T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NORMAL FORM İLE TANIMLANMIŞ HİPERYÜZEYLER ÜZERİNE

YUSUF DURAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
DOÇ. DR. MUSTAFA DÜLDÜL

İSTANBUL, 2015

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NORMAL FORM İLE TANIMLANMIŞ HİPERYÜZEYLER ÜZERİNE

Yusuf DURAN tarafından hazırlanan tez çalışması 12.08.2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Do. Dr. Mustafa DÜLDÜL

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Mustafa DÜLDÜL

Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Salim YÜCE

Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU

Bahçeşehir Üniversitesi _____

ÖNSÖZ

Bu tezin ortaya çıkmasında, bana her zaman çok yakın destek veren, çalışmalarımın belli bir noktaya gelmesinde büyük bir özenle rehberlikte bulunan çok değerli hocam Doç Dr. Mustafa DÜLDÜL' e,

Manevi desteğini her zaman hissettiğim aileme ve bilhassa sevgili anneme,

Biricik eşime,

Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik ailesine,

2210-A Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı ile bana destek olan Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumuna (TÜBİTAK)

en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Ağustos, 2015

Yusuf DURAN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ vi

ŞEKİL LİSTESİ vii

ÖZET viii

ABSTRACT ix

BÖLÜM 1

GİRİŞ 1

1.1 Literatür Özeti 1
1.2 Tezin Amacı 2
1.3 Orijinal Katkı 2

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR 3

2.1 Bir Doğrunun Hesse Normal Formu 3
2.2 Bir Nokta ile Bir Doğrunun Uzaklığının Hesse Normal Form ile Hesabı 4
2.3 Bir Düzlemin Hesse Normal Formu 5
2.4 Bir Noktanın Düzleme Uzaklığı 6
2.5 Hesse Matrisi 7
2.6 Eğriler Teorisi 7
2.7 Yüzeyler Teorisi 8
2.8 Şekil Operatörünün Cebirsel Değişmezleri 10

BÖLÜM 3

BİR EĞRİNİN VE YÜZEYİN NORMAL FORMU 11

3.1 Bir Eğrinin ve Yüzeyin Normal Formu 11
3.2 Düzlemsel Bir Eğrinin Normal Formunun 1. ve 2. Mertebeden Türevleri 12
3.3 Hesse Matrisinin Elemanlarının Eğrilik ve Gradient Vektörün Bileşenleri ile İfadesi 14
3.4 Eğrinin Komşuluğunda 1. ve 2. Mertebeden Türev 15

3.5 Yüzey Üzerinde 2. Mertebeden Türev 19
3.6 $\mathbb{E}^3$'te Bir Yüzeyin Normal Formunun Hesse Matrisinin Gradient Vektörün Bileşenleri ve Normal Eğrilikler Cinsinden İfadesi 24

BÖLÜM 4

NORMAL FORM İLE TANIMLANMIŞ HİPERYÜZEYLER ÜZERİNE 30

4.1 $\mathbb{E}^4$'te Bir Hiperyüzeyin Normal Formu 30
4.2 $\mathbb{E}^4$'te Bir Hiperyüzeyin Gauss ve Ortalama Eğrilikleri 32
4.3 $\mathbb{E}^4$'te Bir Hüperyüzeyin Normal Formunun Hesse Matrisinin Gradient Vektörün Bileşenleri ve Normal Eğrilikler Cinsinden İfadesi 34

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER 55

KAYNAKLAR 56

ÖZGEÇMİŞ 57

SİMGE LİSTESİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{E}^n$	$n-$ boyutlu Öklid uzayı
κ	E^3'te Eğrilik
κ_n	Normal eğrilik
$T_M \ P$	P noktasındaki teğet vektör uzayı
$\chi(M)$	Teğet vektör alanları uzayı
h	Normal form fonksiyonu
∇h	h'nın gradient vektörü
H_h	h'nın Hesse matrisi
$\|.\|$	Norm
$\langle , \rangle$	Öklid iç çarpımı

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2. 1 Doğrunun Hesse Formu 3
Şekil 2. 2 Noktanın Doğruya Olan Uzaklığı.....5
Şekil 2. 3 Düzlemin Hesse Formu 6

ÖZET

NORMAL FORM İLE TANIMLANMIŞ HİPERYÜZEYLER ÜZERİNE

Yusuf DURAN

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mustafa DÜLDÜL

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde literatür özeti ve tezin amacı verilmiştir.

İkinci bölümde, doğrunun ve düzlemin Hesse normal formları tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde, düzlemsel bir eğrinin normal formu ve 3-boyutlu Öklid uzayında bir yüzeyin normal formu tanımlanmıştır.

Dördüncü bölüm tezin orijinal kısmıdır. Bu bölümde, 4-boyutlu Öklid uzayında bir hiperyüzeyin normal formu tanımlanarak, hiperyüzeyin normal form fonksiyonunun Hesse matrisinin elemanlarının normal form fonksiyonunun gradient vektörünün bileşenleri ve normal eğrilikler ile ifade edilebileceği gösterilmiştir. Ayrıca Hesse matrisinin sıfırdan farklı özdeğerlerinin hiperyüzeyin asli eğriliklerine karşılık geldiği gösterilmiştir.

Beşinci bölümde sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hesse normal form, eğri, yüzey, gradient vektör, asli eğrilik, normal eğrilik, özdeğer, özvektör, Hesse matrisi

ABSTRACT

ON THE HYPERSURFACES DEFINED BY NORMAL FORM

Yusuf DURAN

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Adviser: Assoc. Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL

This thesis consists of five sections. In the first section literature summary and the purpose of the thesis are given.

The second section includes the definition of Hessian form of line and plane.

Normal form of a curve and surface are defined in the third section.

The fourth section is the original part of this thesis. In this section, normal form of a hypersurface in $\mathbb{E}^4$ is defined. It is shown that the elements of the Hessian matrix of normal form function of the hypersurface can be expressed by the components of gradient of normal form function and normal curvatures of the hypersurface. Also, it is shown that the nonzero eigenvalues of Hessian matrix correspond to the principal curvatures of the hypersurface.

The fifth section consists of conclusions and suggestions.

Keywords: Hessian normal form, curve, surface, gradient vector, principal curvature, normal curvature, eigenvalue, eigenvector, Hessian matrix

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Hesse form, $\mathbb{E}^2$'de bir doğru, $\mathbb{E}^3$'te bir düzlem ve daha büyük boyutlu uzaylarda hiperdüzlem tanımlayan ve Alman matematikçi Ludwig Otto Hesse'nin ismiyle anılan denklemdir. Düzlemsel bir eğri genelde $f(x,y)=0$ şeklinde kapalı ya da $\alpha=\alpha(t)$ şeklinde parametrik denklemleri ile tanımlanır. Ancak herhangi standart gösterimi olmayan eğriler de vardır. Bunlara örnek olarak, bir parametrik eğrinin paraleli, iki eğrinin açıortay eğrisi ve iki parametrik eğrinin "*kaynaştırma(blending)*" eğrisi verilebilir. 1998'de E. Hartmann düzlemsel eğrilerin ve bir yüzeyin normal formunu tanımlamış ve bütün eğrilerin normal formla ifade edilebileceğini göstermiştir [1]. Ayrıca düzlemdeki eğrilerin normal formunun uygulamalarını vermiştir [1]. Ancak $\mathbb{E}^2$'de doğrular ve çemberler ile $\mathbb{E}^3$'te düzlemler ve küreler için normal form açıkça bilinmektedir. Normal form kullanmadaki en önemli avantaj hemen hemen bütün eğrilerin veya yüzeylerin düzgün bir şekilde kapalı eğriler veya yüzeyler olarak düşünülmesidir. Böylece, basit cebirsel işlemlerle zor olan yaklaşım problemleri çözülebilmektedir. 1999 yılında E. Hartmann normal form ile tanımlanmış bir eğrinin ve yüzeyin eğriliklerinin hesabı için normal form fonksiyonunun ikinci mertebeden türevlerinin gerekli olduğunu ve Hesse matrisinin elemanlarının $\mathbb{E}^2$'de eğrilik ve $\mathbb{E}^3$'te normal eğrilikler ile normal form fonksiyonunun gradienti cinsinden ifade edilebileceğini göstermiştir [2]. 2000 yılında E. Hartmann düzlemsel ve uzay eğrileri ile yüzeylerin normalform yardımıyla parametrik gösterimini elde etmek için metotlar vermiştir [3].

1.2 Tezin Amacı

Bu tez çalışmasının amacı $4-$boyutlu Öklid uzayında normal form ile verilmiş bir hiperyüzeyin şekil operatörünün cebirsel değişmezlerinin hiperyüzeyin normal form fonksiyonu yardımıyla nasıl hesaplanabildiğini ve normal form fonksiyonunun Hesse matrisinin elemanlarının hiperyüzeyin normal eğrilikleri ve normal form fonksiyonunun gradient vektörünün bileşenleri cinsinden yazılabildiğini göstermektir.

1.3 Orijinal Katkı

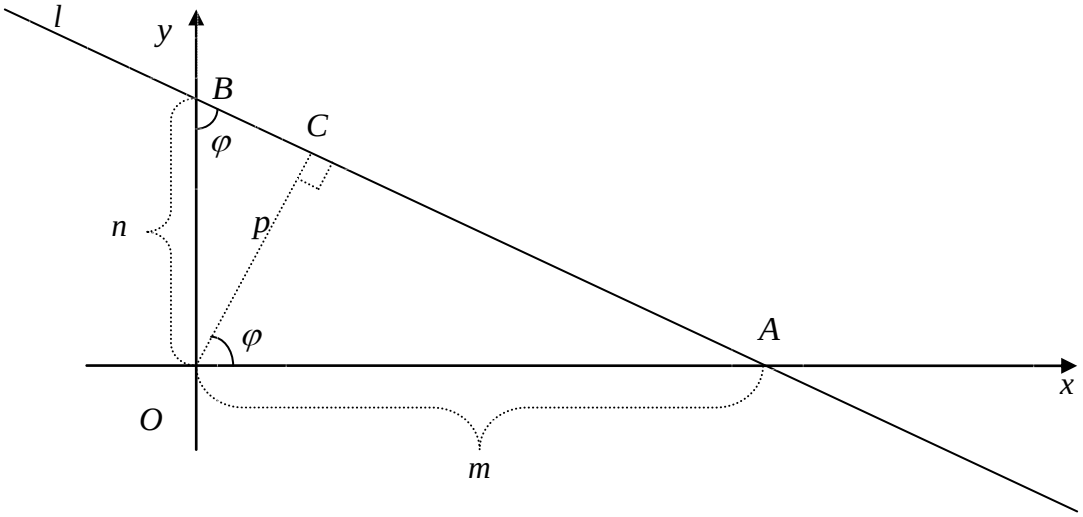
Bu çalışmada, $4-$boyutlu Öklid uzayında normal formu ile verilen hiperyüzeylerin normal eğrilikleri hiperyüzeyin normal form fonksiyonunun Hesse matrisi ve hiperyüzeyin teğet vektörleriyle ifade edilmiştir. Ayrıca, $4-$boyutlu Öklid uzayındaki normal form ile tanımlanmış bir hiperyüzeyin asli eğriliklerinin, normal form fonksiyonunun Hesse matrisinin sıfırdan farklı özdeğerlerine karşılık geldiği gösterilmiştir. Hiperyüzeyin h normal form fonksiyonunun Hesse matrisinin elemanlarının ∇h birim normal vektörünün bileşenleri yardımıyla ifade edilebileceği gösterilmiştir. Hiperyüzeyin Gauss ve ortalama eğrilikleri normal form fonksiyonunun ikinci mertebeden kısmi türevleri cinsinden ifade edilmiştir.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Bir Doğrunun Hesse Normal Formu

Tanım 2.1 $xy-$düzleminde $l: ax+by+c=0$ doğrusu verilsin. Bu doğruya orijin noktasından çizilen dikmenin uzunluğu p ve bu dikmenin $x-$ekseni ile pozitif yönde yaptığı açı φ olsun.



Şekil 2. 1 Doğrunun Hesse Formu

$\overset{\Delta}{\mathrm{OAC}}$ üçgeninden $\cos\varphi = \frac{p}{m} \Rightarrow m = \frac{p}{\cos\varphi}$ ve $\overset{\Delta}{\mathrm{OCB}}$ üçgeninden $\sin\varphi = \frac{p}{n} \Rightarrow n = \frac{p}{\sin\varphi}$'dir. Doğrunun denklemi $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$ şeklinde de yazılabileceğinden m ve n yerlerine yazılırsa,

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = p \tag{2.1}$$

eşitliği elde edilir. Orjinden çizilen dikme ve bu dikmenin $x-$ekseni ile yaptığı açı ile ifade edilebilen bu denkleme, doğrunun **Hesse normal formu** denir.

Doğrunun $ax + by + c = 0$ kartezyen denklemi λ skaleri ile çarpılırsa $\lambda ax + \lambda by + \lambda c = 0$ elde edilir. $x\cos\varphi + y\sin\varphi = p$ denklemi de aynı doğruyu temsil ettiğinden, aslında birbirlerine eşittirler. O halde, $\lambda a = \cos\varphi$ ve $\lambda b = \sin\varphi$ yazılabilir. Buradan,

$$(\lambda a)^2 + (\lambda b)^2 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{2.2}$$

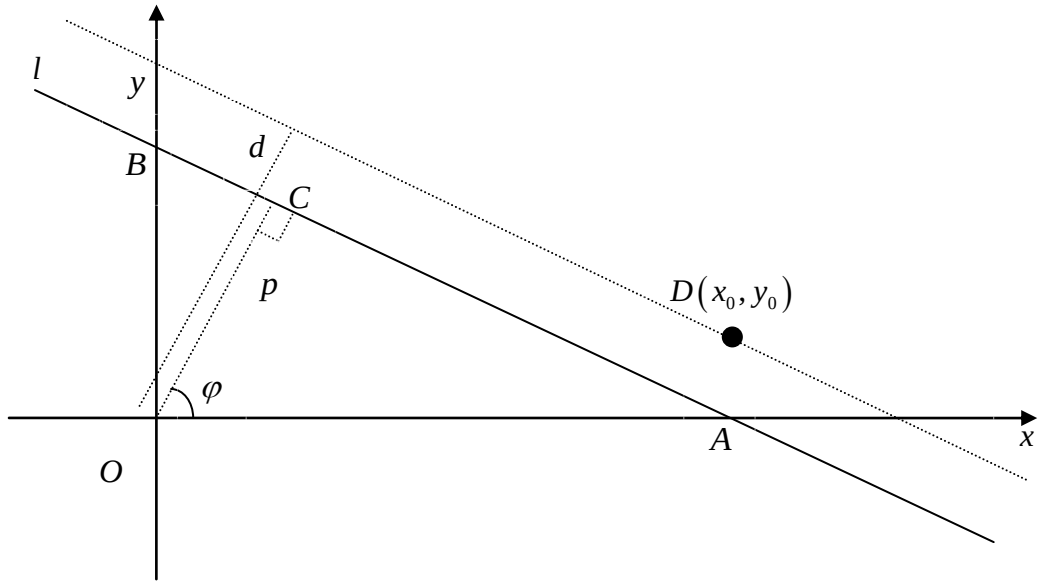
bulunur. Kartezyen denklemde yerine yazılırsa,

$$\frac{ax+by+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} = 0 \tag{2.3}$$

eşitliği elde edilir. (2.3) eşitliği, doğrunun Hesse normal formunun, kartezyen denkleminin katsayıları ile ifadesidir.

2.2 Bir Nokta ile Bir Doğrunun Uzaklığının Hesse Normal Form ile Hesabı

Düzlemde bir doğru l ve bu doğrunun orijine uzaklığı p, düzlemdeki bir $D(x_o, y_0)$ noktasının doğruya uzaklığı d olsun. O halde D noktasının orijine olan uzaklığı $p + d$'dir.



Şekil 2. 2 Noktanın Doğruya Olan Uzaklığı

$D(x_o, y_0)$ noktasından geçen ve l doğrusuna paralel olan l_0 doğrusunun Hesse normal formu

$$x_0 \cos\varphi + y_0 \sin\varphi = p + d \tag{2.4}$$

denklemidir. (2.2) ve (2.3) eşitliklerinden,

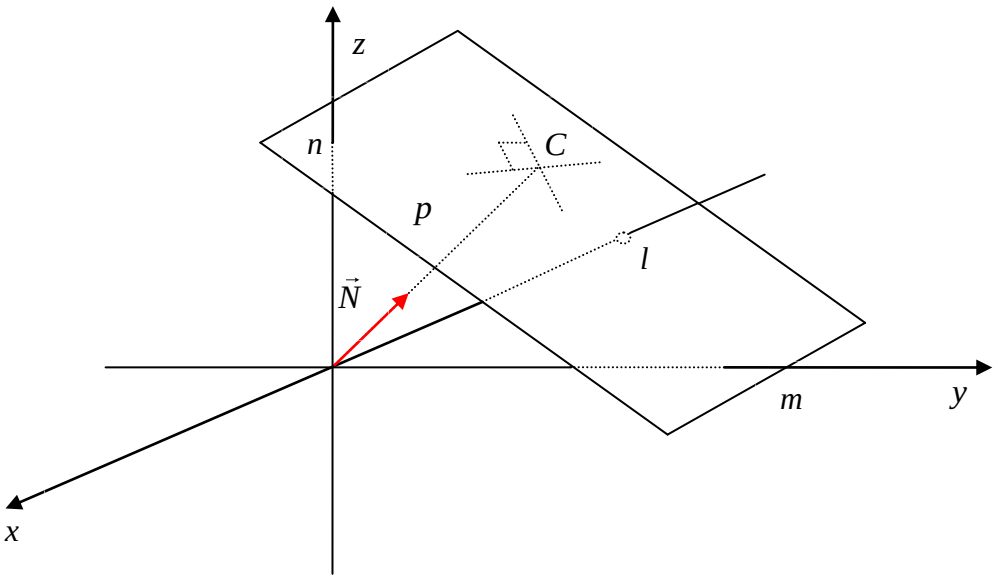
$$\frac{ax_0 + by_0 + c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} = d \tag{2.5}$$

elde edilir.

2.3 Bir Düzlemin Hesse Normal Formu

Düzlem denklemi, orijinden düzleme çizilen dikmenin uzunluğu ve bu dikmenin eksenlerle yaptığı açılar cinsinden ifade edilebilir.

