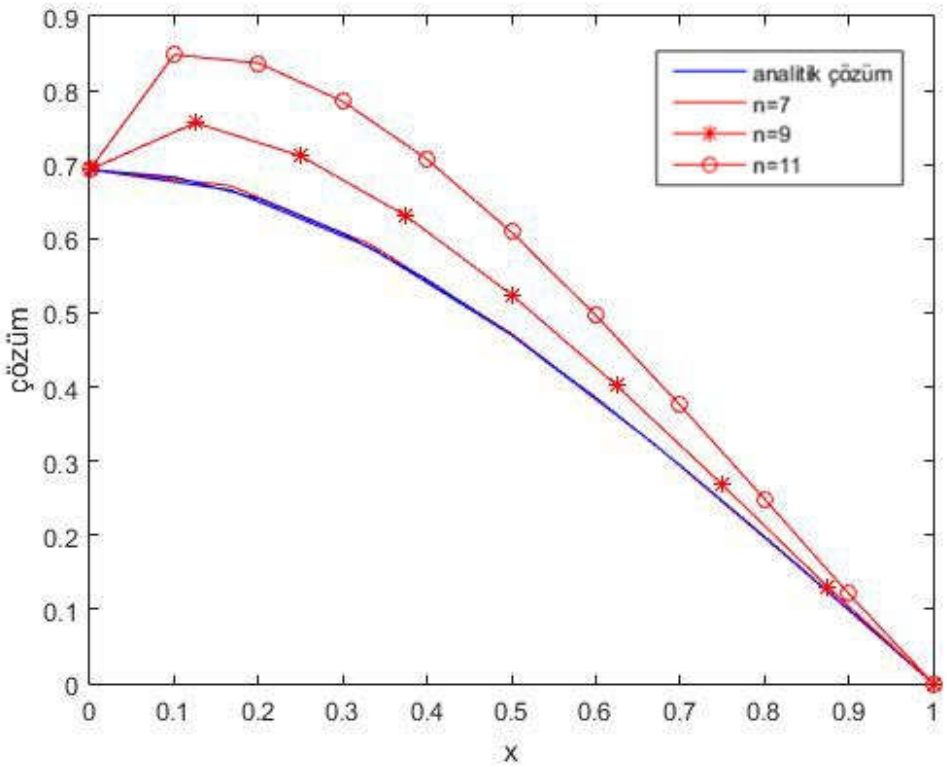
Şekil 3.55 $n = 7$ için SF4 hata grafiği



Şekil 3.56 $n = 9$ için SF4 hata grafiği



Şekil 3.57 $n = 11$ için SF4 hata grafiği



Şekil 3.58 Farklı n değerleri için SF2 çözümleri

3.3.2 Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY) ile Çözümü

$0 < x < 1$ aralığı n tane düzgün alt aralığa bölündüğünde $i = 1, 2, \ldots, n$ tane denklem elde edilir. Burada adım uzunlukları $h = 1/n$ şeklindedir. Sınır koşulları göz önüne alındığında $y(0) = ln2$ değeri $y_1 = ln2$ değerine karşılık gelirken $y(1) = 0$ değeri de $y_n = 0$ değerine karşılık gelmektedir.

Düzenlenen sınır koşulları (3.41) denklemindeki gibidir.

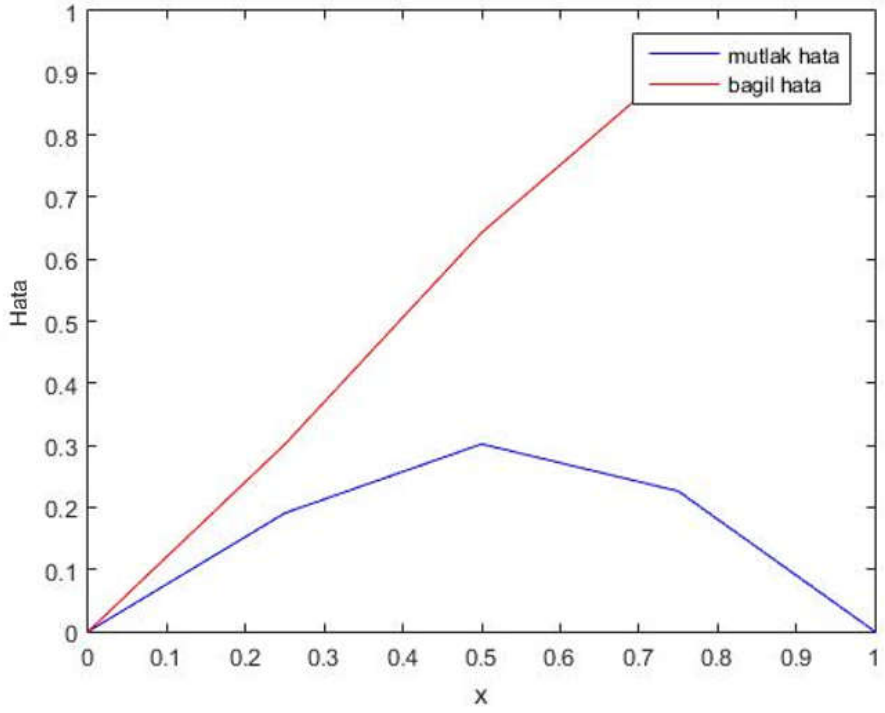
Daha önce 2.2 bölümünde bahsedildiği gibi $\omega(x)$ test fonksiyonu seçilir, ardından test fonksiyonu ile hata fonksiyonun çarpımının integrali sıfıra eşitlenir:

$$\int_0^1 \left(y'' + \frac{0.5}{x}y' - 0.5e^y + e^{2y}\right).w(x)dx = 0 \qquad (3.46)$$

