10.6 Tabanlı Banach Uzayları Üzerinde Pozitif Operatörler

X bir Banach uzayı ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. Eğer her $x \in X$ için $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ olacak şekilde tek bir $\{\alpha_n\}$ skaler dizisi varsa $\{x_n\}$ dizisine bir Schauder tabanı (yada kısaca bir taban) denir. Bu serinin normda yakınsak olduğu kabul edilir. Her $\{x_n\}$ tabanı

$$C = \{x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n : \alpha_n \geq 0 \;; n = 1, 2, \dots\}$$

şeklinde tanımlı doğal kapalı bir C konisi oluşturur. C konisine $\{x_n\}$ tabanı ile üretilmiş bir (kapalı) koni denir.

$\{x_n\}$ bir X Banach uzayının bir tabanı olsun. Her bir

$x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ için $\quad c_n^*(x) = \alpha_n$

şeklinde tanımlı c_n^* lineer fonksiyoneli X üzerinde sürekli bir lineer fonksiyoneldir. Her bir c_n^*, $\{x_n\}$ ile üretilmiş koniye göre otomatik olarak pozitiftir. Sürekli lineer $\{c_n^*\}$ fonksiyoneller dizisi $c_n^*(x_m) = \delta_{nm}$ eşitliğini sağlar.

Banach uzayı üzerindeki $T : X \to X$ operatörüne eğer $T(C) \subseteq C$ ise pozitiftir denir. Burada C, X'in $\{x_n\}$ tabanı ile üretilmiş kapalı konidir. Açıkça T'nin pozitifliği bu tabana göredir.

Eğer $\{x_n\}$ bir X Banach uzayı için sabit bir taban ise o zaman her sürekli $T: X \to X$ operatörü bir $[t_{ij}]$ sonsuz matrisi ile özdeşleştirilebilir. Bu anlamda bir $[t_{ij}]$ sonsuz matrisinin X üzerinde bir operatör tanımladığı söylenir. $[t_{ij}]$ matrisi ile bir $T: X \to X$ operatörü ancak ve ancak her bir (i,j) çifti için $t_{ij} \geq 0$ ise pozitiftir.

Sıradaki teorem tabanlı bir Banach uzayı üzerindeki pozitif operatörler için Teorem 10.24'ün bir versiyonudur.

Teorem 10.66. X tabanlı bir Banach uzayı ve $T: X \to X$ bir sürekli pozitif operatör olsun. Eğer T operatörü sıfır olmayan pozitif bir vektörde quasinilpotent olan sıfır olmayan pozitif bir operatör ile değişmeli ise o taktirde, T'nin aşikar olmayan kapalı invaryant altuzayı vardır.

İspat. $\{x_n\}$, X'in bir tabanı ve $\{c_n^*\}$ bu taban ile birleştirilmiş katsayı fonksiyonellerin dizisi olsun.

Sıfır olmayan pozitif $A: X \to X$ operatörü $TA = AT$ koşulunu sağlasın ve sıfır olmayan pozitif bir y_0 vektöründe quasinilpotent (yani $\lim_{n\to\infty} \|A^n y_0\|^{1/n} = 0$) olsun. Eğer $Ay_0 = 0$ ise A'nın çekirdeği T altında invaryant olan aşikar olmayan kapalı bir altuzaydır. Böylece $Ay_0 \neq 0$ kabul edebiliriz. O halde bir k için $Ax_k \neq 0$ dır. y_0'ın uygun bir ölçeklendirmesi ile $0 \leq x_k \leq y_0$ kabul edebiliriz.