Tanım 2.2 $\mathbb{E}^3$'te bir $D: ax + by + cz + d = 0$ düzlemin birim normali N ve normalin x, y, z eksenleri ile pozitif yönde yaptığı açılar sırası ile α, β, γ ve orijin noktasının düzleme uzaklığı p olsun.



Şekil 2. 3 Düzlemin Hesse Formu

$\cos\alpha = \frac{p}{l} \Rightarrow l = \frac{p}{\cos\beta}$, $\cos\beta = \frac{p}{m} \Rightarrow m = \frac{p}{\cos\beta}$ ve $\cos\gamma = \frac{p}{n} \Rightarrow n = \frac{p}{\cos\gamma}$ eşitlikleri,

$ax + by + cz + d = 0$ denkleminde yerine yazılırsa

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \tag{2.6}$$

düzlemin Hesse normal formu elde edilir.

2.4 Bir Noktanın Düzleme Uzaklığı

$\mathbb{E}^3$'te bir düzlem $D: ax + by + cz + d = 0$, orijin noktasının D düzlemine olan uzaklığı p ve uzaydaki bir $G(x_0, y_0, z_0)$ noktasının D düzlemine olan uzaklığı ℓ olsun. G noktasından geçen ve D düzlemine paralel olan D_0 düzleminin orijine olan uzaklığı $p + \ell$ ve D_0 düzleminin Hesse normal formu

$$x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma = p + \ell \tag{2.7}$$

şeklindedir. G noktasının D düzlemine olan uzaklığı için

$$\ell = x_0\cos\alpha + y_o\cos\beta + z_0\cos\gamma - p \tag{2.8}$$

yazılabilir.

$D: ax+by+cz+d=0$ düzleminin $N=(a,b,c)$ normal vektörü (2.6) eşitliği ile beraber düşünülürse $p=\dfrac{-d}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ ve $\dfrac{N}{\|N\|}=\dfrac{(a,b,c)}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ olup,

$$\cos\alpha=\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\cos\beta=\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\cos\gamma=\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \tag{2.9}$$

elde edilir. (2.9) eşitlikleri (2.8)'de yerine yazılırsa, G noktasının D düzlemine olan uzaklığı

$$\ell=\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \tag{2.10}$$

şeklinde bulunur.

2.5 Hesse Matrisi

Tanım 2.3 $f:\mathbb{E}^n\to\mathbb{R}$ ikinci mertebeden türevlenebilir ve sürekli bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun ikinci mertebeden kısmi türevlerini içeren

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_n} \end{bmatrix}$$

matrisine f'nin Hesse matrisi denir ve H_f ile gösterilir.

2.6 Eğriler Teorisi

Tanım 2.4 $I\subseteq\mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere, $\gamma:I\to\mathbb{E}^n$ fonksiyonu diferensiyellenebilirse $\gamma(I)\subset\mathbb{E}^n$ alt kümesine $\mathbb{E}^n$'de (I,γ) koordinat komşuluğu ile tanımlanmış bir diferensiyellenebilir eğri adı verilir.

Tanım 2.5 $\gamma:I\to\mathbb{E}^n$ bir eğri olsun. $\forall s\in I$ için $\gamma'(s)\neq\vec{0}$ ise γ eğrisine regüler eğri denir.

Tanım 2.6 $\gamma : I \to \mathbb{E}^n$ bir eğri olsun. $\forall s \in I$ için $\left\| \gamma'(s) \right\| = 1$ ise γ eğrisine birim hızlı eğri, s parametresine de yay parametresi denir.

Tanım 2.7 $\gamma : I \to \mathbb{E}^n$ birim hızlı eğrisi için, $T(s) = \gamma'(s)$ ile tanımlanan T vektör alanına γ eğrisinin birim teğet vektör alanı denir.

Tanım 2.8 $\gamma : I \to \mathbb{E}^n$ birim hızlı eğrisi için, $\kappa(s) = \left\| T'(s) \right\|$ ile tanımlanan $\kappa : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna, γ eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. Belli bir $s_0 \in I$ için $\kappa(s_0) \in \mathbb{R}$ sayısına eğrinin $\gamma(s_0)$ noktasındaki eğriliği denir.

Tanım 2.9 $\mathbb{E}^n$'de $\kappa > 0$ olan birim hızlı $\gamma : I \to \mathbb{E}^n$ eğrisi için $N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} T'(s)$ ile tanımlı N vektör alanına γ eğrisinin asli normal vektör alanı denir.

2.7 Yüzeyler Teorisi

Tanım 2.10 Bir $M \subset \mathbb{E}^3$ kümesi verilsin. $\forall P \in M$ noktası için, görüntüsü P noktasının M'deki komşuluğunu kapsayan ve $D \subset \mathbb{E}^2$ açık kümesi üzerinde tanımlı $X : D \to M$ dönüşümü

i) Birebir

ii) Regüler

iii) $X^{-1} : X(D) \to D$ fonksiyonu sürekli

olacak şekilde bulunabiliyorsa M kümesine $\mathbb{E}^3$'te bir yüzey denir.

Teorem 2.1 $\mathbb{E}^n$'de bir $M : f(x_1, x_2, ..., x_n) = c$ kümesi bir hiperyüzeydir $\Leftrightarrow$ $\forall P \in M$ için $\nabla f(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)(P) \neq \vec{0}$'dır.

Tanım 2.11 M, $\mathbb{E}^n$'de bir hiperyüzey olsun. $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere $\gamma : I \to M$ diferensiyellenebilir fonksiyonuna M hiperyüzeyi üzerinde bir eğri denir.

Tanım 2.12 $M \subset \mathbb{E}^n$ bir hiperyüzey olsun. $\vec{v}_P \in T_{\mathbb{E}^n}(P)$ tanjant vektörü P noktasından geçen ve hiperyüzey üzerinde kalan bir eğrinin hız vektörü oluyorsa, $\vec{v}_P$ tanjant

vektörüne M hiperyüzeyinin P noktasında bir teğet vektörü denir. Hiperyüzeyin $P \in M$ noktasındaki bütün teğet vektörlerinin kümesi M'nin P noktasındaki teğet uzayı olarak adlandırılır ve $T_M(P)$ ile gösterilir.

Tanım 2.13 $M \subset \mathbb{E}^n$ hiperyüzeyi boyunca bir V vektör alanı verilsin. $\forall P \in M$ noktasına bir $V(P) = \vec{v}_P$ teğet vektörü karşılık getiren V vektör alanına M hiperyüzeyi boyunca bir teğet vektör alanı denir.

Tanım 2.14 $M \subset \mathbb{E}^n$ bir hiperyüzey ve $P \in M$ bir nokta olsun. P noktasındaki $T_M(P)$ teğet uzayına dik olan bir U_P tanjant vektörüne M yüzeyinin P noktasındaki normal vektörü denir.

Tanım 2.15 $M \subset \mathbb{E}^n$ hiperyüzeyi boyunca bir U vektör alanı verilsin. Eğer $\forall P \in M$ için elde edilen $U(P) = \vec{u}_P$ tanjant vektörü M'nin bir normal vektörü oluyorsa, U vektör alanına M boyunca bir normal vektör alanı denir.

Teorem 2.2 $\mathbb{E}^n$'de $M : f(x_1, x_2, ..., x_n) = c$ hiperyüzeyi verilsin. ∇f, M boyunca sıfırdan farklı bir normal vektör alanıdır.

Tanım 2.16 M, $\mathbb{E}^n$ de bir hiperyüzey ve M'nin birim normal vektör alanı N olsun. $\mathbb{E}^n$'de Riemann konneksiyonu D olmak üzere $\forall X \in \chi(M)$ için $S(X) = D_X N$ ile tanımlı S dönüşümüne M'nin şekil operatörü veya Weingarten dönüşümü denir.

Tanım 2.17 $M \subset \mathbb{E}^3$ regüler yüzeyi verilsin.

$$\kappa_n(\vec{u}_P) = \langle S(\vec{u}_P), \vec{u}_P \rangle$$

ile tanımlanan $\kappa_n(\vec{u}_P) \in \mathbb{R}$ sayısına M yüzeyinin $\vec{u}_P$ birim teğet vektörü doğrultusundaki normal eğriliği denir.

Daha genel olarak, herhangi bir $\vec{v}_P \in T_M(P)$ teğet vektörü için

$$\kappa_n(\vec{v}_P) = \frac{\langle S(\vec{v}_P), \vec{v}_P \rangle}{\|\vec{v}_P\|^2}$$

ile tanımlanır.

2.8 Şekil Operatörünün Cebirsel Değişmezleri

Tanım 2.18 M**,** $\mathbb{E}^n$**'**de bir hiperyüzey ve M'nin P noktasındaki şekil operatörü $S_P : T_M(P) \to T_M(P)$ olsun. $S(X_P) = \lambda X_P$ eşitliğini sağlayan λ sayılarına M hiperyüzeyinin P noktasındaki asli eğrilikleri, X_P vektörüne de λ'ya karşılık gelen asli doğrultu denir.

Tanım 2.19 M**,** $\mathbb{E}^n$'de bir hiperyüzey olsun.

$$K : M \to \mathbb{R}$$
$$P \to K(P) = \det S_p$$

fonksiyonuna M'nin Gauss eğrilik fonksiyonu, $K(P) \in \mathbb{R}$ sayısına da M'nin P noktasındaki Gauss eğriliği denir.

Tanım 2.20 M, $\mathbb{E}^n$'de bir hiperyüzey olsun.

$$H : M \to \mathbb{R}$$
$$P \to H(P) = \frac{1}{n-1} iz S_p$$

şeklinde tanımlı H fonksiyonuna M'nin ortalama eğrilik fonksiyonu, $H(P)$ sayısına da M'nin P noktasındaki ortalama eğriliği denir.

BÖLÜM 3

BİR EĞRİNİN VE YÜZEYİN NORMAL FORMU

3.1 Bir Eğrinin ve Yüzeyin Normal Formu

Düzlemsel bir eğri genelde $f(x,y)=0$ şeklinde kapalı ya da $\alpha=\alpha(t)$ şeklinde parametrik denklemleri ile tanımlanır. Ancak herhangi standart gösterimi olmayan eğriler de vardır. Bunlara örnek olarak, bir parametrik eğrinin paraleli, iki eğrinin açıortay eğrisi ve iki parametrik eğrinin kaynaştırma eğrisi verilebilir. Hesse normal formunun genelleştirilmesi ile standart gösterimi olmayan bütün bu eğriler, kapalı formda ifade edilebilirler.

Tanım 3.1 Γ ve Φ, sırası ile, $\mathbb{E}^2$ ve $\mathbb{E}^3$'de $h=0$ kapalı denklemi ile verilen bir eğri ve yüzey olsun. Eğer h fonksiyonu sürekli diferensiyellenebilir ve $\Gamma(\Phi)$ üzerinde ve civarında $\|\nabla h\|=1$ ise $h=0$ eşitliğine $\Gamma(\Phi)$'nın normal formu denir. h'ya normal form fonksiyonu veya yönlü uzaklık fonksiyonu denir [2].

Teorem 3.1 Herhangi C^n-sürekli$(n\geq 2)$ Γ düzlemsel eğrisinin bir V komşuluğunda h normal form fonksiyonu vardır ve h da C^n-sınıftandır. h fonksiyonu V'de aşağıdaki özellikleri sağlar.

1) $h(\mathrm{x}+\delta\nabla h(\mathrm{x}))=h(\mathrm{x})+\delta$ (3.1)

2) $\nabla h(\mathrm{x}+\delta\nabla h(\mathrm{x}))=\nabla h(\mathrm{x})$ (3.2)

İspat [4-6]

3.2 Düzlemsel Bir Eğrinin Normal Formunun 1. ve 2. Mertebeden Türevleri

$\alpha(s)=(\alpha_1(s),\alpha_2(s))$ s yay parametresi ile verilen C^2-sürekli Γ eğrisinin normal formu $h=0$, birim teğet vektörü $t=\alpha'(s)$, asli normal vektörü $n(s)=\nabla h(\alpha(s))$ ve h'nin Hesse matrisi $H_h=\begin{bmatrix} h_{xx} & h_{yx} \\ h_{xy} & h_{yy} \end{bmatrix}$ olsun. $h(\alpha(s))=0$ eşitliğinden s'ye göre türev alalım.

1) $\dfrac{d}{ds}\left(h(\alpha(s))\right)=h_x\alpha_1'(s)+h_y\alpha_2'(s)=\left\langle (h_x,h_y),(\alpha_1'(s),\alpha_2'(s))\right\rangle=0$

eşitliğinden

$$\langle \nabla h,t\rangle=0 \tag{3.3}$$

bulunur.

2) $\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{d}{ds}h(\alpha(s))\right)=\dfrac{d}{ds}\left(h_x\alpha_1'(s)+h_y\alpha_2'(s)\right)=0$ eşitliğinden

$$\left(h_{xx}\alpha_1'(s)+h_{xy}\alpha_2'(s)\right)\alpha_1'(s)+h_x\alpha_1''(s)+\left(h_{yx}\alpha_1'(s)+h_{yy}\alpha_2'(s)\right)\alpha_2'(s)+h_y\alpha_2''(s)=0$$

$$\left\langle \left(h_{xx}\alpha_1'(s)+h_{xy}\alpha_2'(s),h_{yx}\alpha_1'(s)+h_{yy}\alpha_2'(s)\right),(\alpha_1'(s),\alpha_2'(s))\right\rangle+\left\langle (h_x,h_y),(\alpha_1''(s),\alpha_2''(s))\right\rangle=0$$

olup,

$$\begin{bmatrix}\alpha_1'(s) & \alpha_2'(s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_{xx} & h_{yx} \\ h_{xy} & h_{yy}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1'(s) \\ \alpha_2'(s)\end{bmatrix}+\left\langle (h_x,h_y),(\alpha_1'',\alpha_2'')\right\rangle=0 \tag{3.4}$$

veya

$$tH_ht^T+\langle \nabla h,\alpha''\rangle=0$$

yazılabilir. $\alpha''=t'=\kappa n$ olduğundan

$$tH_ht^T=-\langle \nabla h,\alpha''\rangle=-k=\kappa \tag{3.5}$$

elde edilir [2]. Son eşitlikten

$$H_ht^T=\kappa t \tag{3.6}$$

bulunur. Böylece $t=\begin{bmatrix}-h_y & h_x\end{bmatrix}$ teğet vektörü H_h matrisinin bir özvektörü olup, bu özvektöre karşılık gelen özdeğer $\lambda_1=\kappa$'dır [2]. Ayrıca

$$\kappa = tH_h t^T = \begin{bmatrix}-h_y & h_x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_{xx} & h_{yx}\\ h_{xy} & h_{yy}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-h_y\\ h_x\end{bmatrix} = h_y^2 h_{xx} - 2h_x h_y h_{xy} + h_x^2 h_{yy} \tag{3.7}$$

yazılabilir [2].

Normal form tanımından bildiğimiz $\|\nabla h\|^2 = (h_x)^2 + (h_y)^2 = 1$ denkleminin türevleri alınırsa

$$\left.\begin{aligned} h_x h_{xx} + h_y h_{yx} &= 0\\ h_x h_{xy} + h_y h_{yy} &= 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix}h_{xx} & h_{yx}\\ h_{xy} & h_{yy}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_x\\ h_y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \tag{3.8}$$

olup,

$$H_h \nabla h = 0$$

elde edilir [2]. Böylece H_h matrisinin diğer bir özdeğeri $\lambda_2 = 0$'dır. H_h matrisinin karakteristik polinomu

$$\det(H_h - \lambda I) = \begin{vmatrix}h_{xx}-\lambda & h_{yx}\\ h_{xy} & h_{yy}-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 - (h_{xx}+h_{yy})\lambda + \det(H_h) \tag{3.9}$$

şeklindedir. $\lambda_2 = 0$ bir özdeğer olduğundan

$$\det(H_h) = 0 \tag{3.10}$$

olduğu kullanılırsa, h fonksiyonun Hesse matrisinin karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - (h_{xx}+h_{yy})\lambda = 0 \tag{3.11}$$

olarak bulunur [2]. Böylece Hesse matrisinin birinci özdeğeri için

$$\lambda_1 = \kappa = h_{xx} + h_{yy} \tag{3.12}$$

elde edilir [2]. Ayrıca Cayley-Hamilton teoremine göre her matris kendi karakteristik denklemini sağladığından

$H_h^2 = \kappa H_h$'dır [2]. (3.13)

3.3 Hesse Matrisinin Elemanlarının Eğrilik ve Gradient Vektörün Bileşenleri ile İfadesi

Teorem 3.2 $\mathbb{E}^2$'de bir eğri Γ ve Γ'nın normal formu $h(x,y)=0$ olsun. Γ'nın eğriliği κ ve teğet vektörü $t=(-h_y,h_x)$ ise h fonksiyonunun Hesse matrisi

$$H_h=\begin{bmatrix} h_{xx} & h_{yx} \\ h_{xy} & h_{yy} \end{bmatrix}=\kappa\begin{bmatrix} h_y^2 & -h_xh_y \\ -h_xh_y & h_x^2 \end{bmatrix}=\kappa\begin{bmatrix} -h_y \\ h_x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -h_y & h_x \end{bmatrix}=\kappa t^T t$$

şeklinde ifade edilebilir [2].