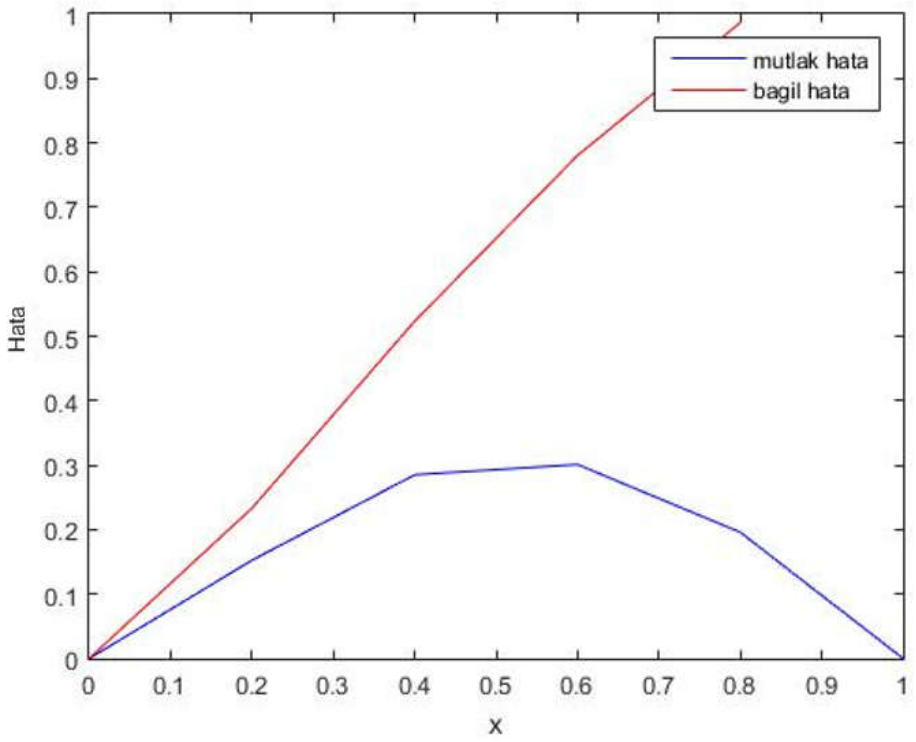
Böylece Galerkin yöntemi ile varyasyonel ifade (2.15)teki gibi bulunur:

$$\int_0^1 (y'(x).w'(x) + \frac{1}{2x}y'(x).w(x) - (e^{2y(x)} - \frac{1}{2}e^{y(x)}).w(x))dx = 0 \qquad (3.47)$$

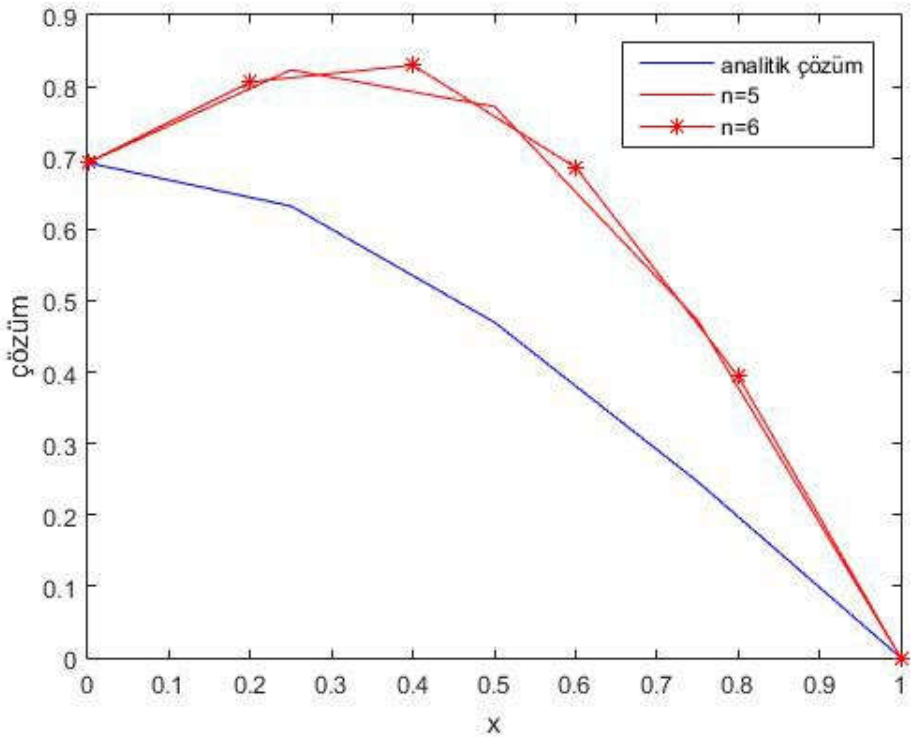
$w(x)$ ve $y(x)$ fonksiyonları baz takımına bağlı olacak şekilde $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \psi_i$ ve $y = \sum_{i=1}^{n} \beta_j \psi_j$ şeklinde tanımlanır. 2.2 ve 3.1.2 bölümlerinde verilen işlem adımları tamamlandığında farklı n değerleri için aşağıdaki grafikler elde edilir:



Şekil 3.59 $n = 5$ için SEY hata grafiği



Şekil 3.60 $n = 6$ için SEY hata grafiği



Şekil 3.61 Farklı n değerleri için SEY çözümleri

3.3.3 Diferansiyel Kareleme Yöntemi ile Çözümü

Bu çalışma boyunca polinom bazlı diferansiyel kareleme ve Fourier açılımı bazlı diferansiyel kareleme yöntemleri kullanılmıştır.

$0 < x < 1$ aralığı n tane düzgün alt aralığa bölündüğünde $i = 1, 2, \ldots, n$ tane denklem elde edilir. Burada adım uzunlukları $h = 1/n$ şeklindedir. Sınır koşulları göz önüne alındığında $y(0) = ln2$ değeri $y_1 = ln2$ değerine karşılık gelirken $y(1) = 0$ değeri de $y_n = 0$ değerine karşılık gelmektedir.

3.3.3.1 Polinom Bazlı Diferansiyel Kareleme Yöntemi (PDKY) ile Çözümü

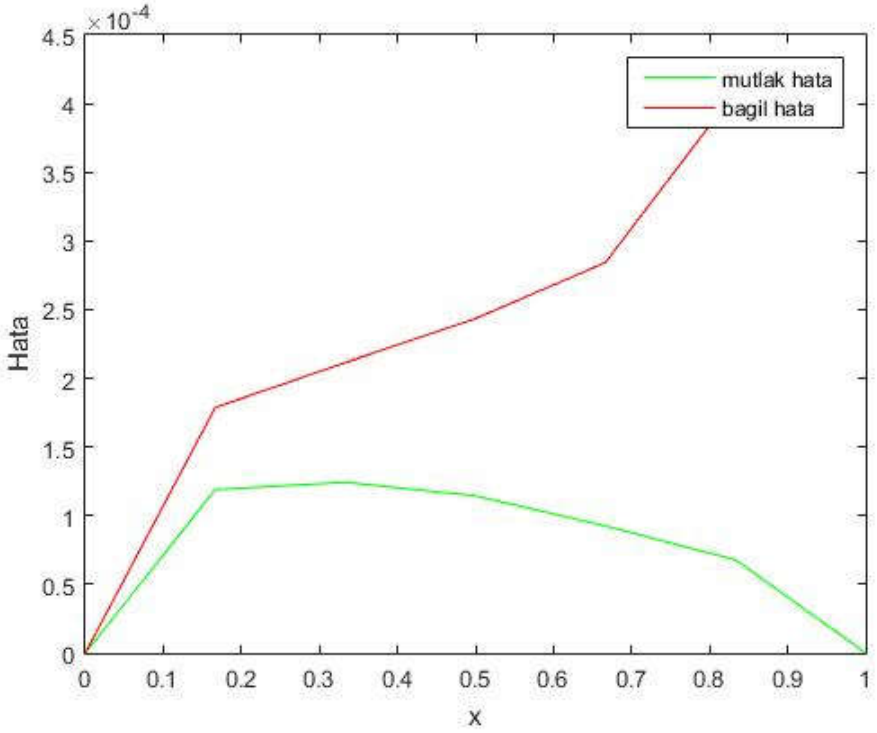
Düzenlenen sınır koşulları (3.41) denkleminde verildiği gibidir.

Sınır koşulları dışında kalan noktalar için polinom bazlı diferansiyel kareleme yöntemi (3.40) denklemine uygulandığında $i = 2, 3, \ldots, n-1$ için aşağıdaki $(N-2) \times (N-2)$ formunda bir cebirsel denklem sistemi elde edilir:

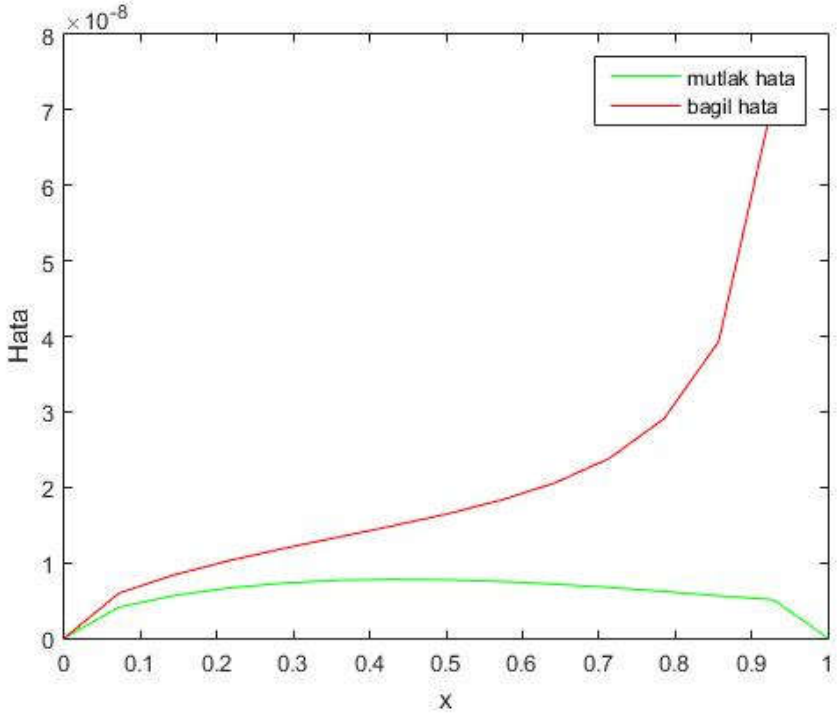
$$\sum_{k=1}^{N} \omega_{ik}^{(2)} y_k + \frac{0.5}{x_i} \sum_{k=1}^{N} \omega_{ik}^{(1)} y_k - 0.5e^{y_i} + e^{2y_i} = 0, \quad i = 2,3, \ldots, N-1 \quad (3.48)$$

Burada $\omega_{ik}^{(2)}$ ve $\omega_{ik}^{(1)}$ lineer ağırlıklı katsayıları (2.26) ve (2.27)'deki formüller ile hesaplanır. Bu cebirsel denklem sistemini çözmek için bilinen iterasyon yöntemleri kullanılabilir. Bu çalışmada cebirsel denklem sisteminin çözümünde MATLAB fonksiyonları kullanılmıştır.

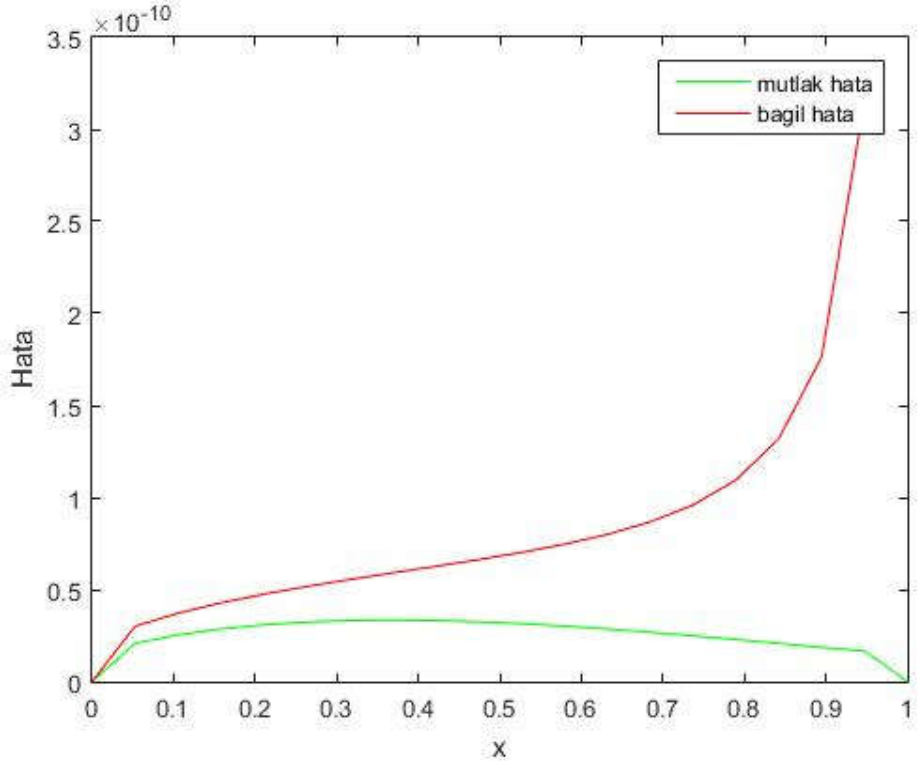
Aşağıdaki grafikler farklı n değerleri için PDKY sonuçlarını göstermektedir:



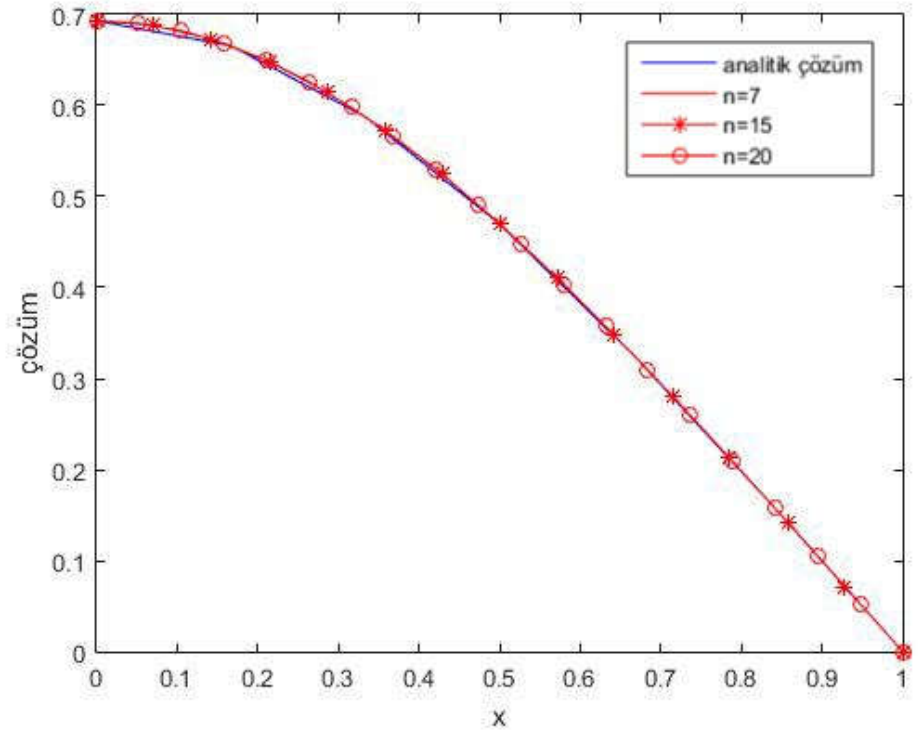
Şekil 3.62 $n = 7$ için PDKY hata grafiği



Şekil 3.63 $n = 15$ için PDKY hata grafiği



Şekil 3.64 $n = 20$ için PDKY hata grafiği



Şekil 3.65 Farklı n değerleri için PDKY çözümleri

3.3.3.2 Fourier Açılımı Bazlı Diferansiyel Kareleme Yöntemi (FDKY) ile Çözümü

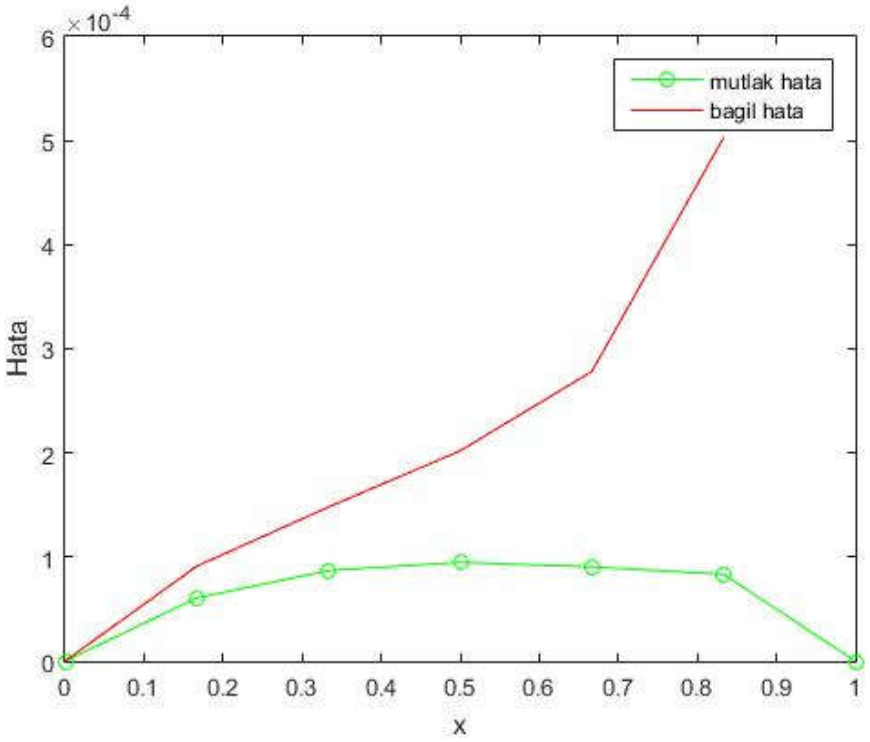
Düzenlenen sınır koşulları (3.41) denkleminde verildiği gibidir.