İspat (3.7) ve (3.8) denklemlerinden

$$\left.\begin{array}{lll} h_xh_{xx} & & +h_yh_{xy}=0 \\ & h_yh_{yy} & +h_xh_{xy}=0 \\ h_y^2h_{xx} & +h_x^2h_{yy} & -2h_xh_yh_{xy}=\kappa \end{array}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix} h_x & 0 & h_y \\ 0 & h_y & h_x \\ h_y^2 & h_x^2 & -2h_xh_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_{xx} \\ h_{yy} \\ h_{xy} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \kappa \end{bmatrix}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin katsayılar matrisinin determinantı

$$\begin{vmatrix} h_x & 0 & h_y \\ 0 & h_y & h_x \\ h_y^2 & h_x^2 & -2h_xh_y \end{vmatrix}=h_x\begin{vmatrix} h_y & h_x \\ h_x^2 & -2h_xh_y \end{vmatrix}+h_y\begin{vmatrix} 0 & h_y \\ h_y^2 & h_x^2 \end{vmatrix}=-2h_x^2h_y^2-h_x^4-h_y^4=-\left(h_x^2+h_y^2\right)^2=-1$$

olup, Cramer metodu uygulanırsa,

$$h_{xx}=-\begin{vmatrix} 0 & 0 & h_y \\ 0 & h_y & h_x \\ \kappa & h_x^2 & -2h_xh_y \end{vmatrix}=-\kappa\begin{vmatrix} 0 & h_y \\ h_y & h_x \end{vmatrix}=\kappa h_y^2, \tag{3.14}$$

$$h_{yy}=-\begin{vmatrix} h_x & 0 & h_y \\ 0 & 0 & h_x \\ h_y^2 & \kappa & -2h_xh_y \end{vmatrix}=\kappa\begin{vmatrix} h_x & h_y \\ 0 & h_x \end{vmatrix}=\kappa h_x^2, \tag{3.15}$$

$$h_{xy}=-\begin{vmatrix} h_x & 0 & 0 \\ 0 & h_y & 0 \\ h_y^2 & h_x^2 & \kappa \end{vmatrix}=-\kappa\begin{vmatrix} h_x & 0 \\ 0 & h_y \end{vmatrix}=-\kappa h_xh_y \tag{3.16}$$

elde edilir [2]. Bulunan değerler Hesse matrisinde yerine yazıldığında,

$$H_h = \begin{bmatrix} h_{xx} & h_{yx} \\ h_{xy} & h_{yy} \end{bmatrix} = \kappa \begin{bmatrix} h_y^2 & -h_x h_y \\ -h_x h_y & h_x^2 \end{bmatrix} = \kappa \begin{bmatrix} -h_y \\ h_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -h_y & h_x \end{bmatrix} = \kappa t^T t \tag{3.17}$$

bulunur. Böylece h fonksiyonunun Hesse matrisinin eğrilik ve teğet vektör cinsinden ifadesi (3.17) ile verilebilir [2].

Örnek 3.1 $\Gamma : x^2 + y^2 = 16$ çemberinin normal formunu bulalım.

$f(x,y) = x^2 + y^2 - 16 = 0$ alınırsa çemberin birim normal vektörü $\nabla h = \dfrac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ olup,

$$(h_x, h_y) = \left(\frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}}, \frac{2y}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}} \right) \Rightarrow \begin{cases} h_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ h_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

elde edilir.

$$\int h_x dx = \int \left(\frac{x dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \quad \Rightarrow \quad h(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} + f(y)$$

olup,

$$h_y(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + f'(y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \Rightarrow \quad f'(y) = 0$$

yani $f(y) = c$ (sabit) bulunur. h normal formu, verilen eğrinin başka bir ifadesi olduğu için, eğri üzerindeki noktalar normal formu sağlar. $(0,4)$ noktası çember üzerinde olduğundan $h(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} + c = 0$ denkleminde yerine yazılırsa, $c = -4$ elde edilir. Böylece Γ eğrisinin normal formu $h(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} - 4 = 0$ şeklindedir.

3.4 Eğrinin Komşuluğunda 1. ve 2. Mertebeden Türev

Teorem 3.3 $\mathbb{E}^2$'deki Γ_0 eğrisinin normal formu $h(x,y) = 0$ ve eğrinin $\mathrm{x}(x,y) \in \Gamma_0$ noktasındaki eğriliği κ olsun. $\delta \in \mathbb{R}$ sayısı $1 + \delta\kappa(\mathrm{x}) > 0$ olacak şekilde seçilsin. h fonksiyonundan δ kadar uzaklıktaki Γ_δ eğrisinin $\mathrm{x}_\delta = \mathrm{x} + \delta \nabla h(\mathrm{x})$ noktasındaki eğriliği

$$\kappa(\mathrm{x}_\delta)=\frac{\kappa(\mathrm{x})}{1+\delta\kappa(\mathrm{x})} \tag{3.18}$$

biçimindedir [2].

İspat Teorem 2.1'deki $h(\mathrm{x}_\delta)=h(\mathrm{x})+\delta$ eşitliğinin kısmi türevleri alınırsa

$$\left(I+\delta H_h(\mathrm{x})\right)\nabla h^T(\mathrm{x}_\delta)=\nabla h^T(\mathrm{x}) \tag{3.19}$$

lineer denklem sistemine ulaşılır [2]. Bu denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı

$$\begin{vmatrix}1+\delta h_{xx}(\mathrm{x}) & \delta h_{yx}(\mathrm{x})\\ \delta h_{xy}(\mathrm{x}) & 1+\delta h_{yy}(\mathrm{x})\end{vmatrix}=1+\delta\left(h_{xx}(\mathrm{x})+h_{yy}(\mathrm{x})\right)+\delta^2\left(h_{xx}(\mathrm{x})h_{yy}(\mathrm{x})-h_{xy}^2(\mathrm{x})\right)$$

$$=1+\delta\left(h_{xx}(\mathrm{x})+h_{yy}(\mathrm{x})\right)+\delta^2\det\left(H_h(\mathrm{x})\right)$$

olup, (3.10) ve (3.12) kullanıldığında katsayılar matrisinin determinantının

$$\begin{vmatrix}1+\delta h_{xx}(\mathrm{x}) & \delta h_{yx}(\mathrm{x})\\ \delta h_{xy}(\mathrm{x}) & 1+\delta h_{yy}(\mathrm{x})\end{vmatrix}=1+\delta\kappa(\mathrm{x})\neq 0$$

olduğu görülür. Yani denklem sistemi tek çözüme sahiptir. Cramer metodu uygulandığında,

$$h_x(\mathrm{x}_\delta)=\frac{1}{1+\delta\kappa(\mathrm{x})}\begin{vmatrix}h_x(\mathrm{x}) & \delta h_{yx}(\mathrm{x})\\ h_y(\mathrm{x}) & 1+\delta h_{yy}(\mathrm{x})\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{1+\delta\kappa(\mathrm{x})}\left\{h_x(\mathrm{x})+\delta h_x(\mathrm{x})h_{yy}(\mathrm{x})-\delta h_y(\mathrm{x})h_{xy}(\mathrm{x})\right\}$$

$$=\frac{h_x(\mathrm{x})+\delta\left(h_x(\mathrm{x})h_{yy}(\mathrm{x})-h_y(\mathrm{x})h_{xy}(x)\right)}{1+\delta\kappa(\mathrm{x})}$$

$$=\frac{h_x(\mathrm{x})+\delta\left(h_x(\mathrm{x})h_{yy}(\mathrm{x})+h_x(\mathrm{x})h_{xx}(x)\right)}{1+\delta\kappa(\mathrm{x})} \qquad "h_xh_{xx}+h_yh_{xy}=0\Rightarrow h_xh_{xx}=-h_yh_{xy}"$$

$$=\frac{h_x(\mathrm{x})\left(1+\delta\left(h_{yy}(\mathrm{x})+h_{xx}(x)\right)\right)}{1+\delta\kappa(\mathrm{x})}$$

$$=h_x(\mathrm{x})$$

ve

$$h_y(\mathrm{x}_\delta) = \frac{1}{1+\delta\kappa(\mathrm{x})}\begin{vmatrix} 1+\delta h_{xx}(\mathrm{x}) & h_x(\mathrm{x}) \\ \delta h_{xy}(\mathrm{x}) & h_y(\mathrm{x}) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{h_y(\mathrm{x}) + \delta\left(h_y(\mathrm{x})h_{xx}(\mathrm{x}) - h_x(\mathrm{x})h_{xy}(\mathrm{x})\right)}{1+\delta\kappa(\mathrm{x})}$$

$$= \frac{h_y(\mathrm{x})\left(1+\delta\kappa(\mathrm{x})\right)}{1+\delta\kappa(\mathrm{x})} \qquad "h_x h_{xy} = -h_y h_{yy}"$$

$$= h_y(\mathrm{x})$$

elde edilir. Buradan

$$\nabla h(\mathrm{x}_\delta) = \nabla h(\mathrm{x}) \tag{3.20}$$

sonucuna ulaşılır [2].

Benzer şekilde (3.20) eşitliğinin de kısmi türevleri alınırsa

$$\left(I + \delta H_h(\mathrm{x})\right) H_h(\mathrm{x}_\delta) = H_h(\mathrm{x})$$

lineer denklem sistemine ulaşılır. Bu denklem sistemini, $H_h(\mathrm{x}_\delta)$ ve $H_h(\mathrm{x})$ matrislerinin önce birinci ardından ikinci sütunlarına göre Cramer metodu ile aşağıdaki biçimde çözebiliriz.

a) $H_h(\mathrm{x}_\delta)$ ve $H_h(\mathrm{x})$ matrislerinin 1. sütunlarını aldığımızda

$$\begin{bmatrix} 1+\delta h_{xx}(\mathrm{x}) & \delta h_{yx}(\mathrm{x}) \\ \delta h_{xy}(\mathrm{x}) & 1+\delta h_{yy}(\mathrm{x}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_{xx}(\mathrm{x}_\delta) \\ h_{xy}(\mathrm{x}_\delta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{xx}(\mathrm{x}) \\ h_{xy}(\mathrm{x}) \end{bmatrix}$$

sistemini elde ederiz. Cramer metodunu kullanırsak,

$$h_{xx}(\mathrm{x}_\delta) = \frac{\begin{vmatrix} h_{xx}(\mathrm{x}) & \delta h_{yx}(\mathrm{x}) \\ h_{xy}(\mathrm{x}) & 1+\delta h_{yy}(\mathrm{x}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+\delta h_{xx}(\mathrm{x}) & \delta h_{yx}(\mathrm{x}) \\ \delta h_{xy}(\mathrm{x}) & 1+\delta h_{yy}(\mathrm{x}) \end{vmatrix}} = \frac{h_{xx}(\mathrm{x}) + \delta\left(h_{xx}(\mathrm{x})h_{yy}(\mathrm{x}) - h_{xy}^2(\mathrm{x})\right)}{1+\delta\kappa(\mathrm{x})}$$

eşitliğinden

$$h_{xx}(\mathrm{x}_\delta)=\frac{h_{xx}(\mathrm{x})}{1+\delta\kappa(\mathrm{x})}$$

bulunur.

$$h_{xy}(\mathrm{x}_\delta)=\frac{\begin{vmatrix}1+\delta h_{xx}(\mathrm{x}) & h_{yx}(\mathrm{x})\\ \delta h_{xy}(\mathrm{x}) & h_{yy}(\mathrm{x})\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1+\delta h_{xx}(\mathrm{x}) & \delta h_{yx}(\mathrm{x})\\ \delta h_{xy}(\mathrm{x}) & 1+\delta h_{yy}(\mathrm{x})\end{vmatrix}}=\frac{h_{xy}(\mathrm{x})+\delta\left(h_{xx}(\mathrm{x})h_{xy}(\mathrm{x})-h_{xx}(\mathrm{x})h_{xy}(\mathrm{x})\right)}{1+\delta\kappa(\mathrm{x})}$$

eşitliğinden

$$h_{xy}(\mathrm{x}_\delta)=\frac{h_{xy}(\mathrm{x})}{1+\delta\kappa(\mathrm{x})}$$

elde edilir.

b) Benzer şekilde, 2. sütunlara göre

$$\begin{bmatrix}1+\delta h_{xx}(\mathrm{x}) & \delta h_{yx}(\mathrm{x})\\ \delta h_{xy}(\mathrm{x}) & 1+\delta h_{yy}(\mathrm{x})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_{yx}(\mathrm{x}_\delta)\\ h_{yy}(\mathrm{x}_\delta)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}h_{yx}(\mathrm{x})\\ h_{yy}(\mathrm{x})\end{bmatrix}$$

şeklindeki denklem sistemi Cramer metodu ile çözülürse

$$h_{yx}(\mathrm{x}_\delta)=\frac{h_{yx}(\mathrm{x})}{1+\delta\kappa(\mathrm{x})},\ h_{yy}(\mathrm{x}_\delta)=\frac{h_{yy}(\mathrm{x})}{1+\delta\kappa(\mathrm{x})}$$

sonucuna ulaşılır. Bu değerler yerlerine yazılırsa

$$H_h(\mathrm{x}_\delta)=\frac{1}{1+\delta\kappa(\mathrm{x})}H_h(\mathrm{x}) \tag{3.21}$$

elde edilir. (3.17) eşitliği kullanıldığında (3.21) denklemi

$$\kappa(\mathrm{x}_\delta)\begin{bmatrix}-h_y(\mathrm{x}_\delta)\\ h_x(\mathrm{x}_\delta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-h_y(\mathrm{x}_\delta) & h_x(\mathrm{x}_\delta)\end{bmatrix}=\frac{\kappa(\mathrm{x})}{1+\delta\kappa(\mathrm{x})}\begin{bmatrix}-h_y(\mathrm{x})\\ h_x(\mathrm{x})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-h_y(\mathrm{x}) & h_x(\mathrm{x})\end{bmatrix}$$

haline gelir ve bu eşitlik sağ taraftan $\begin{bmatrix}-h_y(\mathrm{x}) & h_x(\mathrm{x})\end{bmatrix}^T$ sütun matrisi, sol taraftan $\begin{bmatrix}-h_y(\mathrm{x}) & h_x(\mathrm{x})\end{bmatrix}$ matrisi ile çarpıldığında

$$\kappa\left(\mathrm{x}_{\delta}\right)=\frac{\kappa\left(\mathrm{x}\right)}{1+\delta\kappa\left(\mathrm{x}\right)}$$

eşitliğine ulaşılır [2].

3.5 Yüzey Üzerinde 2. Mertebeden Türev

$\mathbb{E}^3$'te bir yüzey Φ_0 ve Φ_0'ın normal formu $h(x,y,z)=0$ olsun. h fonksiyonu C^2-sürekli olmak üzere, $\|\nabla h\|^2=1$ denkleminin kısmi türevleri alınırsa

$$\|\nabla h\|^2=h_x^2+h_y^2+h_z^2=1 \;\Rightarrow\; \begin{cases} h_x h_{xx}+h_y h_{yx}+h_z h_{zx}=0 \\ h_x h_{xy}+h_y h_{yy}+h_z h_{zy}=0 \\ h_x h_{xz}+h_y h_{yz}+h_z h_{zz}=0 \end{cases} \tag{3.22}$$

veya matris formunda

$$\begin{bmatrix} h_{xx} & h_{yx} & h_{xz} \\ h_{xy} & h_{yy} & h_{yz} \\ h_{xz} & h_{yx} & h_{zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; H_h\left(\nabla h\right)^T=0 \tag{3.23}$$

elde edilir. (3.23) denkleminden $\nabla h^T=\begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix}$ vektörü H_h matrisinin $\lambda_1=0$ özdeğerine karşılık gelen özvektördür [2]. O halde

$$\det\left(H_h\right)=0 \tag{3.24}$$

bulunur.

Teorem 3.4 Normal formu $h=0$ olan Φ_0 yüzeyi üzerinde s yay parametresi ile verilen bir eğri $\alpha(s)=\left(\alpha_1(s),\alpha_2(s),\alpha_3(s)\right)$ olsun. Yüzeyin $t=\alpha'(s)$ teğet vektörü yönündeki normal eğriliği

$$\kappa_n=tH_h t^T \tag{3.25}$$

eşitliği ile verilir.

İspat Yüzeyin birim normal vektör alanı ∇h olduğundan

$$S(t) = D_{\alpha'(s)} \nabla h$$

$$= \left(\alpha'[h_x], \alpha'\left[h_y\right], \alpha'[h_z] \right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{3} \alpha_i' \frac{\partial h_x}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^{3} \alpha_i' \frac{\partial h_y}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^{3} \alpha_i' \frac{\partial h_z}{\partial x_i} \right)$$

$$= \left(\left\langle \alpha', \left(h_{xx}, h_{xy}, h_{xz} \right) \right\rangle, \left\langle \alpha', \left(h_{yx}, h_{yy}, h_{yz} \right) \right\rangle, \left\langle \alpha', \left(h_{zx}, h_{zy}, h_{zz} \right) \right\rangle \right)$$

$$= \alpha'(s) H_h = t H_h$$

yazılabilir.

Tanım 2.17' den yüzeyin $t = \alpha'(s)$ teğet vektörü yönündeki normal eğriliği

$$\kappa_n = \left\langle S(t), t \right\rangle = t H_h t^T \tag{3.26}$$

sonucuna ulaşılır.

Tanım 3.2 $\mathbb{E}^3$'te bir Φ_0 yüzeyinin normal eğriliğinin maksimum ve minimum değerleri asli eğrilikler olarak adlandırılır ve sırası ile $k_1 = \kappa_{\max}$ ve $k_2 = \kappa_{\min}$ ile gösterilirler. Bu değerlerin oluştuğu yönlere yüzeyin asli doğrultuları, bu asli doğrultuları gösteren birim vektörlere ise yüzeyin asli vektörleri denir [7].

Teorem 3.6 $\mathbb{E}^3$'te bir yüzey Φ_0 ve Φ_0 yüzeyinin normal formu $h(x, y, z) = 0$ olsun. H_h Hesse matrisinin sıfırdan farklı özdeğerleri asli eğriliklerdir [2].

Teorem 3.7 $\mathbb{E}^3$'te $h(x, y, z) = 0$ normal formu ile verilen bir yüzeyin Gauss eğriliği

$$K = \kappa_{\min} \kappa_{\max} = \begin{vmatrix} h_{xx} & h_{yx} \\ h_{xy} & h_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} h_{xx} & h_{zx} \\ h_{zx} & h_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} h_{yy} & h_{zy} \\ h_{yz} & h_{zz} \end{vmatrix} \tag{3.27}$$

ve ortalama eğriliği ise

$$H = \frac{1}{2}\left(\kappa_{\min} + \kappa_{\max} \right) = \frac{1}{2}\left(h_{xx} + h_{yy} + h_{zz} \right) \tag{3.28}$$

şeklindedir [2].