Sınır koşulları dışında kalan noktalar için de Fourier açılımı bazlı diferansiyel kareleme yöntemi (3.40) denklemine uygulandığında $i = 2, 3, \ldots, n-1$ için aşağıdaki $(N-2) \times (N-2)$ formunda bir cebirsel denklem sistemi elde edilir:

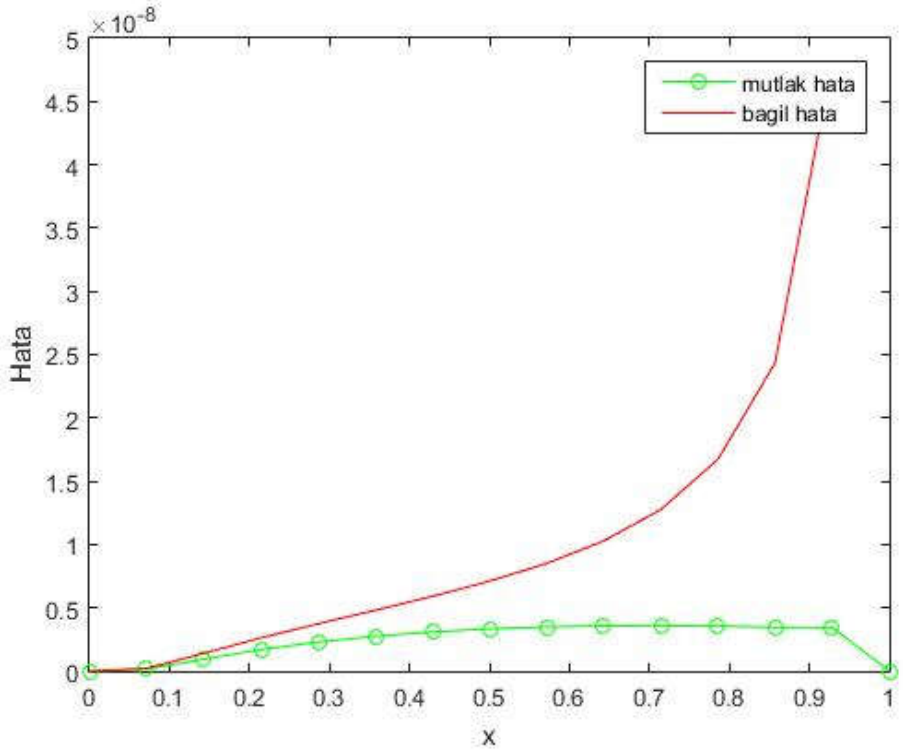
$$\sum_{k=1}^{N} b_{ik} y_k + \frac{0.5}{x_i} \sum_{k=1}^{N} a_{ik} y_k - 0.5 e^{y_i} + e^{2y_i} = 0, \quad i = 2, 3, \ldots, N-1 \qquad (3.49)$$

Burada b_{ik} ve a_{ik} lineer ağırlıklı katsayıları sırasıyla (2.49), (2.50) ve (2.47), (2.48)'deki formüller ile hesaplanır. Bu cebirsel denklem sistemini çözmek için bilinen iterasyon yöntemleri kullanılabilir. Bu çalışmada cebirsel denklem sisteminin çözümünde MATLAB fonksiyonları kullanılmıştır. Bu iki yöntem arasındaki en temel farklılık lineer ağırlıklı katsayılar hesaplanış şeklidir.

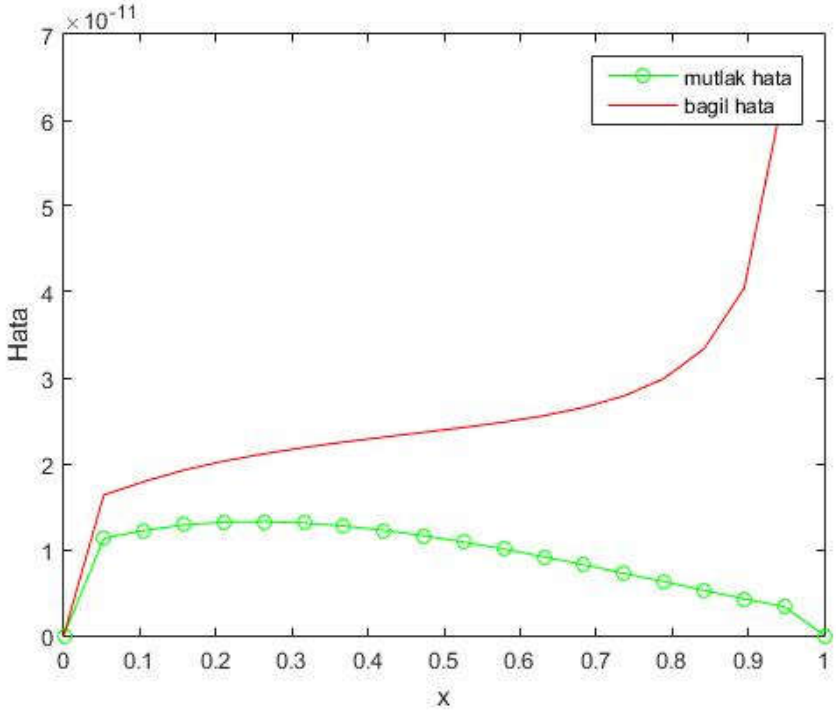
Aşağıdaki grafikler farklı n değerleri için FDKY sonuçlarını göstermektedir:



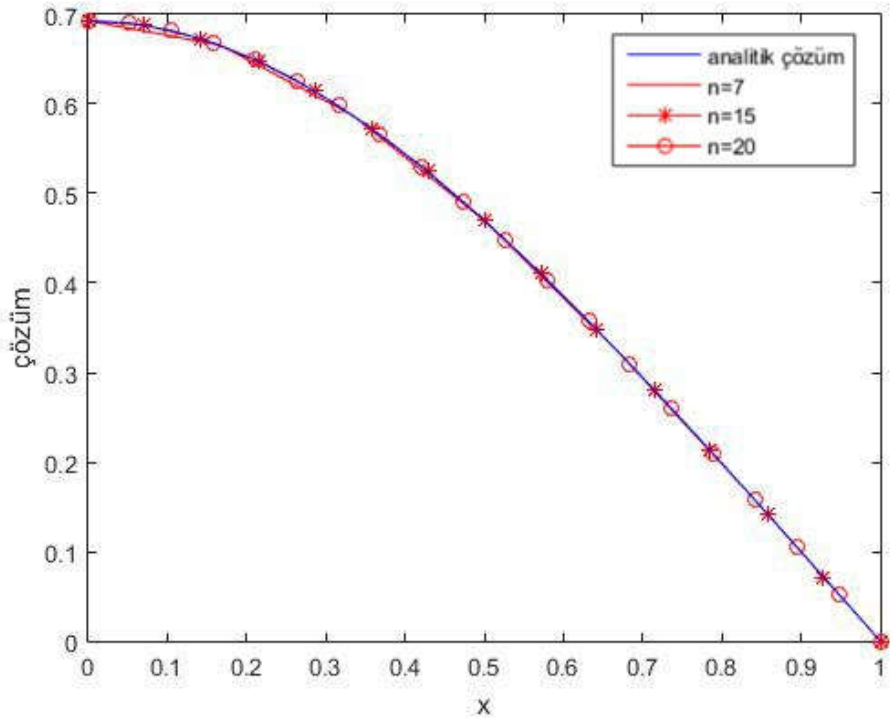
Şekil 3.66 $n = 7$ için FDKY hata grafiği



Şekil 3.67 $n = 15$ için FDKY hata grafiği



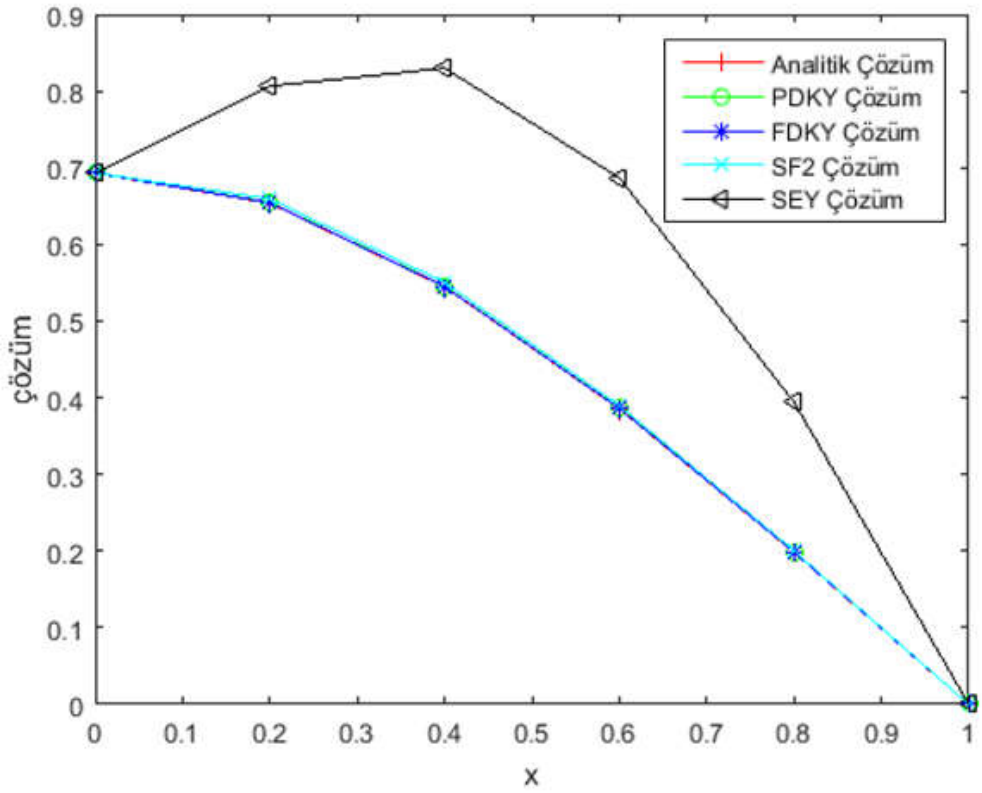
Şekil 3.68 $n = 20$ için FDKY hata grafiği



Şekil 3.69 Farklı n değerleri için FDKY çözümleri

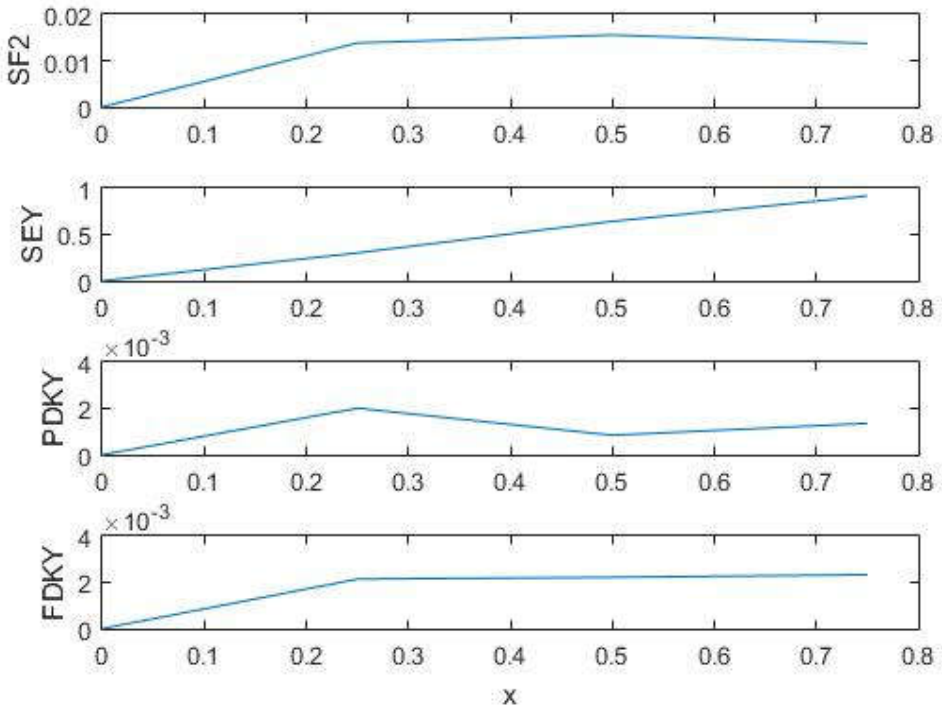
3.3.4 Yöntemlerin Karşılaştırılması

(3.39) sınır koşullarına sahip (3.28) denkleminin nümerik çözümleri yukarıdaki sonuçlarda tek tek incelenmiştir. Aşağıda verilen grafik $n = 6$ grid noktası için tüm yöntemlerin ve kesin çözümün sonuç değerlerini göstermektedir.