İspat Yüzeyin normal formunun Hesse matrisinin karakteristik polinomu

$$P(\lambda)=\det(H_h-\lambda I_3)=\begin{vmatrix} h_{xx}-\lambda & h_{yx} & h_{zx} \\ h_{xy} & h_{yy}-\lambda & h_{zy} \\ h_{xz} & h_{yz} & h_{zz}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(h_{xx}-\lambda)\begin{vmatrix} h_{yy}-\lambda & h_{zy} \\ h_{yz} & h_{zz}-\lambda \end{vmatrix}-h_{yx}\begin{vmatrix} h_{xy} & h_{zy} \\ h_{xz} & h_{zz}-\lambda \end{vmatrix}+h_{zx}\begin{vmatrix} h_{xy} & h_{yy}-\lambda \\ h_{xz} & h_{yz} \end{vmatrix}$$

$$=(h_{xx}-\lambda)(h_{yy}-\lambda)(h_{zz}-\lambda)-h_{yz}^2(h_{xx}-\lambda)-h_{xy}^2(h_{zz}-\lambda)+h_{yx}h_{xz}h_{zy}+h_{zx}h_{xy}h_{yz}-h_{xz}^2(h_{yy}-\lambda)$$

$$=\{h_{xx}h_{yy}-\lambda h_{xx}-\lambda h_{yy}+\lambda^2\}(h_{zz}-\lambda)-h_{yz}^2h_{xx}+\lambda h_{yz}^2-h_{xy}^2h_{zz}+\lambda h_{xy}^2+2h_{yx}h_{xz}h_{zy}-h_{xz}^2h_{yy}+\lambda h_{xz}^2$$

$$=-\lambda^3+\lambda^2(h_{xx}+h_{yy}+h_{zz})-\lambda(-h_{xx}h_{yy}-h_{xx}h_{zz}-h_{yy}h_{zz}+h_{yz}^2+h_{xy}^2+h_{xz}^2)+\det(H_h)$$

$$=-\lambda^3+\lambda^2(h_{xx}+h_{yy}+h_{zz})-\lambda\left(\begin{vmatrix} h_{xx} & h_{yx} \\ h_{xy} & h_{yy} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} h_{xx} & h_{zx} \\ h_{zx} & h_{zz} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} h_{yy} & h_{zy} \\ h_{yz} & h_{zz} \end{vmatrix}\right)$$

biçimindedir [2].

Bilgi 3.1 3. dereceden $ax^3+bx^2+cx+d=0$ şeklindeki bir denklemin kökleri x_1,x_2,x_3 olmak üzere, denklemin katsayıları ve kökleri arasında

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2x_3=-\frac{d}{c}$$

$$x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=\frac{c}{a}$$

ilişkileri mevcuttur. Böylece, yüzeyin Gauss eğriliğinin

$$K=\begin{vmatrix} h_{xx} & h_{yx} \\ h_{xy} & h_{yy} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} h_{xx} & h_{zx} \\ h_{zx} & h_{zz} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} h_{yy} & h_{zy} \\ h_{yz} & h_{zz} \end{vmatrix}$$

ve ortalama eğriliğinin

$$H=\frac{1}{2}(\kappa_{\min}+\kappa_{\max})=\frac{1}{2}(h_{xx}+h_{yy}+h_{zz})$$

şeklinde olduğu görülür [2].

Teorem 3.8 Φ_0, $\mathbb{E}^3$'te bir yüzey ve bu yüzeyin normal formu $h=0$ olmak üzere yüzeyin ortalama eğriliği,

$$-2H=\begin{vmatrix} h_{xx} & h_{xy} & h_x \\ h_{yx} & h_{yy} & h_y \\ h_x & h_y & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} h_{yy} & h_{yz} & h_y \\ h_{yz} & h_{zz} & h_z \\ h_y & h_z & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} h_{xx} & h_{xz} & h_x \\ h_{xz} & h_{zz} & h_z \\ h_x & h_z & 0 \end{vmatrix}$$

ve Gauss eğriliği

$$K=\begin{vmatrix} h_{xx} & h_{xy} & h_{xz} & h_x \\ h_{yx} & h_{yy} & h_{yz} & h_y \\ h_{zx} & h_{zy} & h_{zz} & h_z \\ h_x & h_y & h_z & 0 \end{vmatrix}$$

biçiminde ifade edilebilir [2].

İspat $h_{xx}=\left(h_x^2+h_y^2+h_z^2\right)h_{xx}=\left(h_y^2+h_z^2\right)h_{xx}+h_xh_xh_{xx}$ yazılabilir. Denklem (3.22)'den

$$h_xh_{xx}+h_yh_{yx}+h_zh_{zx}=0 \quad \Rightarrow \quad h_xh_{xx}=-h_yh_{yx}-h_zh_{zx}$$

olduğu kullanılırsa

$$h_{xx}=\left(h_y^2+h_z^2\right)h_{xx}-h_xh_yh_{yx}-h_xh_zh_{zx}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$h_{yy}=\left(h_x^2+h_y^2+h_z^2\right)h_{yy}=\left(h_x^2+h_z^2\right)h_{yy}+h_yh_yh_{yy}$$

eşitliğinde

$$h_xh_{xy}+h_yh_{yy}+h_zh_{zy}=0 \;\Rightarrow\; h_yh_{yy}=-h_xh_{xy}-h_zh_{zy}$$

olduğu kullanılırsa

$$h_{yy}=\left(h_x^2+h_z^2\right)h_{yy}-h_yh_xh_{xy}-h_yh_zh_{zy}$$

bulunur. Benzer düşünceyle

$$h_{zz}=\left(h_x^2+h_y^2\right)h_{yy}-h_xh_zh_{xz}-h_yh_zh_{yz},$$

$$h_{xy}=\left(h_y^2+h_z^2\right)h_{xy}-h_xh_yh_{yy}-h_xh_zh_{zy},$$

$$h_{yx}=\left(h_x^2+h_z^2\right)h_{yx}-h_xh_yh_{xx}-h_yh_zh_{zx},$$

$$h_{xz}=\left(h_y^2+h_z^2\right)h_{xz}-h_xh_yh_{yz}-h_xh_zh_{zz},$$

$$h_{zx}=\left(h_x^2+h_y^2\right)h_{zx}-h_xh_zh_{xx}-h_yh_zh_{yx},$$

$$h_{yz}=\left(h_x^2+h_z^2\right)h_{yz}-h_xh_yh_{xz}-h_yh_zh_{zz},$$

$$h_{zy}=\left(h_x^2+h_y^2\right)h_{zy}-h_xh_zh_{xy}-h_yh_zh_{yy}$$

sonuçları elde edilir.

Buradaki değerler $2H=h_{xx}+h_{yy}+h_{zz}$ eşitliğinde yerine yazılırsa, ortalama eğrilik

$$2H=\left(h_y^2+h_z^2\right)h_{xx}-h_xh_yh_{yx}-h_xh_zh_{zx}+\left(h_x^2+h_z^2\right)h_{yy}-h_yh_xh_{xy}-h_yh_zh_{zy}$$
$$+\left(h_x^2+h_y^2\right)h_{yy}-h_xh_zh_{xz}-h_yh_zh_{yz}$$

veya

$$-2H=\begin{vmatrix}h_{xx}&h_{xy}&h_x\\h_{yx}&h_{yy}&h_y\\h_x&h_y&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}h_{yy}&h_{yz}&h_y\\h_{yz}&h_{zz}&h_z\\h_y&h_z&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}h_{xx}&h_{xz}&h_x\\h_{xz}&h_{zz}&h_z\\h_x&h_z&0\end{vmatrix}$$

şeklinde ve Gauss eğriliği de

$$K=\begin{vmatrix}h_{xx}&h_{yx}\\h_{xy}&h_{yy}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}h_{xx}&h_{zx}\\h_{xz}&h_{zz}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}h_{yy}&h_{zy}\\h_{yz}&h_{zz}\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}\left(h_y^2+h_z^2\right)h_{xx}-h_xh_yh_{yx}-h_xh_zh_{zx}&\left(h_x^2+h_z^2\right)h_{yx}-h_xh_yh_{xx}-h_yh_zh_{zx}\\\left(h_y^2+h_z^2\right)h_{xy}-h_xh_yh_{yy}-h_xh_zh_{zy}&\left(h_x^2+h_z^2\right)h_{yy}-h_yh_xh_{xy}-h_yh_zh_{zy}\end{vmatrix}$$
$$+\begin{vmatrix}\left(h_y^2+h_z^2\right)h_{xx}-h_xh_yh_{yx}-h_xh_zh_{zx}&\left(h_x^2+h_y^2\right)h_{zx}-h_xh_zh_{xx}-h_yh_zh_{yx}\\\left(h_y^2+h_z^2\right)h_{xz}-h_xh_yh_{yz}-h_xh_zh_{zz}&\left(h_x^2+h_y^2\right)h_{yy}-h_xh_zh_{xz}-h_yh_zh_{yz}\end{vmatrix}$$
$$+\begin{vmatrix}\left(h_x^2+h_z^2\right)h_{yy}-h_yh_xh_{xy}-h_yh_zh_{zy}&\left(h_x^2+h_y^2\right)h_{zy}-h_xh_zh_{xy}-h_yh_zh_{yy}\\\left(h_x^2+h_z^2\right)h_{yz}-h_xh_yh_{xz}-h_yh_zh_{zz}&\left(h_x^2+h_y^2\right)h_{yy}-h_xh_zh_{xz}-h_yh_zh_{yz}\end{vmatrix}$$

veya

$$K=\begin{vmatrix} h_{xx} & h_{xy} & h_{xz} & h_x \\ h_{yx} & h_{yy} & h_{yz} & h_y \\ h_{zx} & h_{zy} & h_{zz} & h_z \\ h_x & h_y & h_z & 0 \end{vmatrix}$$

olarak elde edilir.

3.6 $\mathbb{E}^3$'te Bir Yüzeyin Normal Formunun Hesse Matrisinin Gradient Vektörün Bileşenleri ve Normal Eğrilikler Cinsinden İfadesi

Teorem 3.9 $\mathbb{E}^3$'te bir Φ yüzeyinin normal formu $h=0$ ve v_i teğet vektörü yönündeki normal eğriliği κ_i $(i=1,2,3)$ olmak üzere h normal formunun Hesse matrisinin elemanları için

a) $h_x h_y h_z \neq 0$ ise,

$k_1=\kappa_1\left(h_y^2+h_z^2\right)$, $k_2=\kappa_2\left(h_x^2+h_z^2\right)$, $k_3=\kappa_3\left(h_x^2+h_y^2\right)$ olmak üzere,

$$h_{xx}=-\left(k_1+k_2+k_3\right)h_x^2+k_2+k_3$$

$$h_{yy}=-\left(k_1+k_2+k_3\right)h_y^2+k_1+k_3$$

$$h_{zz}=-\left(k_1+k_2+k_3\right)h_z^2+k_1+k_2$$

$$h_{xy}=-\left(k_1+k_2+k_3\right)h_x h_y+\frac{k_1h_x^2+k_2h_y^2-k_3h_z^2}{-2h_x h_y}$$

$$h_{yz}=-\left(k_1+k_2+k_3\right)h_y h_z+\frac{-k_1h_x^2+k_2h_y^2+k_3h_z^2}{2h_y h_z}$$

$$h_{xz}=-\left(k_1+k_2+k_3\right)h_x h_z+\frac{k_1h_x^2-k_2h_y^2+k_3h_z^2}{2h_x h_y}$$

b) $h_z=0$ ise,

$$h_{xx}=\left(\kappa_1+\kappa_2-\kappa_3\right)h_y^2$$

$$h_{yy}=\left(\kappa_1+\kappa_2-\kappa_3\right)h_x^2$$

$$h_{zz} = \frac{4\kappa_3\left(h_x^2 + h_y^2\right)^3}{4} = \kappa_3$$

$$h_{xy} = -\left(\kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_3\right) h_x h_y$$

$$h_{yz} = \frac{h_x\left(\kappa_2 - \kappa_1\right)}{2}$$

$$h_{xz} = \frac{h_y\left(\kappa_1 - \kappa_2\right)}{2}$$

sonuçlarına ulaşılır. Aynı şekilde $h_y = 0$ ve $h_x = 0$ için de benzer sonuçlar bulunabilir [2].

İspat $\mathbb{E}^3$'teki Φ yüzeyi boyunca

$$\mathrm{v}_1 = \frac{\left(0, h_z, -h_y\right)}{\sqrt{h_z^2 + h_y^2}}, \qquad \mathrm{v}_2 = \frac{\left(h_z, 0, -h_x\right)}{\sqrt{h_z^2 + h_x^2}}, \qquad \mathrm{v}_3 = \frac{\left(h_y, -h_x, 0\right)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}}$$

teğet vektörleri seçilsin [2]. (3.25) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= \mathrm{v}_1 H_h \mathrm{v}_1^T \\ &= \frac{1}{\sqrt{h_z^2 + h_y^2}}\begin{bmatrix}0 & h_z & -h_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_{xx} & h_{yx} & h_{zx}\\ h_{xy} & h_{yy} & h_{zy}\\ x_{xz} & h_{yz} & h_{zz}\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{h_z^2 + h_y^2}}\begin{bmatrix}0\\ h_z\\ -h_y\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{3.29}$$

eşitliğinden

$$\kappa_1\left(h_z^2 + h_y^2\right) = h_z^2 h_{yy} + h_y^2 h_{zz} - 2h_y h_z h_{zy}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\kappa_2 = \mathrm{v}_2 H_h \mathrm{v}_2^T \quad \Rightarrow \quad \kappa_2\left(h_z^2 + h_x^2\right) = h_z^2 h_{xx} + h_x^2 h_{zz} - 2h_x h_z h_{xz} \tag{3.30}$$

$$\kappa_3 = \mathrm{v}_3 H_h \mathrm{v}_3^T \quad \Rightarrow \quad \kappa_3\left(h_x^2 + h_y^2\right) = h_y^2 h_{xx} + h_x^2 h_{yy} - 2h_x h_y h_{xy} \tag{3.31}$$

denklemleri elde edilir. Buradan (3.22), (3.29), (3.30) ve (3.31) denklemleri ile h normal form fonksiyonunun ikinci mertebeden türevlerine göre aşağıdaki lineer denklem sistemi elde edilir:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} h_x & 0 & 0 & h_y & 0 & h_z \\ 0 & h_y & 0 & h_x & h_z & 0 \\ 0 & 0 & h_z & 0 & h_y & h_x \\ h_y^2 & h_x^2 & 0 & -2h_xh_y & 0 & 0 \\ 0 & h_z^2 & h_y^2 & 0 & -2h_yh_z & 0 \\ h_z^2 & 0 & h_x^2 & 0 & 0 & -2h_xh_z \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} h_{xx} \\ h_{yy} \\ h_{zz} \\ h_{xy} \\ h_{yz} \\ h_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \kappa_3\left(h_x^2+h_y^2\right) \\ \kappa_1\left(h_y^2+h_z^2\right) \\ \kappa_2\left(h_x^2+h_z^2\right) \end{bmatrix}$$

Bu denklem sisteminin A katsayılar matrisinin determinantı

$$\det(A) = -2h_xh_yh_z \tag{3.32}$$

olarak bulunur [2].

a) $h_xh_yh_z \neq 0$ ise Cramer metodu uygulanabilir. İşlem kolaylığı açısından

$k_1 = \kappa_1\left(h_y^2+h_z^2\right)$, $k_2 = \kappa_2\left(h_x^2+h_z^2\right)$, $k_3 = \kappa_3\left(h_x^2+h_y^2\right)$ alalım.

Böylece

$$h_{xx} = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & h_y & 0 & h_z \\ 0 & h_y & 0 & h_x & h_z & 0 \\ 0 & 0 & h_z & 0 & h_y & h_x \\ k_3 & h_x^2 & 0 & -2h_xh_y & 0 & 0 \\ k_1 & h_z^2 & h_y^2 & 0 & -2h_yh_z & 0 \\ k_2 & 0 & h_x^2 & 0 & 0 & -2h_xh_z \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-2h_xh_yh_z\left(h_x^2+h_y^2+h_z^2\right)}{-2h_xh_yh_z\left(h_x^2+h_y^2+h_z^2\right)^3}\left(-h_x^2k_1+h_y^2k_2+h_y^2k_3+h_z^2k_2+h_z^2k_3\right)$$

olup, $h_x^2+h_y^2+h_z^2=1$ kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$h_{xx} = -\left(k_1+k_2+k_3\right)h_x^2+k_2+k_3$$

sonucu elde edilir. Benzer şekilde,

$$h_{yy} = -\left(k_1+k_2+k_3\right)h_y^2+k_1+k_3$$

$$h_{zz} = -\left(k_1+k_2+k_3\right)h_z^2+k_1+k_2$$

$$h_{xy} = -\left(k_1 + k_2 + k_3\right) h_x h_y + \frac{k_1 h_x^2 + k_2 h_y^2 - k_3 h_z^2}{-2 h_x h_y}$$

$$h_{yz} = -\left(k_1 + k_2 + k_3\right) h_y h_z + \frac{-k_1 h_x^2 + k_2 h_y^2 + k_3 h_z^2}{2 h_y h_z}$$

$$h_{xz} = -\left(k_1 + k_2 + k_3\right) h_x h_z + \frac{k_1 h_x^2 - k_2 h_y^2 + k_3 h_z^2}{2 h_x h_y}$$

elde edilir.

b) $h_z = 0$ olduğunu kabul edelim. Buna göre Φ yüzeyinin $\mathrm{v}_i, \left(i = 1,2,3\right)$ teğet vektörleri

$$\mathrm{v}_1 = \frac{\left(h_y, -h_x, 1\right)}{\sqrt{2}}, \qquad \mathrm{v}_2 = \frac{\left(-h_y, h_x, 1\right)}{\sqrt{2}}, \qquad \mathrm{v}_3 = \left(0,0,1\right)$$

olarak seçelim. Benzer şekilde

$$\kappa_1 = \mathrm{v}_1 H_h \mathrm{v}_1^T \;\Rightarrow\; 2\kappa_1 = h_y^2 h_{xx} + h_x^2 h_{yy} + h_{zz} - 2h_x h_y h_{xy} + 2h_y h_{xz} - 2h_x h_{zy} \tag{3.33}$$

$$\kappa_2 = \mathrm{v}_2 H_h \mathrm{v}_2^T \;\Rightarrow\; 2\kappa_1 = h_y^2 h_{xx} + h_x^2 h_{yy} + h_{zz} - 2h_x h_y h_{xy} - 2h_y h_{xz} + 2h_x h_{zy} \tag{3.34}$$

$$\kappa_3 = \mathrm{v}_3 H_h \mathrm{v}_3^T \;\Rightarrow\; \kappa_3 = h_{zz} \tag{3.35}$$

şeklindedir [2].