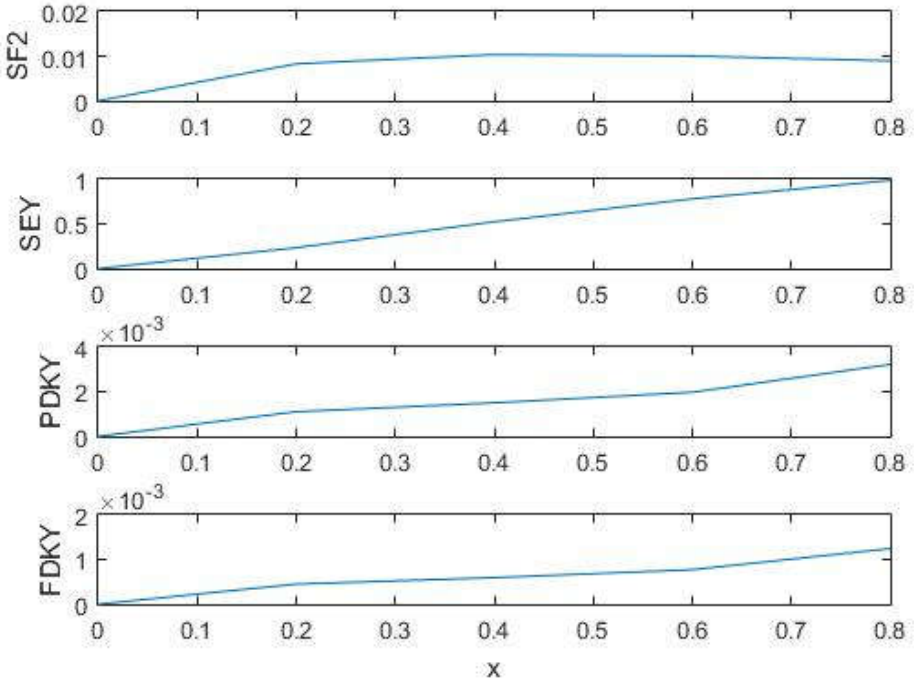


Şekil 3.70 $n = 6$ için tüm çözümler

Aşağıda verilen grafikler sırasıyla $n = 5$ ve $n = 6$ grid değeri için kullanılan SF2, SEY, PDKY ve FDKY yöntemlerinin bağıl hata karşılaştırmasını göstermektedir:



Şekil 3.71 $n = 5$ için bağıl hata karşılaştırması



Şekil 3.72 $n = 6$ için bağıl hata karşılaştırması

Bu karşılaştırmada kullanılan yöntemlerden SF4 gösterilememiştir. Çünkü çalışmamız boyunca lineer olmayan örnek problemlerin çözümünde kullanılan SEY kodları $n = 5$ ve $n = 6$ için çalışmaktadır. Ancak SF4 yöntemi çalışabilmek için en az $n = 7$ grid nokta gerektirmektedir.

Aşağıdaki tabloda $n = 6$ için analitik çözüm, sayısal çözümler ve bağıl hata değerleri verilmiştir:

Tablo 3.4 $n = 6$ için karşılaştırma değerleri

x	Analitik çözüm	SF2	SEY	PDKY	FDKY	SF2 Bağıl Hata	SEY Bağıl Hata	PDKY Bağıl Hata	FDKY Bağıl Hata
0	0.69315	0.69315	0.69315	0.69315	0.69315	0	0	0	0
0.2	0.65393	0.65934	0.80639	0.65465	0.65465	0.00827	0.23315	0.0011	0.00044
0.4	0.54473	0.55035	0.82984	0.54555	0.54555	0.01033	0.52341	0.0015	0.00059
0.6	0.38566	0.38953	0.6867	0.38642	0.38642	0.01001	0.78058	0.0019	0.00077
0.8	0.19845	0.20022	0.39424	0.19909	0.19909	0.00892	0.9866	0.0032	0.00124
1	0	0	0	0	0	NaN	NaN	NaN	NaN

Yukarıdaki tablo ve grafikler incelendiğinde, Fourier açılımı bazlı diferansiyel kareleme yönteminin hata değerleri daha az sayıda grid noktası kullanıldığında diğerlerinden daha kesin sonuçlar verdiği görülmektedir. Grid sayısı arttığında, polinom bazlı diferansiyel kareleme yöntemi ve 4. mertebe sonlu farklar yöntemi de Fourier açılımı bazlı diferansiyel kareleme yöntemi kadar hassas sonuçlar vermektedir. Ayrıca kullanılan yöntemler arasında en az hassas sonuçlar veren yöntem sonlu elemanlar yöntemidir. Ancak literatür verilerine göre, grid sayısı çok fazla arttığında benzer bir tartışmanın tekrar yapılabileceği bilinmektedir.

Aşağıda ele alınan yöntemlerin birbirilerine göre avantaj ve dezavantajlarına yer verilmiştir:

- Diferansiyel kareleme yönteminin, sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemine bir alternatif olarak, daha az grid noktasında daha verimli sonuçlar verdiği bulunmuştur. Sonlu elemanlar ve sonlu farklar yöntemlerinde grid sayısı arttıkça sonuç daha verimli hale gelir ancak diferansiyel kareleme yönteminde, sonuçta etkililik ve doğruluk grid sayısındaki belirli bir artış miktarına ulaşıldıktan sonra azalmaya başlar.
- Sonlu farklar yönteminin uygulanması sonlu elemanlar yönteminden daha basit ve kolaydır. Ancak, sonlu elemanlar yönteminin, doğrusal olmayan ve düzensiz alanlarda nispeten daha etkilidir.
- Sonlu elemanlar yönteminde çözüm bölgesini birçok elemana bölerek sonuçları yeterli doğrulukta bulmak mümkündür. Fakat bölgeyi çok fazla alt bölgeye ayırarak çözüme ulaşılırsa, gerekli hesaplama kapasitesi ve süresi artacaktır.
- Sonlu farklar yönteminin bilgisayar kodlarının kullanılması ve üretilmesi daha kolaydır, ancak nispeten sonuçları daha az doğrudur.

4
SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, iki-noktalı singüler sınır değer problemlerinin sonlu farklar, sonlu elemanlar ve diferansiyel kareleme yöntemleri ile sayısal çözümleri elde edilmiştir. Ele alınan yöntemler birbirleriyle hata analizleri kullanılarak karşılaştırılmış, avantajlarına ve dezavantajlarına yer verilmiştir.

Elde edilen sonuçlara göre, diferansiyel kareleme yönteminin diğer yöntemlerle karşılaştırıldığında en az grid noktası için en hassas sonuçları verdiği görülmüştür. Bununla birlikte, kullanılan diğer yöntemlerde çok daha fazla grid noktası için aynı hassasiyette sonuçlar elde edildiği gözlenmiştir.