$h_z = 0$ olduğu göz önüne alınırsa (3.22), (3.33), (3.34) ve (3.35) denklemleri aşağıdaki lineer denklem sistemini oluştururlar:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} h_x & 0 & 0 & h_y & 0 & 0 \\ 0 & h_y & 0 & h_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_y & h_x \\ h_y^2 & h_x^2 & 1 & -2h_x h_y & -2h_x & 2h_y \\ h_y^2 & h_x^2 & 1 & -2h_x h_y & 2h_x & -2h_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} h_{xx} \\ h_{yy} \\ h_{zz} \\ h_{xy} \\ h_{yz} \\ h_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2\kappa_1 \\ 2\kappa_2 \\ \kappa_3 \end{bmatrix}$$

Sistemin katsayılar matrisinin determinantı $\det(A)=4\left(h_x^2+h_y^2\right)^3=4$ olup, Cramer metodu uygulanır ve $h_x^2+h_y^2=1$ kullanılırsa,

$$h_{xx}=\frac{1}{4}\begin{vmatrix} h_x & 0 & 0 & h_y & 0 & h_z \\ 0 & h_y & 0 & h_x & h_z & 0 \\ 0 & 0 & h_z & 0 & h_y & h_x \\ 2\kappa_1 & h_x^2 & 1 & -2h_xh_y & -2h_x & 2h_y \\ 2\kappa_2 & h_x^2 & 1 & -2h_xh_y & 2h_x & -2h_y \\ \kappa_3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\left(\kappa_1+\kappa_2-\kappa_3\right)h_y^2$$

$$h_{yy}=\frac{1}{4}\begin{vmatrix} h_x & 0 & 0 & h_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_y & h_x \\ h_y^2 & 2\kappa_1 & 1 & -2h_xh_y & -2h_x & 2h_y \\ h_y^2 & 2\kappa_2 & 1 & -2h_xh_y & 2h_x & -2h_y \\ 0 & \kappa_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\left(\kappa_1+\kappa_2-\kappa_3\right)h_x^2$$

$$h_{zz}=\frac{1}{4}\begin{vmatrix} h_x & 0 & 0 & h_y & 0 & 0 \\ 0 & h_y & 0 & h_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_y & h_x \\ h_y^2 & h_x^2 & 2\kappa_1 & -2h_xh_y & -2h_x & 2h_y \\ h_y^2 & h_x^2 & 2\kappa_2 & -2h_xh_y & 2h_x & -2h_y \\ 0 & 0 & \kappa_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\frac{4\kappa_3\left(h_x^2+h_y^2\right)^3}{4}=\kappa_3$$

$$h_{xy}=\frac{1}{4}\begin{vmatrix} h_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_y & h_x \\ h_y^2 & h_x^2 & 1 & 2\kappa_1 & -2h_x & 2h_y \\ h_y^2 & h_x^2 & 1 & 2\kappa_2 & 2h_x & -2h_y \\ 0 & 0 & 1 & \kappa_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-\left(\kappa_1+\kappa_2-\kappa_3\right)h_xh_y$$

$$h_{yz}=\frac{1}{4}\begin{vmatrix} h_x & 0 & 0 & h_y & 0 & 0 \\ 0 & h_y & 0 & h_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_x \\ h_y^2 & h_x^2 & 1 & -2h_xh_y & 2\kappa_1 & 2h_y \\ h_y^2 & h_x^2 & 1 & -2h_xh_y & 2\kappa_2 & -2h_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \kappa_3 & 0 \end{vmatrix}=\frac{h_x\left(\kappa_2-\kappa_1\right)}{2}$$

$$h_{xz}=\frac{1}{4}\begin{vmatrix} h_x & 0 & 0 & h_y & 0 & 0 \\ 0 & h_y & 0 & h_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_y & 0 \\ h_y^2 & h_x^2 & 1 & -2h_xh_y & -2h_x & 2\kappa_1 \\ h_y^2 & h_x^2 & 1 & -2h_xh_y & 2h_x & 2\kappa_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \kappa_3 \end{vmatrix}=\frac{h_y\left(\kappa_1-\kappa_2\right)}{2}$$

sonuçları elde edilir.

Aynı yöntemle $h_y=0$ ve $h_x=0$ durumları için de benzer sonuçlar elde edilebilir.

BÖLÜM 4

NORMAL FORM İLE TANIMLANMIŞ HİPERYÜZEYLER ÜZERİNE

4.1 $\mathbb{E}^4$'te Bir Hiperyüzeyin Normal Formu

Tanım 4.1 Φ, $\mathbb{E}^4$'te $h=0$ kapalı denklemi ile verilen bir hiperyüzey olsun. Eğer h fonksiyonu sürekli diferensiyellenebilir ve Φ üzerinde ve civarında $\|\nabla h\|=1$ ise $h=0$ eşitliğine Φ hiperyüzeyinin normal formu denir. h'ya normal form fonksiyonu veya yönlü uzaklık fonksiyonu denir.

Teorem 4.1 $\mathbb{E}^4$'te bir Φ hiperyüzeyi $h(x,y,z,w)=0$ normal formu ile verilsin. H_h Hesse matrisinin bir özdeğeri $\lambda_0=0$ ve $\nabla h=\left(h_x,h_y,h_z,h_w\right)$ gradient vektörü de $\lambda_0=0$ özdeğerine karşılık gelen özvektördür.

İspat $\|\nabla h\|^2=1$ eşitliğinin kısmi türevlerini alalım.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left(h_x^2+h_y^2+h_z^2+h_w^2\right)=0\\
&\frac{\partial}{\partial y}\left(h_x^2+h_y^2+h_z^2+h_w^2\right)=0\\
&\frac{\partial}{\partial z}\left(h_x^2+h_y^2+h_z^2+h_w^2\right)=0\\
&\frac{\partial}{\partial w}\left(h_x^2+h_y^2+h_z^2+h_w^2\right)=0
\end{aligned}\right\}\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} h_{xx} & h_{yx} & h_{zx} & h_{wx}\\ h_{xy} & h_{yy} & h_{zy} & h_{wy}\\ h_{xz} & h_{yz} & h_{zz} & h_{wz}\\ h_{xw} & h_{yw} & h_{zw} & h_{ww}\end{bmatrix}}_{H_h}\underbrace{\begin{bmatrix} h_x\\ h_y\\ h_z\\ h_w\end{bmatrix}}_{\nabla h}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \tag{4.1}$$

olup, bu eşitlik

$$H_h\nabla h^T=0^T=0.\nabla h^T \tag{4.2}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan normal formun Hesse matrisinin birinci özdeğeri $\lambda_0 = 0$ olup, bu özdeğere karşılık gelen özvektör hiperyüzeyin ∇h birim normal vektörüdür.

Sonuç 4.1 $\det(H_h) = 0$**.**

Teorem 4.2 $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayındaki bir Φ hiperyüzeyinin asli eğrilikleri, hiperyüzeyin $h = 0$ normal formunun H_h Hesse matrisinin sıfırdan faklı özdeğerleridir.

İspat Hiperyüzeyin birim normal vektör alanı ∇h, herhangi bir noktasındaki teğet vektörü $\mathrm{v}=(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3, \mathrm{v}_4)$ ve hiperyüzeyin şekil operatörü S olmak üzere,

$$S(\mathrm{v}) = D_{\mathrm{v}} \nabla h = \left(\mathrm{v}[h_x], \mathrm{v}[h_y], \mathrm{v}[h_z], \mathrm{v}[h_w]\right)$$

yazılabilir. Buradan,

$$S(\mathrm{v}) = \left(\sum_{i=1}^{4} \mathrm{v}_i \frac{\partial h_x}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^{4} \mathrm{v}_i \frac{\partial h_y}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^{4} \mathrm{v}_i \frac{\partial h_z}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^{4} \mathrm{v}_i \frac{\partial h_w}{\partial x_i} \right)$$

$$= \left(\left\langle (h_{xx}, h_{xy}, h_{xz}, h_{xw}), \mathrm{v} \right\rangle, \left\langle (h_{yx}, h_{yy}, h_{yz}, h_{yw}), \mathrm{v} \right\rangle, \left\langle (h_{zx}, h_{zy}, h_{zz}, h_{zw}), \mathrm{v} \right\rangle, \left\langle (h_{wx}, h_{wy}, h_{wz}, h_{ww}), \mathrm{v} \right\rangle \right)$$

$$= \begin{bmatrix} h_{xx} & h_{yx} & h_{zx} & h_{wx} \\ h_{xy} & h_{yy} & h_{zy} & h_{wy} \\ h_{xz} & h_{yz} & h_{zz} & h_{wz} \\ h_{xw} & h_{yw} & h_{zw} & h_{ww} \end{bmatrix} \mathrm{v}^T$$

yani

$$S(\mathrm{v}) = H_h \mathrm{v}^T \tag{4.3}$$

elde edilir. Böylece v bir asli doğrultu ise $S(\mathrm{v}) = \lambda \mathrm{v}$ yazılabileceğinden,

$$S(\mathrm{v}) = H_h \mathrm{v}^T = \lambda \mathrm{v}^T \tag{4.4}$$

sonucuna ulaşılır. O halde S şekil operatörüne karşılık gelen özdeğerler aynı zamanda H_h Hesse matrisinin de özdeğeridir. H_h matrisinin $\lambda_0 = 0$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü ∇h olup, bu özdeğer teğet uzayda olmadığından H_h'nın sıfırdan farklı olan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ özdeğerleri hiperyüzey için birer asli eğriliktir.

4.2 $\mathbb{E}^4$'te Bir Hiperyüzeyin Gauss ve Ortalama Eğrilikleri

Teorem 4.3 $\mathbb{E}^4$'te bir Φ hiperyüzeyinin normal formu $h=0$ olmak üzere, hiperyüzeyin ortalama eğriliği

$$H=\frac{1}{3}\left(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\right)=\frac{h_{xx}+h_{yy}+h_{zz}+h_{ww}}{3}$$

ve Gauss eğriliği

$$K=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=h_{xx}\left(h_{yw}^2+h_{zw}^2+h_{yz}^2\right)+h_{yy}\left(h_{xz}^2+h_{zw}^2+h_{xw}^2\right)+h_{zz}\left(h_{xw}^2+h_{yw}^2+h_{xy}^2\right)+h_{ww}\left(h_{yz}^2+h_{xz}^2+h_{xy}^2\right)$$
$$-2\left(h_{yz}h_{yw}h_{wz}+h_{xz}h_{xw}h_{wz}+h_{xy}h_{xw}h_{yw}+h_{xy}h_{xz}h_{yz}\right)-\left(h_{yy}h_{ww}h_{zz}+h_{xx}h_{zz}h_{ww}+h_{xx}h_{yy}h_{ww}+h_{xx}h_{yy}h_{zz}\right)$$

biçimindedir.

İspat Hiperyüzeyin normal form fonksiyonunun Hesse matrisinin karakteristik polinomunu hesaplayalım.

$$P(\lambda)=\det\left(H_h-\lambda I_4\right)=\begin{vmatrix} h_{xx}-\lambda & h_{yx} & h_{zx} & h_{wx} \\ h_{xy} & h_{yy}-\lambda & h_{zy} & h_{wy} \\ h_{xz} & h_{yz} & h_{zz}-\lambda & h_{wz} \\ h_{xw} & h_{yw} & h_{zw} & h_{ww}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=\lambda^4-\lambda^3\left(h_{xx}+h_{yy}+h_{zz}+h_{ww}\right)+\lambda^2\begin{Bmatrix} h_{zz}h_{ww}-h_{wz}^2+h_{yy}h_{ww}-h_{wy}^2+h_{xx}h_{yy}-h_{yx}^2 \\ +h_{xx}h_{ww}-h_{wx}^2+h_{yy}h_{zz}-h_{zy}^2-h_{zx}^2 \end{Bmatrix}$$
$$+\lambda\begin{Bmatrix} h_{xx}\left(h_{yw}^2+h_{zw}^2+h_{yz}^2\right)+h_{yy}\left(h_{xz}^2+h_{zw}^2+h_{xw}^2\right) \\ +h_{zz}\left(h_{xw}^2+h_{yw}^2+h_{xy}^2\right)+h_{ww}\left(h_{yz}^2+h_{xz}^2+h_{xy}^2\right) \\ -2\left(h_{yz}h_{yw}h_{wz}+h_{xz}h_{xw}h_{wz}+h_{xy}h_{xw}h_{yw}+h_{xy}h_{xz}h_{yz}\right) \\ -\left(h_{yy}h_{ww}h_{zz}+h_{xx}h_{zz}h_{ww}+h_{xx}h_{yy}h_{ww}+h_{xx}h_{yy}h_{zz}\right) \end{Bmatrix}$$
$$+\det\left(H_h\right)$$

bulunur. $\det\left(H_h\right)=0$ olduğundan, H_h matrisinin karakteristik denklemi

$$P(\lambda)=\lambda^4-\lambda^3\left(h_{xx}+h_{yy}+h_{zz}+h_{ww}\right)+\lambda^2\begin{Bmatrix}h_{zz}h_{ww}-h_{wz}^2+h_{yy}h_{ww}-h_{wy}^2+h_{xx}h_{yy}-h_{yx}^2\\+h_{xx}h_{ww}-h_{wx}^2+h_{yy}h_{zz}-h_{zy}^2-h_{zx}^2\end{Bmatrix}$$
$$+\lambda\begin{Bmatrix}h_{xx}\left(h_{yw}^2+h_{zw}^2+h_{yz}^2\right)+h_{yy}\left(h_{xz}^2+h_{zw}^2+h_{xw}^2\right)\\+h_{zz}\left(h_{xw}^2+h_{yw}^2+h_{xy}^2\right)+h_{ww}\left(h_{yz}^2+h_{xz}^2+h_{xy}^2\right)\\-2\left(h_{yz}h_{yw}h_{wz}+h_{xz}h_{xw}h_{wz}+h_{xy}h_{xw}h_{yw}+h_{xy}h_{xz}h_{yz}\right)\\-\left(h_{yy}h_{ww}h_{zz}+h_{xx}h_{zz}h_{ww}+h_{xx}h_{yy}h_{ww}+h_{xx}h_{yy}h_{zz}\right)\end{Bmatrix}=0$$

şeklindedir.

Bilgi 4.1 (4. Dereceden bir polinomun kökleri ve katsayıları arasındaki ilişki)

$z^4+a_3z^3+a_2z^2+a_1z+a_0=0$ denkleminin bütün z_0,z_1,z_2,z_3 kökleri reel olsun. O halde,

$(z-z_3)(z-z_2)(z-z_1)(z-z_0)=0=z^4+a_3z^3+a_2z^2+a_1z+a_0$ yazılabilir. Sol taraftaki çarpma işlemini yapıp, katsayıları eşitleyelim.

$$z^4+a_3z^3+a_2z^2+a_1z+a_0=z^4-\left(z_0+z_1+z_2+z_3\right)z^3+\left(z_0z_1+z_0z_2+z_0z_3+z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3\right)z^2$$
$$-\left(z_0z_1z_2+z_0z_1z_3+z_0z_2z_3+z_1z_2z_3\right)z+z_0z_1z_2z_3$$

Böylece,

$a_3=-z_0-z_1-z_2-z_3$

$a_2=z_0z_1+z_0z_2+z_0z_3+z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3$

$a_1=-z_0z_1-z_0z_2-z_0z_3-z_1z_2-z_1z_3-z_2z$

$a_0=z_0z_1z_2z_3$

eşitliklerine ulaşılır.

Yukarıdaki bilgi kullanılırsa, hiperyüzeyin ortalama eğriliği,

$$H=\frac{1}{3}\left(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\right)=\frac{h_{xx}+h_{yy}+h_{zz}+h_{ww}}{3}$$

ve Gauss eğriliği

$$K=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=h_{xx}\left(h_{yw}^2+h_{zw}^2+h_{yz}^2\right)+h_{yy}\left(h_{xz}^2+h_{zw}^2+h_{xw}^2\right)+h_{zz}\left(h_{xw}^2+h_{yw}^2+h_{xy}^2\right)+h_{ww}\left(h_{yz}^2+h_{xz}^2+h_{xy}^2\right)$$
$$-2\left(h_{yz}h_{yw}h_{wz}+h_{xz}h_{xw}h_{wz}+h_{xy}h_{xw}h_{yw}+h_{xy}h_{xz}h_{yz}\right)-\left(h_{yy}h_{ww}h_{zz}+h_{xx}h_{zz}h_{ww}+h_{xx}h_{yy}h_{ww}+h_{xx}h_{yy}h_{zz}\right)$$

olarak bulunur.

4.3 $\mathbb{E}^4$'te Bir Hüperyüzeyin Normal Formunun Hesse Matrisinin Gradient Vektörün Bileşenleri ve Normal Eğrilikler Cinsinden İfadesi

Teorem 4.4 $\mathbb{E}^4$'te bir Φ hiperyüzeyinin normal formu $h=0$ olsun.

a) Eğer $h_xh_yh_zh_w\neq 0$ ise Φ hiperyüzeyinin

$$\mathbf{v}_1=\frac{\left(h_y,-h_x,0,0\right)}{\sqrt{h_y^2+h_x^2}},\qquad \mathbf{v}_2=\frac{\left(-h_z,0,h_x,0\right)}{\sqrt{h_x^2+h_z^2}},\qquad \mathbf{v}_3=\frac{\left(-h_w,0,0,h_x\right)}{\sqrt{h_x^2+h_w^2}},$$

$$\mathbf{v}_4=\frac{\left(0,-h_z,h_y,0\right)}{\sqrt{h_y^2+h_z^2}},\qquad \mathbf{v}_5=\frac{\left(0,-h_w,0,h_y\right)}{\sqrt{h_y^2+h_w^2}},\qquad \mathbf{v}_6=\frac{\left(0,0,-h_w,h_z\right)}{\sqrt{h_z^2+h_w^2}}$$

teğet vektörleri yönündeki normal eğrilikleri $\kappa_i\ \left(i=1,2,\ldots,6\right)$ ve

$$k_1=\kappa_1\left(h_x^2+h_y^2\right),\qquad k_2=\kappa_2\left(h_x^2+h_z^2\right),\qquad k_3=\kappa_3\left(h_x^2+h_w^2\right),$$

$$k_4=\kappa_4\left(h_y^2+h_z^2\right),\qquad k_5=\kappa_5\left(h_y^2+h_w^2\right),\qquad k_6=\kappa_6\left(h_z^2+h_w^2\right)$$

olmak üzere, h normal form fonksiyonunun Hesse matrisinin elemanları

$$h_{xx}=-\left(k_1+k_2+k_3+k_4+k_5+k_6\right)h_x^2+k_1+k_2+k_3$$

$$h_{yy}=-\left(k_1+k_2+k_3+k_4+k_5+k_6\right)h_y^2+k_1+k_4+k_5$$

$$h_{zz}=-\left(k_1+k_2+k_3+k_4+k_5+k_6\right)h_z^2+k_2+k_4+k_6$$

$$h_{ww}=-\left(k_1+k_2+k_3+k_4+k_5+k_6\right)h_w^2+k_3+k_5+k_6$$

$$h_{xy}=-\left(k_1+k_2+k_3+k_4+k_5+k_6\right)h_xh_y+\frac{\left(k_1+k_4+k_5\right)h_x^2+\left(k_1+k_2+k_3\right)h_y^2-k_1}{2h_xh_y}$$

$$h_{xz}=-\left(k_1+k_2+k_3+k_4+k_5+k_6\right)h_xh_z+\frac{\left(k_2+k_4+k_6\right)h_x^2+\left(k_1+k_2+k_3\right)h_z^2-k_2}{2h_xh_z}$$

$$h_{xw}=-\left(k_1+k_2+k_3+k_4+k_5+k_6\right)h_x h_w+\frac{\left(k_5+k_6+k_3\right)h_x^2+\left(k_1+k_2+k_3\right)h_w^2-k_3}{2h_x h_w}$$

$$h_{yz}=-\left(k_1+k_2+k_3+k_4+k_5+k_6\right)h_y h_z+\frac{\left(k_2+k_4+k_6\right)h_y^2+\left(k_1+k_4+k_5\right)h_z^2-k_4}{2h_y h_z}$$

$$h_{yw}=-\left(k_1+k_2+k_3+k_4+k_5+k_6\right)h_y h_w+\frac{\left(k_3+k_5+k_6\right)h_y^2+\left(k_1+k_4+k_5\right)h_w^2-k_5}{2h_y h_w}$$

$$h_{zw}=-\left(k_1+k_2+k_3+k_4+k_5+k_6\right)h_z h_w+\frac{\left(k_3+k_5+k_6\right)h_z^2+\left(k_2+k_4+k_6\right)h_w^2-k_6}{2h_z h_w}$$

şeklinde ifade edilebilir.

b) Eğer $h_x h_y h_z \neq 0$ ve $h_w=0$ ise Φ hiperyüzeyinin

$$\mathrm{v}_1=\left(-h_y,h_x,0,h_z\right),\qquad \mathrm{v}_2=\left(h_y,-h_x,0,h_z\right),\qquad \mathrm{v}_3=\left(-h_z,0,h_x,h_y\right),$$

$$\mathrm{v}_4=\left(h_z,0,-h_x,h_y\right),\qquad \mathrm{v}_5=\left(0,-h_y,h_z,h_x\right),\qquad \mathrm{v}_6=\left(0,0,0,1\right)$$

teğet vektörleri yönündeki normal eğrilikleri $\kappa_i\ \left(i=1,2,\ldots,6\right)$ olmak üzere h normal form fonksiyonunun Hesse matrisinin elemanları

$$h_{xx}=-\left(\kappa_1+\kappa_4+\kappa_5-2\kappa_6\right)h_x^2+\frac{\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3+\kappa_4-2\kappa_6}{2}$$

$$h_{yy}=-\left(2\kappa_1+\kappa_4+2\kappa_5-2\kappa_6\right)h_y^2+\frac{2\kappa_1-\kappa_3+\kappa_4+2\kappa_5-2\kappa_6}{2}$$

$$h_{zz}=-\left(\kappa_1+2\kappa_4+2\kappa_5-2\kappa_6\right)h_z^2+\frac{\kappa_1-\kappa_2+2\kappa_4+2\kappa_5-2\kappa_6}{2}$$

$$h_{ww}=\kappa_6$$

$$h_{xy}=\frac{-1}{4h_x h_y}\left\{\begin{array}{l}\left(\kappa_1+\kappa_4+\kappa_5\right)\left(4h_x^2h_y^2\right)+\left(-\kappa_1+\kappa_3-\kappa_4-2\kappa_5\right)h_x^2\\+\left(-\kappa_2-\kappa_3-\kappa_4\right)\left(h_y^2\right)+\kappa_1h_z^2+\kappa_6\left(\left(h_x^2-h_y^2\right)^2-h_z^2\left(h_z^2-2h_x^2h_y^2\right)\right)\end{array}\right\}$$

$$h_{xz}=\frac{-1}{4h_x h_z}\left\{\begin{array}{l}\kappa_1\left(4h_x^2h_z^2-h_x^2-h_z^2\right)+\kappa_2\left(h_x^2-h_z^2\right)+\kappa_3\left(1-h_z^2\right)+\kappa_4\left(4h_x^2h_z^2-h_x^2-h_y^2\right)\\\kappa_5\left(4h_x^2h_z^2-2h_x^2\right)+\kappa_6\left(h_x^4-h_y^4+h_z^4-2h_x^2h_c^2-2h_x^2h_y^2h_z^2\right)\end{array}\right\}$$

$$h_{xw}=\frac{-1}{4h_yh_z}\left\{h_y^2\kappa_1-h_y^2\kappa_2+h_z^2\kappa_3+h_z^2\kappa_4\right\}$$

$$h_{yz}=\frac{1}{4h_yh_z}\left\{\begin{matrix}\kappa_1\left(-h_x^2+h_z^2-4h_y^2h_z^2\right)+\kappa_2\left(1-h_y^2\right)+\kappa_3\left(1-h_z^2\right)+\kappa_4\left(h_y^2-h_x^2-4h_y^2h_z^2\right)\\+\kappa_5\left(2h_x^2-4h_y^2h_z^2\right)+\kappa_6\left(h_x^4-h_y^4+h_z^4+2h_y^4h_z^4-2h_x^2h_z^4+4h_x^2h_y^2h_z^2\right)\end{matrix}\right\}$$

$$h_{yw}=\frac{1}{4h_xh_z}\left\{\kappa_1-\kappa_2-\left(\kappa_1-\kappa_2\right)h_y^2-\left(\kappa_3-\kappa_4\right)h_z^2\right\}$$

$$h_{zw}=\frac{1}{4h_xh_y}\left\{\kappa_3-\kappa_4-\left(\kappa_1-\kappa_2\right)h_y^2-\left(\kappa_3-\kappa_4\right)h_z^2\right\}$$

şeklinde ifade edilebilir.

c) Eğer $h_z=0$ ve $h_w=0$ ise Φ hiperyüzeyinin

$$\mathrm{v}_1=\frac{\left(-h_y,h_x1,1\right)}{\sqrt{3}},\qquad \mathrm{v}_2=\frac{\left(h_y,-h_x,1,1\right)}{\sqrt{3}},\qquad \mathrm{v}_3=\frac{\left(-h_y,h_x,-1,1\right)}{\sqrt{3}},$$

$$\mathrm{v}_4=\frac{\left(h_y,-h_x,-1,1\right)}{\sqrt{3}},\qquad \mathrm{v}_5=\left(0,0,1,0\right),\qquad \mathrm{v}_6=\left(0,0,0,1\right)$$

teğet vektörleri yönündeki normal eğrilikleri $\kappa_i\ \left(i=1,2,\ldots,6\right)$ olmak üzere h normal form fonksiyonunun Hesse matrisinin elemanları

$$h_{xx}=\frac{\left(3\kappa_1+3\kappa_2+3\kappa_3+3\kappa_4-4\kappa_5-4\kappa_6\right)h_y^2}{4}$$

$$h_{yy}=\frac{\left(3\kappa_1+3\kappa_2+3\kappa_3+3\kappa_4-4\kappa_5-4\kappa_6\right)h_x^2}{4}$$

$$h_{zz}=\kappa_5$$

$$h_{ww}=\kappa_6$$

$$h_{xy}=\frac{-\left(3\kappa_1+3\kappa_2+3\kappa_3+3\kappa_4-8\kappa_5\right)h_xh_y}{4}$$

$$h_{xz}=\frac{-3\left(\kappa_1-\kappa_2-\kappa_3+\kappa_4\right)h_y}{8}$$

$$h_{xw} = \frac{-3\left(\kappa_1 - \kappa_2 + \kappa_3 - \kappa_4\right) h_y}{8}$$

$$h_{yz} = \frac{3\left(\kappa_1 - \kappa_2 - \kappa_3 + \kappa_4\right) h_x}{8}$$

$$h_{yw} = \frac{3\left(\kappa_1 - \kappa_2 + \kappa_3 - \kappa_4\right) h_x}{8}$$

$$h_{zw} = \frac{3\left(\kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_3 - \kappa_4\right)}{8}$$

biçiminde ifade edilebilirler.

İspat a) (4.4) eşitliği kullanılırsa,

$$\kappa_1 = \mathrm{v}_1 H_h \mathrm{v}_1^T = \frac{1}{h_x^2 + h_y^2}\begin{bmatrix} h_y & -h_x & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_{xx} & h_{yx} & h_{zx} & h_{wx} \\ h_{xy} & h_{yy} & h_{zy} & h_{wy} \\ h_{xz} & h_{yz} & h_{zz} & h_{wz} \\ h_{xw} & h_{yw} & h_{zw} & h_{ww} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_y \\ -h_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \kappa_1\left(h_x^2 + h_y^2\right) = h_y^2 h_{xx} - 2h_x h_y h_{xy} + h_x^2 h_{yy}\,, \tag{4.5}$$

$$\kappa_2 = \mathrm{v}_2 H_h \mathrm{v}_2^T = \frac{1}{h_x^2 + h_z^2}\begin{bmatrix} -h_z & 0 & h_x & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_{xx} & h_{yx} & h_{zx} & h_{wx} \\ h_{xy} & h_{yy} & h_{zy} & h_{wy} \\ h_{xz} & h_{yz} & h_{zz} & h_{wz} \\ h_{xw} & h_{yw} & h_{zw} & h_{ww} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -h_z \\ 0 \\ h_x \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \kappa_2\left(h_x^2 + h_z^2\right) = h_z^2 h_{xx} - 2h_x h_z h_{xz} + h_x^2 h_{zz}\,, \tag{4.6}$$

$$\kappa_3 = \mathrm{v}_3 H_h \mathrm{v}_3^T = \frac{1}{h_x^2 + h_w^2}\begin{bmatrix} -h_w & 0 & 0 & h_x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_{xx} & h_{yx} & h_{zx} & h_{wx} \\ h_{xy} & h_{yy} & h_{zy} & h_{wy} \\ h_{xz} & h_{yz} & h_{zz} & h_{wz} \\ h_{xw} & h_{yw} & h_{zw} & h_{ww} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -h_w \\ 0 \\ 0 \\ h_x \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \kappa_3\left(h_x^2 + h_w^2\right) = h_w^2 h_{xx} - h_w h_x h_{wx} - 2h_x h_w h_{xw} + h_x^2 h_{ww}\,, \tag{4.7}$$

$$\kappa_4 = \mathrm{v}_4 H_h \mathrm{v}_4^T = \frac{1}{h_y^2 + h_z^2}\begin{bmatrix} 0 & -h_z & h_y & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_{xx} & h_{yx} & h_{zx} & h_{wx} \\ h_{xy} & h_{yy} & h_{zy} & h_{wy} \\ h_{xz} & h_{yz} & h_{zz} & h_{wz} \\ h_{xw} & h_{yw} & h_{zw} & h_{ww} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -h_z \\ h_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \kappa_4\left(h_y^2+h_z^2\right)=h_z^2h_{yy}-2h_yh_zh_{yz}+h_y^2h_{zz}\,, \tag{4.8}$$

$$\kappa_5=\mathrm{v}_5H_h\mathrm{v}_5^T=\frac{1}{h_y^2+h_w^2}\begin{bmatrix}0 & -h_w & 0 & h_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_{xx} & h_{yx} & h_{zx} & h_{wx}\\ h_{xy} & h_{yy} & h_{zy} & h_{wy}\\ h_{xz} & h_{yz} & h_{zz} & h_{wz}\\ h_{xw} & h_{yw} & h_{zw} & h_{ww}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ -h_w\\ 0\\ h_y\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \kappa_5\left(h_y^2+h_w^2\right)=h_w^2h_{yy}-2h_yh_wh_{yz}+h_y^2h_{ww}\,, \tag{4.9}$$

$$\kappa_6=\mathrm{v}_6H_h\mathrm{v}_6^T=\frac{1}{h_z^2+h_w^2}\begin{bmatrix}0 & 0 & -h_w & h_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_{xx} & h_{yx} & h_{zx} & h_{wx}\\ h_{xy} & h_{yy} & h_{zy} & h_{wy}\\ h_{xz} & h_{yz} & h_{zz} & h_{wz}\\ h_{xw} & h_{yw} & h_{zw} & h_{ww}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -h_w\\ h_z\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \kappa_6\left(h_z^2+h_w^2\right)=h_w^2h_{zz}-2h_zh_wh_{wz}+h_z^2h_{ww} \tag{4.10}$$

denklemleri elde edilir. Buradan (4.1), (4.5), (4.6), (4.7), (4.8), (4.9) ve (4.10) denklemleri ile h normal form fonksiyonunun ikinci mertebeden türevlerine göre aşağıdaki lineer denklem sistemi elde edilir:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}
h_x & 0 & 0 & 0 & h_y & h_z & h_w & 0 & 0 & 0\\
0 & h_y & 0 & 0 & h_x & 0 & 0 & h_z & h_w & 0\\
0 & 0 & h_z & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & 0 & h_w\\
0 & 0 & 0 & h_w & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & h_z\\
h_y^2 & h_x^2 & 0 & 0 & -2h_xh_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
h_z^2 & 0 & h_x^2 & 0 & 0 & -2h_xh_z & 0 & 0 & 0 & 0\\
h_w^2 & 0 & 0 & h_x^2 & 0 & 0 & -2h_xh_w & 0 & 0 & 0\\
0 & h_z^2 & h_y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2h_yh_z & 0 & 0\\
0 & h_w^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2h_yh_w & 0\\
0 & 0 & h_w^2 & h_z^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2h_zh_w
\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}h_{xx}\\ h_{yy}\\ h_{zz}\\ h_{ww}\\ h_{xy}\\ h_{xz}\\ h_{xw}\\ h_{yz}\\ h_{yw}\\ h_{zw}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\\ \kappa_1\left(h_x^2+h_y^2\right)\\ \kappa_2\left(h_x^2+h_z^2\right)\\ \kappa_3\left(h_x^2+h_w^2\right)\\ \kappa_4\left(h_y^2+h_z^2\right)\\ \kappa_5\left(h_y^2+h_w^2\right)\\ \kappa_6\left(h_z^2+h_w^2\right)\end{bmatrix}$$

Bu sistemin katsayılar matrisinin determinantı

$$\det\left(A\right)=8h_x^2h_y^2h_z^2h_w^2\left(h_x^2+h_y^2+h_z^2+h_w^2\right)^4=8h_x^2h_y^2h_z^2h_w^2\neq 0$$

olur. Cramer metodu uygulanırsa

$$h_{xx}=\frac{1}{\det(A)}\begin{vmatrix}0&0&0&0&h_y&h_z&h_w&0&0&0\\0&h_y&0&0&h_x&0&0&h_z&h_w&0\\0&0&h_z&0&0&h_x&0&h_y&0&h_w\\0&0&0&h_w&0&0&h_x&0&h_y&h_z\\k_1&h_x^2&0&0&-2h_xh_y&0&0&0&0&0\\k_2&0&h_x^2&0&0&-2h_xh_z&0&0&0&0\\k_3&0&0&h_x^2&0&0&-2h_xh_w&0&0&0\\k_4&h_z^2&h_y^2&0&0&0&0&-2h_yh_z&0&0\\k_5&h_w^2&0&0&0&0&0&0&-2h_yh_w&0\\k_6&0&h_w^2&h_z^2&0&0&0&0&0&-2h_zh_w\end{vmatrix}$$

$$=\frac{8h_x^2h_y^2h_z^2h_w^2\left(h_x^2+h_y^2+h_z^2+h_w^2\right)^2}{8h_x^2h_y^2h_z^2h_w^2}\begin{Bmatrix}h_y^2k_1-h_x^2k_5-h_x^2k_6-h_x^2k_4+h_y^2k_2+h_y^2k_3\\+h_z^2k_1+h_z^2k_3+h_z^2k_2+h_w^2k_1+h_w^2k_2+h_w^2k_3\end{Bmatrix}$$

olup, $h_x^2+h_y^2+h_z^2+h_w^2=1$ eşitliği kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$h_{xx}=-h_x^2\left(k_1+k_2+k_3+k_4+k_5+k_6\right)+k_1+k_2+k_3$$

sonucuna ulaşılır. Aynı şekilde, Hesse matrisinin diğer elemanları,

$$h_{yy}=\frac{1}{\det(A)}\begin{vmatrix}h_x&0&0&0&h_y&h_z&h_w&0&0&0\\0&0&0&0&h_x&0&0&h_z&h_w&0\\0&0&h_z&0&0&h_x&0&h_y&0&h_w\\0&0&0&h_w&0&0&h_x&0&h_y&h_z\\h_y^2&k_1&0&0&-2h_xh_y&0&0&0&0&0\\h_z^2&k_2&h_x^2&0&0&-2h_xh_z&0&0&0&0\\h_w^2&k_3&0&h_x^2&0&0&-2h_xh_w&0&0&0\\0&k_4&h_y^2&0&0&0&0&-2h_yh_z&0&0\\0&k_5&0&0&0&0&0&0&-2h_yh_w&0\\0&k_6&h_w^2&h_z^2&0&0&0&0&0&-2h_zh_w\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow h_{yy}=-h_y^2\left(k_1+k_2+k_3+k_4+k_5+k_6\right)+k_1+k_4+k_5,$$

$$h_{zz}=\frac{1}{\det(A)}\begin{vmatrix} h_x & 0 & 0 & 0 & h_y & h_z & h_w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_y & 0 & 0 & h_x & 0 & 0 & h_z & h_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & 0 & h_w \\ 0 & 0 & 0 & h_w & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & h_z \\ h_y^2 & h_x^2 & k_1 & 0 & -2h_xh_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_z^2 & 0 & k_2 & 0 & 0 & -2h_xh_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_w^2 & 0 & k_3 & h_x^2 & 0 & 0 & -2h_xh_w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_z^2 & k_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2h_yh_z & 0 & 0 \\ 0 & h_w^2 & k_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2h_yh_w & 0 \\ 0 & 0 & k_6 & h_z^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2h_zh_w \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow h_{zz}=-h_z^2\left(k_1+k_2+k_3+k_4+k_5+k_6\right)+k_2+k_4+k_6,$$