Bu çalışma boyunca bir boyutlu diferansiyel denklemlerin çözümü incelenmiştir ve yapılan karşılaştırmalar bu doğrultuda yapılmıştır. Ancak yaptığımız literatür araştırmasına göre, yüksek boyutlu problemler için aynı çalışmanın farklı sonuçlar verebileceği söylenebilir. Özellikle sonlu elemanlar ve sonlu farklar yöntemlerinin yüksek boyutlu problemlerde avantajları ortaya çıkabilir.

KAYNAKLAR

[1] H. Caglar, N. Caglar ve M. Ozer, "B-spline solution of non-linear singular boundary value problems arising in physiology," Chaos, Solitons and Fractals, 39(3), 1232–1237, 2009.

[2] O.Argub, Z.A. Hammour, S. Momani ve N. Shawagfeh, "Solving singular two-point boundary value problems using genetic algorithm," Hindawi Publishing Corporation , Abstract and Applied Analysis, 25 pages, 2012.

[3] R.K. Pandey, "On a class of weakly regular singular two point boundary value problems, II," Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 27, 1-12, 1996.

[4] R.K. Pandey, "On a class of regular singular two point boundary value problems," Journal of Mathematical Analysis and Applications, 208, 388-403, 1997.

[5] M. Abukhaled, S.A. Khurı ve A. Sayfy, "A numerical approach for solving a class of singular boundary value problems arising in physiology," International Journal Of Numerical Analysis And Modeling, 8(2), 353–363, 2011.

[6] S.E. Fadugba, O.H. Edogbanya ve S.C. Zelibe, "Crank Nicolson Method for Solving Parabolic Partial Differential Equations," International Journal of Applied Mathematics and Modeling, 1(3), 8-23, 2013.

[7] D.M. Causon ve C.G. Mingham, " Introductory finite difference methods for PDEs," Bookboon, 2010.

[8] W.Y. Yang, W. Cao, T.S. Chung ve J. Morris, " Applied numerical methods using Matlab," Wiley-Interscience, 2005.

[9] G.E. Urroz, "Numerical Solution to Ordinary Differential Equations," 2004.

[10] B. Fornberg, "Generation of finite difference formulas on arbitrarily spaced grids", 51(184), 699-706, 1988.

[11] S.C. Chapra ve R.P. Canale, "Numerical Methods for Engineering," 7th Edition, Mc Graw Hill, 2015.

[12] J.N. Reddy, "An introduction to the finite element method," 3rd Ed., McGraw-Hill Education (ISE Editions), 2005.

[13] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor ve J.Z. Zhu, "The finite element method: Its basis and fundamentals," 6th ed.,Butterworth-Heinemann, 2005.

[14] M. Bayraktar, "Solution of burgers equation using petrov-galerkin finite element method," M.Sc. Thesis, Pamukkale University, 2017.

[15] R. Courant, "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations," Bulletin of the American Mathematical Society. 49, 1–23, 1943.

[16] R.K. Mohanty ve D.J. Evans, "A fourth order cubic spline alternating group explicit method for non-linear singular two point boundary value problems," International Journal of Computer Mathematics, 479-492, 2003.

[17] R.Bellman, B.G. Kashef ve J. Casti, "Differential quadrature: a technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations," Journal of Computational Physics, 40-52, 1972.

[18] U. Yücel ve M. Sari, "Differential quadrature method (DQM) for a class of singular two-point boundary value problems," International Journal of Computer Mathematics, 86(3), 465-475, 2009.

[19] C.W. Bert ve M. Malik, "Differential quadrature method in computational mechanics: a review," Applied Mechanics Reviews, 49, 1-27, 1996.

[20] R.P. Chen, "One-dimensional non-linear consolidation of multi-layered soil by differential quadrature method," Computers and Geotechnics, 32, 358-369, 2005.

[21] C. Shu, "Differential quadrature and its application in engineering," Springer-Verlag, London, 2000.

[22] C. Shu ve B.E. Richards, "Application of generalized differential quadrature to solve two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations," International Journal for Numerical Methods in Fluids, 15, 791-798, 1992.

[23] P. Roul ve D. Biswal, "A new numerical approach for solving a class of singular two-point boundary value problems," Numerical Algorithms, 75(3), 531–552, 2017.

[24] P. Roul, "On the numerical solution of singular two-point boundary value problems: A domain decomposition homotopy perturbation approach," Mathematical Methods in the Applied Sciences, 1–14, 2017.

[25] A.R Görgün, Ş. Özen ve S. Helhel, "Implementation of Fourier expansion based differential quadrature method (FDQM) and polynomial based differential quadrature method (PDQM) for the 2D Helmholtz problem," Scientific Research and Essays , 8(34), 1670-1675, 2013.

[26] C. Shu ve Y. T. Chew, "Fourier expansion-based differential quadrature and its application to Helmholtz eigenvalue problems," Communications in Numerical Methods in Engineering, 13, 643–653, 1997.

[27] M. Kumar, "A three point finite difference method for a class of singular two-point boundary value problems," Journal of Computational and Applied Mathematics, 145, 89-97, 2002.

[28] R. Singh ve J. Kumar, "Solving a class of singular two-point boundary value problems using New Modified Decomposition Method," Hindawi Publishing Corporation ISRN Computational Mathematics, 11 pages, 2013.

[29] M. Kumar ve N. Singh, "Modified Adomian decomposition method and computer implementation for solving singular boundary value problems arising in various physical problems," Computers and Chemical Engineering, 34 (11), 1750-1760, 2010.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

İletişim Bilgisi: elvergozde@gmail.com

Makaleler

1. S. Selim, G. Elver ve M.Sari, "Numerical behavior of singular two-point boundary value problems in a comparative way, " An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications, 7(3), 288-292, 2017.

Konferans Bildirileri

1. S. Selim ve G. Bayat, "Numerical solution of boundary value problems in a comparative way," International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling, 10-13 Mart, 2019, İstanbul.

2. S. Selim, G. Elver ve M. Sari, "A discussion on singular two-point nonlinear boundary value problems," International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling, 3-7 Temmuz, 2017, İstanbul.

3. S. Selim, G. Elver ve M. Sari," Numerical behavior of singular two-point boundary value problems in a comparative way," 2nd International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences, 20-22 Mayıs, 2017, İstanbul.