$$h_{ww}=\frac{1}{\det(A)}\begin{vmatrix} h_x & 0 & 0 & 0 & h_y & h_z & h_w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_y & 0 & 0 & h_x & 0 & 0 & h_z & h_w & 0 \\ 0 & 0 & h_z & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & 0 & h_w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & h_z \\ h_y^2 & h_x^2 & 0 & k_1 & -2h_xh_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_z^2 & 0 & h_x^2 & k_2 & 0 & -2h_xh_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_w^2 & 0 & 0 & k_3 & 0 & 0 & -2h_xh_w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_z^2 & h_y^2 & k_4 & 0 & 0 & 0 & -2h_yh_z & 0 & 0 \\ 0 & h_w^2 & 0 & k_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2h_yh_w & 0 \\ 0 & 0 & h_w^2 & k_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2h_zh_w \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow h_{ww}=-h_w^2\left(k_1+k_2+k_3+k_4+k_5+k_6\right)+k_3+k_5+k_6,$$

$$h_{xy}=\frac{1}{\det(A)}\begin{vmatrix} h_x & 0 & 0 & 0 & 0 & h_z & h_w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_z & h_w & 0 \\ 0 & 0 & h_z & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & 0 & h_w \\ 0 & 0 & 0 & h_w & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & h_z \\ h_y^2 & h_x^2 & 0 & 0 & k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_z^2 & 0 & h_x^2 & 0 & k_2 & -2h_xh_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_w^2 & 0 & 0 & h_x^2 & k_3 & 0 & -2h_xh_w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_z^2 & h_y^2 & 0 & k_4 & 0 & 0 & -2h_yh_z & 0 & 0 \\ 0 & h_w^2 & 0 & 0 & k_5 & 0 & 0 & 0 & -2h_yh_w & 0 \\ 0 & 0 & h_w^2 & h_z^2 & k_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2h_zh_w \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow h_{xy}=-\left(k_1+k_2+k_3+k_4+k_5+k_6\right)h_xh_y+\frac{\left(k_1+k_4+k_5\right)h_x^2+\left(k_1+k_2+k_3\right)h_y^2-k_1}{2h_xh_y},$$

$$h_{xz}=\frac{1}{\det(A)}\begin{vmatrix} h_x & 0 & 0 & 0 & h_y & 0 & h_w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_y & 0 & 0 & h_x & 0 & 0 & h_z & h_w & 0 \\ 0 & 0 & h_z & 0 & 0 & 0 & 0 & h_y & 0 & h_w \\ 0 & 0 & 0 & h_w & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & h_z \\ h_y^2 & h_x^2 & 0 & 0 & -2h_xh_y & k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_z^2 & 0 & h_x^2 & 0 & 0 & k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_w^2 & 0 & 0 & h_x^2 & 0 & k_3 & -2h_xh_w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_z^2 & h_y^2 & 0 & 0 & k_4 & 0 & -2h_yh_z & 0 & 0 \\ 0 & h_w^2 & 0 & 0 & 0 & k_5 & 0 & 0 & -2h_yh_w & 0 \\ 0 & 0 & h_w^2 & h_z^2 & 0 & k_6 & 0 & 0 & 0 & -2h_zh_w \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow h_{xz}=-\left(k_1+k_2+k_3+k_4+k_5+k_6\right)h_xh_z+\frac{\left(k_2+k_4+k_6\right)h_x^2+\left(k_1+k_2+k_3\right)h_z^2-k_2}{2h_xh_z},$$

$$h_{xw}=\frac{1}{\det(A)}\begin{vmatrix} h_x & 0 & 0 & 0 & h_y & h_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_y & 0 & 0 & h_x & 0 & 0 & h_z & h_w & 0 \\ 0 & 0 & h_z & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & 0 & h_w \\ 0 & 0 & 0 & h_w & 0 & 0 & 0 & 0 & h_y & h_z \\ h_y^2 & h_x^2 & 0 & 0 & -2h_xh_y & 0 & k_1 & 0 & 0 & 0 \\ h_z^2 & 0 & h_x^2 & 0 & 0 & -2h_xh_z & k_2 & 0 & 0 & 0 \\ h_w^2 & 0 & 0 & h_x^2 & 0 & 0 & k_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_z^2 & h_y^2 & 0 & 0 & 0 & k_4 & -2h_yh_z & 0 & 0 \\ 0 & h_w^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_5 & 0 & -2h_yh_w & 0 \\ 0 & 0 & h_w^2 & h_z^2 & 0 & 0 & k_6 & 0 & 0 & -2h_zh_w \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow h_{xw}=-\left(k_1+k_2+k_3+k_4+k_5+k_6\right)h_xh_w+\frac{\left(k_5+k_6+k_3\right)h_x^2+\left(k_1+k_2+k_3\right)h_w^2-k_3}{2h_xh_w},$$

$$h_{yz}=\frac{1}{\det(A)}\begin{vmatrix} h_x & 0 & 0 & 0 & h_y & h_z & h_w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_y & 0 & 0 & h_x & 0 & 0 & 0 & h_w & 0 \\ 0 & 0 & h_z & 0 & 0 & h_x & 0 & 0 & 0 & h_w \\ 0 & 0 & 0 & h_w & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & h_z \\ h_y^2 & h_x^2 & 0 & 0 & -2h_xh_y & 0 & 0 & k_1 & 0 & 0 \\ h_z^2 & 0 & h_x^2 & 0 & 0 & -2h_xh_z & 0 & k_2 & 0 & 0 \\ h_w^2 & 0 & 0 & h_x^2 & 0 & 0 & -2h_xh_w & k_3 & 0 & 0 \\ 0 & h_z^2 & h_y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_4 & 0 & 0 \\ 0 & h_w^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_5 & -2h_yh_w & 0 \\ 0 & 0 & h_w^2 & h_z^2 & 0 & 0 & 0 & k_6 & 0 & -2h_zh_w \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow h_{yz} = -\left(k_1+k_2+k_3+k_4+k_5+k_6\right)h_y h_z + \frac{\left(k_2+k_4+k_6\right)h_y^2 + \left(k_1+k_4+k_5\right)h_z^2 - k_4}{2h_y h_z},$$

$$h_{yw} = \frac{1}{\det(A)}\begin{vmatrix} h_x & 0 & 0 & 0 & h_y & h_z & h_w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_y & 0 & 0 & h_x & 0 & 0 & h_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_z & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & 0 & h_w \\ 0 & 0 & 0 & h_w & 0 & 0 & h_x & 0 & 0 & h_z \\ h_y^2 & h_x^2 & 0 & 0 & -2h_x h_y & 0 & 0 & 0 & k_1 & 0 \\ h_z^2 & 0 & h_x^2 & 0 & 0 & -2h_x h_z & 0 & 0 & k_2 & 0 \\ h_w^2 & 0 & 0 & h_x^2 & 0 & 0 & -2h_x h_w & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & h_z^2 & h_y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2h_y h_z & k_4 & 0 \\ 0 & h_w^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_5 & 0 \\ 0 & 0 & h_w^2 & h_z^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_6 & -2h_z h_w \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow h_{yw} = -\left(k_1+k_2+k_3+k_4+k_5+k_6\right)h_y h_w + \frac{\left(k_3+k_5+k_6\right)h_y^2 + \left(k_1+k_4+k_5\right)h_w^2 - k_5}{2h_y h_w},$$

$$h_{zw} = \frac{1}{\det(A)}\begin{vmatrix} h_x & 0 & 0 & 0 & h_y & h_z & h_w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_y & 0 & 0 & h_x & 0 & 0 & h_z & h_w & 0 \\ 0 & 0 & h_z & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_w & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & 0 \\ h_y^2 & h_x^2 & 0 & 0 & -2h_x h_y & 0 & 0 & 0 & 0 & k_1 \\ h_z^2 & 0 & h_x^2 & 0 & 0 & -2h_x h_z & 0 & 0 & 0 & k_2 \\ h_w^2 & 0 & 0 & h_x^2 & 0 & 0 & -2h_x h_w & 0 & 0 & k_3 \\ 0 & h_z^2 & h_y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2h_y h_z & 0 & k_4 \\ 0 & h_w^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2h_y h_w & k_5 \\ 0 & 0 & h_w^2 & h_z^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_6 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow h_{zw} = -\left(k_1+k_2+k_3+k_4+k_5+k_6\right)h_z h_w + \frac{\left(k_3+k_5+k_6\right)h_z^2 + \left(k_2+k_4+k_6\right)h_w^2 - k_6}{2h_z h_w}$$

biçiminde elde edilir.

b) $h_w = 0$ olsun. Bu durumda hiperyüzeyin

$$\mathrm{v}_1 = \left(-h_y, h_x, 0, h_z\right), \qquad \mathrm{v}_2 = \left(h_y, -h_x, 0, h_z\right), \qquad \mathrm{v}_3 = \left(-h_z, 0, h_x, h_y\right),$$

$$\mathrm{v}_4 = \left(h_z, 0, -h_x, h_y\right), \qquad \mathrm{v}_5 = \left(0, -h_y, h_z, h_x\right), \qquad \mathrm{v}_6 = \left(0,0,0,1\right)$$

teğet vektörleri için, (4.4) eşitliği kullanıldığında

$$\kappa_1 = \begin{bmatrix} -h_y & h_x & 0 & h_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{xx} & h_{yx} & h_{zx} & h_{wx} \\ h_{xy} & h_{yy} & h_{zy} & h_{wy} \\ h_{xz} & h_{yz} & h_{zz} & h_{wz} \\ h_{xw} & h_{yw} & h_{zw} & h_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -h_y \\ h_x \\ 0 \\ h_z \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \kappa_1 = h_y^2 h_{xx} - 2h_x h_y h_{xy} + h_x^2 h_{yy} + 2h_x h_z h_{wy} - 2h_y h_z h_{xw} + h_z^2 h_{ww} \tag{4.11}$$

$$\kappa_2 = \begin{bmatrix} h_y & -h_x & 0 & h_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{xx} & h_{yx} & h_{zx} & h_{wx} \\ h_{xy} & h_{yy} & h_{zy} & h_{wy} \\ h_{xz} & h_{yz} & h_{zz} & h_{wz} \\ h_{xw} & h_{yw} & h_{zw} & h_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_y \\ -h_x \\ 0 \\ h_z \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \kappa_2 = h_y^2 h_{xx} - 2h_x h_y h_{xy} + h_x^2 h_{yy} - 2h_x h_z h_{wy} + 2h_y h_z h_{xw} + h_z^2 h_{ww} \tag{4.12}$$

$$\kappa_3 = \begin{bmatrix} -h_z & 0 & h_x & h_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{xx} & h_{yx} & h_{zx} & h_{wx} \\ h_{xy} & h_{yy} & h_{zy} & h_{wy} \\ h_{xz} & h_{yz} & h_{zz} & h_{wz} \\ h_{xw} & h_{yw} & h_{zw} & h_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -h_z \\ 0 \\ h_x \\ h_y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \kappa_3 = h_z^2 h_{xx} - 2h_x h_z h_{xz} + h_x^2 h_{zz} + 2h_x h_y h_{wz} - 2h_z h_y h_{xw} + h_y^2 h_{ww} \tag{4.13}$$

$$\kappa_4 = \begin{bmatrix} h_z & 0 & -h_x & h_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{xx} & h_{yx} & h_{zx} & h_{wx} \\ h_{xy} & h_{yy} & h_{zy} & h_{wy} \\ h_{xz} & h_{yz} & h_{zz} & h_{wz} \\ h_{xw} & h_{yw} & h_{zw} & h_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_z \\ 0 \\ -h_x \\ h_y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \kappa_4 = h_z^2 h_{xx} - 2h_x h_z h_{xz} + h_x^2 h_{zz} - 2h_x h_y h_{wz} + 2h_z h_y h_{xw} + h_y^2 h_{ww} \tag{4.14}$$

$$\kappa_5 = \begin{bmatrix} 0 & -h_z & h_y & h_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{xx} & h_{yx} & h_{zx} & h_{wx} \\ h_{xy} & h_{yy} & h_{zy} & h_{wy} \\ h_{xz} & h_{yz} & h_{zz} & h_{wz} \\ h_{xw} & h_{yw} & h_{zw} & h_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -h_z \\ h_y \\ h_x \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \kappa_5 = h_z^2 h_{yy} - 2h_y h_z h_{yz} + h_y^2 h_{zz} + 2h_x h_y h_{wz} - 2h_x h_z h_{yw} + h_x^2 h_{ww} \tag{4.15}$$

$$\kappa_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{xx} & h_{yx} & h_{zx} & h_{wx} \\ h_{xy} & h_{yy} & h_{zy} & h_{wy} \\ h_{xz} & h_{yz} & h_{zz} & h_{wz} \\ h_{xw} & h_{yw} & h_{zw} & h_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = h_{ww} \tag{4.16}$$

eşitlikleri elde edilir. $h_w = 0$ olduğu gözönüne alınarak, (4.1), (4.11), (4.12), (4.13), (4.14), (4.15) ve (4.16) denklemleri ile oluşturulan

$$\underbrace{\begin{bmatrix} h_x & 0 & 0 & 0 & h_y & h_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_y & 0 & 0 & h_x & 0 & 0 & h_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_z & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & h_z \\ h_y^2 & h_x^2 & 0 & h_z^2 & -2h_xh_y & 0 & -2h_yh_z & 0 & 2h_xh_z & 0 \\ h_y^2 & h_x^2 & 0 & h_z^2 & -2h_xh_y & 0 & 2h_yh_z & 0 & -2h_xh_z & 0 \\ h_z^2 & 0 & h_x^2 & h_y^2 & 0 & -2h_xh_z & -2h_yh_z & 0 & 0 & 2h_xh_y \\ h_z^2 & 0 & h_x^2 & h_y^2 & 0 & -2h_yh_z & 2h_yh_z & 0 & 0 & -2h_xh_y \\ 0 & h_z^2 & h_y^2 & h_x^2 & 0 & 0 & 0 & -2h_yh_z & -2h_xh_z & 2h_xh_y \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} h_{xx} \\ h_{yy} \\ h_{zz} \\ h_{ww} \\ h_{xy} \\ h_{xz} \\ h_{xw} \\ h_{yz} \\ h_{yw} \\ h_{zw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \\ \kappa_4 \\ \kappa_5 \\ \kappa_6 \end{bmatrix}$$

lineer denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı

$$\det(B) = 32h_x^2h_y^2h_z^2\left(h_x^2+h_y^2+h_z^2\right)^4 = 32h_x^2h_y^2h_z^2 \neq 0$$

bulunur. Cramer metodu kullanılırsa, Hesse matrisinin elemanlarının gradient vektörün bileşenleri ve normal eğrilikler cinsinden ifadeleri,

$$h_{xx} = \frac{1}{\det(B)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & h_y & h_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_y & 0 & 0 & h_x & 0 & 0 & h_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_z & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & h_z \\ \kappa_1 & h_x^2 & 0 & h_z^2 & -2h_xh_y & 0 & -2h_yh_z & 0 & 2h_xh_z & 0 \\ \kappa_2 & h_x^2 & 0 & h_z^2 & -2h_xh_y & 0 & 2h_yh_z & 0 & -2h_xh_z & 0 \\ \kappa_3 & 0 & h_x^2 & h_y^2 & 0 & -2h_xh_z & -2h_yh_z & 0 & 0 & 2h_xh_y \\ \kappa_4 & 0 & h_x^2 & h_y^2 & 0 & -2h_yh_z & 2h_yh_z & 0 & 0 & -2h_xh_y \\ \kappa_5 & h_z^2 & h_y^2 & h_x^2 & 0 & 0 & 0 & -2h_yh_z & -2h_xh_z & 2h_xh_y \\ \kappa_6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow h_{xx} = -\left(\kappa_1+\kappa_4+\kappa_5-2\kappa_6\right)h_x^2 + \frac{\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3+\kappa_4-2\kappa_6}{2},$$

$$h_{yy}=\frac{1}{\det(B)}\begin{vmatrix} h_x & 0 & 0 & 0 & h_y & h_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_x & 0 & 0 & h_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_z & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & h_z \\ h_y^2 & \kappa_1 & 0 & h_z^2 & -2h_xh_y & 0 & -2h_yh_z & 0 & 2h_xh_z & 0 \\ h_y^2 & \kappa_2 & 0 & h_z^2 & -2h_xh_y & 0 & 2h_yh_z & 0 & -2h_xh_z & 0 \\ h_z^2 & \kappa_3 & h_x^2 & h_y^2 & 0 & -2h_xh_z & -2h_yh_z & 0 & 0 & 2h_xh_y \\ h_z^2 & \kappa_4 & h_x^2 & h_y^2 & 0 & -2h_yh_z & 2h_yh_z & 0 & 0 & -2h_xh_y \\ 0 & \kappa_5 & h_y^2 & h_x^2 & 0 & 0 & 0 & -2h_yh_z & -2h_xh_z & 2h_xh_y \\ 0 & \kappa_6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow h_{yy}=-\left(2\kappa_1+\kappa_4+2\kappa_5-2\kappa_6\right)h_y^2+\frac{2\kappa_1-\kappa_3+\kappa_4+2\kappa_5-2\kappa_6}{2},$$

$$h_{zz}=\frac{1}{\det(B)}\begin{vmatrix} h_x & 0 & 0 & 0 & h_y & h_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_y & 0 & 0 & h_x & 0 & 0 & h_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & h_z \\ h_y^2 & h_x^2 & \kappa_1 & h_z^2 & -2h_xh_y & 0 & -2h_yh_z & 0 & 2h_xh_z & 0 \\ h_y^2 & h_x^2 & \kappa_2 & h_z^2 & -2h_xh_y & 0 & 2h_yh_z & 0 & -2h_xh_z & 0 \\ h_z^2 & 0 & \kappa_3 & h_y^2 & 0 & -2h_xh_z & -2h_yh_z & 0 & 0 & 2h_xh_y \\ h_z^2 & 0 & \kappa_4 & h_y^2 & 0 & -2h_yh_z & 2h_yh_z & 0 & 0 & -2h_xh_y \\ 0 & h_z^2 & \kappa_5 & h_x^2 & 0 & 0 & 0 & -2h_yh_z & -2h_xh_z & 2h_xh_y \\ 0 & 0 & \kappa_6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow h_{zz}=-\left(\kappa_1+2\kappa_4+2\kappa_5-2\kappa_6\right)h_z^2+\frac{\kappa_1-\kappa_2+2\kappa_4+2\kappa_5-2\kappa_6}{2},$$

$$h_{ww}=\frac{1}{\det(B)}\begin{vmatrix} h_x & 0 & 0 & 0 & h_y & h_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_y & 0 & 0 & h_x & 0 & 0 & h_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_z & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & h_z \\ h_y^2 & h_x^2 & 0 & \kappa_1 & -2h_xh_y & 0 & -2h_yh_z & 0 & 2h_xh_z & 0 \\ h_y^2 & h_x^2 & 0 & \kappa_2 & -2h_xh_y & 0 & 2h_yh_z & 0 & -2h_xh_z & 0 \\ h_z^2 & 0 & h_x^2 & \kappa_3 & 0 & -2h_xh_z & -2h_yh_z & 0 & 0 & 2h_xh_y \\ h_z^2 & 0 & h_x^2 & \kappa_4 & 0 & -2h_yh_z & 2h_yh_z & 0 & 0 & -2h_xh_y \\ 0 & h_z^2 & h_y^2 & \kappa_5 & 0 & 0 & 0 & -2h_yh_z & -2h_xh_z & 2h_xh_y \\ 0 & 0 & 0 & \kappa_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow h_{ww}=\frac{32h_x^2h_y^2h_z^2\kappa_6}{32h_x^2h_y^2h_z^2}=\kappa_6,$$

$$h_{xy}=\frac{1}{\det(B)}\begin{vmatrix} h_x & 0 & 0 & 0 & 0 & h_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_z & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & h_z \\ h_y^2 & h_x^2 & 0 & h_z^2 & \kappa_1 & 0 & -2h_yh_z & 0 & 2h_xh_z & 0 \\ h_y^2 & h_x^2 & 0 & h_z^2 & \kappa_2 & 0 & 2h_yh_z & 0 & -2h_xh_z & 0 \\ h_z^2 & 0 & h_x^2 & h_y^2 & \kappa_3 & -2h_xh_z & -2h_yh_z & 0 & 0 & 2h_xh_y \\ h_z^2 & 0 & h_x^2 & h_y^2 & \kappa_4 & -2h_yh_z & 2h_yh_z & 0 & 0 & -2h_xh_y \\ 0 & h_z^2 & h_y^2 & h_x^2 & \kappa_5 & 0 & 0 & -2h_yh_z & -2h_xh_z & 2h_xh_y \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \kappa_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow h_{xy}=\frac{-1}{4h_xh_y}\left\{\begin{array}{l}(\kappa_1+\kappa_4+\kappa_5)\left(4h_x^2h_y^2\right)+(\kappa_3-\kappa_1-\kappa_4-2\kappa_5)h_x^2 \\ -(\kappa_2+\kappa_3+\kappa_4)\left(h_y^2\right)+\kappa_1h_z^2+\kappa_6\left(\left(h_x^2-h_y^2\right)^2-h_z^2\left(h_z^2-2h_x^2h_y^2\right)\right)\end{array}\right\}$$

$$h_{xz}=\frac{1}{\det(B)}\begin{vmatrix} h_x & 0 & 0 & 0 & h_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_y & 0 & 0 & h_x & 0 & 0 & h_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_z & 0 & 0 & 0 & 0 & h_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & h_z \\ h_y^2 & h_x^2 & 0 & h_z^2 & -2h_xh_y & \kappa_1 & -2h_yh_z & 0 & 2h_xh_z & 0 \\ h_y^2 & h_x^2 & 0 & h_z^2 & -2h_xh_y & \kappa_2 & 2h_yh_z & 0 & -2h_xh_z & 0 \\ h_z^2 & 0 & h_x^2 & h_y^2 & 0 & \kappa_3 & -2h_yh_z & 0 & 0 & 2h_xh_y \\ h_z^2 & 0 & h_x^2 & h_y^2 & 0 & \kappa_4 & 2h_yh_z & 0 & 0 & -2h_xh_y \\ 0 & h_z^2 & h_y^2 & h_x^2 & 0 & \kappa_5 & 0 & -2h_yh_z & -2h_xh_z & 2h_xh_y \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \kappa_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow h_{xz}=\frac{-1}{4h_xh_z}\left\{\begin{array}{l}\kappa_1\left(4h_x^2h_z^2-h_x^2-h_z^2\right)+\kappa_2\left(h_x^2-h_z^2\right)+\kappa_3\left(1-h_z^2\right)+\kappa_4\left(4h_x^2h_z^2-h_x^2-h_y^2\right) \\ +\kappa_5\left(4h_x^2h_z^2-2h_x^2\right)+\kappa_6\left(h_x^4-h_y^4+h_z^4-2h_x^2h_z^2-2h_x^2h_y^2h_z^2\right)\end{array}\right\}$$

$$h_{xw}=\frac{1}{\det(B)}\begin{vmatrix} h_x & 0 & 0 & 0 & h_y & h_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_y & 0 & 0 & h_x & 0 & 0 & h_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_z & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_y & h_z \\ h_y^2 & h_x^2 & 0 & h_z^2 & -2h_xh_y & 0 & \kappa_1 & 0 & 2h_xh_z & 0 \\ h_y^2 & h_x^2 & 0 & h_z^2 & -2h_xh_y & 0 & \kappa_2 & 0 & -2h_xh_z & 0 \\ h_z^2 & 0 & h_x^2 & h_y^2 & 0 & -2h_xh_z & \kappa_3 & 0 & 0 & 2h_xh_y \\ h_z^2 & 0 & h_x^2 & h_y^2 & 0 & -2h_yh_z & \kappa_4 & 0 & 0 & -2h_xh_y \\ 0 & h_z^2 & h_y^2 & h_x^2 & 0 & 0 & \kappa_5 & -2h_yh_z & -2h_xh_z & 2h_xh_y \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \kappa_6 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow h_{xw}=\frac{-(\kappa_1-\kappa_2)h_y^2+(\kappa_3+\kappa_4)h_z^2}{4h_yh_z},$$

$$h_{yz}=\frac{1}{\det(B)}\begin{vmatrix} h_x & 0 & 0 & 0 & h_y & h_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_y & 0 & 0 & h_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_z & 0 & 0 & h_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & h_z \\ h_y^2 & h_x^2 & 0 & h_z^2 & -2h_xh_y & 0 & -2h_yh_z & \kappa_1 & 2h_xh_z & 0 \\ h_y^2 & h_x^2 & 0 & h_z^2 & -2h_xh_y & 0 & 2h_yh_z & \kappa_2 & -2h_xh_z & 0 \\ h_z^2 & 0 & h_x^2 & h_y^2 & 0 & -2h_xh_z & -2h_yh_z & \kappa_3 & 0 & 2h_xh_y \\ h_z^2 & 0 & h_x^2 & h_y^2 & 0 & -2h_yh_z & 2h_yh_z & \kappa_4 & 0 & -2h_xh_y \\ 0 & h_z^2 & h_y^2 & h_x^2 & 0 & 0 & 0 & \kappa_5 & -2h_xh_z & 2h_xh_y \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \kappa_6 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow h_{yz}=\frac{1}{4h_yh_z}\begin{Bmatrix} \kappa_1\left(-h_x^2+h_z^2-4h_y^2h_z^2\right)+\kappa_2\left(1-h_y^2\right)+\kappa_3\left(1-h_z^2\right)+\kappa_4\left(h_y^2-h_x^2-4h_y^2h_z^2\right) \\ +\kappa_5\left(2h_x^2-4h_y^2h_z^2\right)+\kappa_6\left(h_x^4-h_y^4+h_z^4+2h_y^4h_z^4-2h_x^2h_z^4+4h_x^2h_y^2h_z^2\right) \end{Bmatrix},$$

$$h_{yw}=\frac{1}{\det(B)}\begin{vmatrix} h_x & 0 & 0 & 0 & h_y & h_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_y & 0 & 0 & h_x & 0 & 0 & h_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_z & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_x & 0 & 0 & h_z \\ h_y^2 & h_x^2 & 0 & h_z^2 & -2h_xh_y & 0 & -2h_yh_z & 0 & \kappa_1 & 0 \\ h_y^2 & h_x^2 & 0 & h_z^2 & -2h_xh_y & 0 & 2h_yh_z & 0 & \kappa_2 & 0 \\ h_z^2 & 0 & h_x^2 & h_y^2 & 0 & -2h_xh_z & -2h_yh_z & 0 & \kappa_3 & 2h_xh_y \\ h_z^2 & 0 & h_x^2 & h_y^2 & 0 & -2h_yh_z & 2h_yh_z & 0 & \kappa_4 & -2h_xh_y \\ 0 & h_z^2 & h_y^2 & h_x^2 & 0 & 0 & 0 & -2h_yh_z & \kappa_5 & 2h_xh_y \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa_6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow h_{yw}=\frac{1}{4h_xh_z}\left\{\kappa_1-\kappa_2-\left(\kappa_1-\kappa_2\right)h_y^2-\left(\kappa_3-\kappa_4\right)h_z^2\right\},$$

$$h_{zw}=\frac{1}{\det\left(B\right)}\begin{vmatrix} h_x & 0 & 0 & 0 & h_y & h_z & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & h_y & 0 & 0 & h_x & 0 & 0 & h_z & 0 & 0\\ 0 & 0 & h_z & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & 0\\ h_y^2 & h_x^2 & 0 & h_z^2 & -2h_xh_y & 0 & -2h_yh_z & 0 & 2h_xh_z & \kappa_1\\ h_y^2 & h_x^2 & 0 & h_z^2 & -2h_xh_y & 0 & 2h_yh_z & 0 & -2h_xh_z & \kappa_2\\ h_z^2 & 0 & h_x^2 & h_y^2 & 0 & -2h_xh_z & -2h_yh_z & 0 & 0 & \kappa_3\\ h_z^2 & 0 & h_x^2 & h_y^2 & 0 & -2h_yh_z & 2h_yh_z & 0 & 0 & \kappa_4\\ 0 & h_z^2 & h_y^2 & h_x^2 & 0 & 0 & 0 & -2h_yh_z & -2h_xh_z & \kappa_5\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & 0 & \kappa_6 \end{vmatrix}$$

$$h_{zw}=\frac{1}{4h_xh_y}\left\{\kappa_3-\kappa_4-\left(\kappa_1-\kappa_2\right)h_y^2-\left(\kappa_3-\kappa_4\right)h_z^2\right\}$$

şeklinde elde edilir.

Benzer sonuçlar $h_yh_zh_w\neq 0$ ve $h_x=0$, $h_xh_zh_w\neq 0$ ve $h_y=0$, $h_xh_yh_w\neq 0$ ve $h_z=0$ durumları için de bulunabilir.

c) $h_z=h_w=0$ ise, hiperyüzeyin

$$\mathrm{v}_1=\frac{\left(-h_y,h_x1,1\right)}{\sqrt{3}},\qquad \mathrm{v}_2=\frac{\left(h_y,-h_x,1,1\right)}{\sqrt{3}},\qquad \mathrm{v}_3=\frac{\left(-h_y,h_x,-1,1\right)}{\sqrt{3}},$$

$$\mathrm{v}_4=\frac{\left(h_y,-h_x,-1,1\right)}{\sqrt{3}},\qquad \mathrm{v}_5=\left(0,0,1,0\right),\qquad \mathrm{v}_6=\left(0,0,0,1\right)$$

teğet vektörleri yönündeki normal eğrilikleri için, sırasıyla,

$$3\kappa_1=\begin{bmatrix}-h_y & h_x & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_{xx} & h_{yx} & h_{zx} & h_{wx}\\ h_{xy} & h_{yy} & h_{zy} & h_{wy}\\ h_{xz} & h_{yz} & h_{zz} & h_{wz}\\ h_{xw} & h_{yw} & h_{zw} & h_{ww}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-h_y\\ h_x\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 3\kappa_1=h_y^2h_{xx}+h_x^2h_{yy}+h_{zz}+h_{ww}-2h_xh_yh_{xy}-2h_yh_{xz}-2h_yh_{wx}+2h_xh_{zy}+2h_xh_{wy}+2h_{wz}\ \textbf{(4.17)}$$

$$3\kappa_2 = \begin{bmatrix} h_y & -h_x & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{xx} & h_{yx} & h_{zx} & h_{wx} \\ h_{xy} & h_{yy} & h_{zy} & h_{wy} \\ h_{xz} & h_{yz} & h_{zz} & h_{wz} \\ h_{xw} & h_{yw} & h_{zw} & h_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_y \\ -h_x \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 3\kappa_2 = h_y^2 h_{xx} + h_x^2 h_{yy} + h_{zz} + h_{ww} - 2h_x h_y h_{xy} + 2h_y h_{xz} + 2h_y h_{wx} - 2h_x h_{zy} - 2h_x h_{wy} + 2h_{wz} \quad (4.18)$$

$$3\kappa_3 = \begin{bmatrix} -h_y & h_x & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{xx} & h_{yx} & h_{zx} & h_{wx} \\ h_{xy} & h_{yy} & h_{zy} & h_{wy} \\ h_{xz} & h_{yz} & h_{zz} & h_{wz} \\ h_{xw} & h_{yw} & h_{zw} & h_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -h_y \\ h_x \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 3\kappa_3 = h_y^2 h_{xx} + h_x^2 h_{yy} + h_{zz} + h_{ww} - 2h_x h_y h_{xy} + 2h_y h_{xz} - 2h_y h_{wx} - 2h_x h_{zy} + 2h_x h_{wy} - 2h_{wz} \quad (4.19)$$

$$\kappa_4 = \begin{bmatrix} h_y & -h_x & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{xx} & h_{yx} & h_{zx} & h_{wx} \\ h_{xy} & h_{yy} & h_{zy} & h_{wy} \\ h_{xz} & h_{yz} & h_{zz} & h_{wz} \\ h_{xw} & h_{yw} & h_{zw} & h_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_y \\ -h_x \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 3\kappa_4 = h_y^2 h_{xx} + h_x^2 h_{yy} + h_{zz} + h_{ww} - 2h_x h_y h_{xy} + 2h_y h_{xz} - 2h_y h_{wx} - 2h_x h_{zy} + 2h_x h_{wy} - 2h_{wz} \quad (4.20)$$

$$\kappa_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{xx} & h_{yx} & h_{zx} & h_{wx} \\ h_{xy} & h_{yy} & h_{zy} & h_{wy} \\ h_{xz} & h_{yz} & h_{zz} & h_{wz} \\ h_{xw} & h_{yw} & h_{zw} & h_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{zx} \\ h_{zy} \\ h_{zz} \\ h_{zw} \end{bmatrix} = h_{zz} \quad (4.21)$$

$$\kappa_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{xx} & h_{yx} & h_{zx} & h_{wx} \\ h_{xy} & h_{yy} & h_{zy} & h_{wy} \\ h_{xz} & h_{yz} & h_{zz} & h_{wz} \\ h_{xw} & h_{yw} & h_{zw} & h_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{wx} \\ h_{wy} \\ h_{wz} \\ h_{ww} \end{bmatrix} = h_{ww} \quad (4.22)$$

yazılabilir. (4.1), (4.17), (4.18), (4.19), (4.20), (4.21) ve (4.22) denklemlerinden

$$\underbrace{\begin{bmatrix} h_x & 0 & 0 & 0 & h_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_y & 0 & 0 & h_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & 0 \\ h_y^2 & h_x^2 & 1 & 1 & -2h_xh_y & -2h_y & -2h_y & 2h_x & 2h_x & 2 \\ h_y^2 & h_x^2 & 1 & 1 & -2h_xh_y & 2h_y & 2h_y & -2h_x & -2h_x & 2 \\ h_y^2 & h_x^2 & 1 & 1 & -2h_xh_y & 2h_y & -2h_y & -2h_x & 2h_x & -2 \\ h_y^2 & h_x^2 & 1 & 1 & -2h_xh_y & -2h_y & 2h_y & 2h_x & -2h_x & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} h_{xx} \\ h_{yy} \\ h_{zz} \\ h_{ww} \\ h_{xy} \\ h_{xz} \\ h_{xw} \\ h_{yz} \\ h_{yw} \\ h_{zw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3\kappa_1 \\ 3\kappa_2 \\ 3\kappa_3 \\ 3\kappa_4 \\ \kappa_5 \\ \kappa_6 \end{bmatrix}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Burada

$$\det(C) = -128\left(h_x^2 + h_y^2\right)^2 = -128 \neq 0$$

olup, sistem çözülürse,

$$h_{xx} = \frac{1}{\det(C)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & h_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_y & 0 & 0 & h_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & 0 \\ 3\kappa_1 & h_x^2 & 1 & 1 & -2h_xh_y & -2h_y & -2h_y & 2h_x & 2h_x & 2 \\ 3\kappa_2 & h_x^2 & 1 & 1 & -2h_xh_y & 2h_y & 2h_y & -2h_x & -2h_x & 2 \\ 3\kappa_3 & h_x^2 & 1 & 1 & -2h_xh_y & 2h_y & -2h_y & -2h_x & 2h_x & -2 \\ 3\kappa_4 & h_x^2 & 1 & 1 & -2h_xh_y & -2h_y & 2h_y & 2h_x & -2h_x & -2 \\ \kappa_5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \kappa_6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow h_{xx} = \frac{\left(3\kappa_1 + 3\kappa_2 + 3\kappa_3 + 3\kappa_4 - 4\kappa_5 - 4\kappa_6\right)h_y^2}{4},$$

$$h_{yy}=\frac{1}{\det(C)}\begin{vmatrix} h_x & 0 & 0 & 0 & h_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & 0 \\ h_y^2 & 3\kappa_1 & 1 & 1 & -2h_xh_y & -2h_y & -2h_y & 2h_x & 2h_x & 2 \\ h_y^2 & 3\kappa_2 & 1 & 1 & -2h_xh_y & 2h_y & 2h_y & -2h_x & -2h_x & 2 \\ h_y^2 & 3\kappa_3 & 1 & 1 & -2h_xh_y & 2h_y & -2h_y & -2h_x & 2h_x & -2 \\ h_y^2 & 3\kappa_4 & 1 & 1 & -2h_xh_y & -2h_y & 2h_y & 2h_x & -2h_x & -2 \\ 0 & \kappa_5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow h_{yy}=\frac{\left(3\kappa_1+3\kappa_2+3\kappa_3+3\kappa_4-4\kappa_5-4\kappa_6\right)h_x^2}{4},$$

$$h_{zz}=\frac{1}{\det(C)}\begin{vmatrix} h_x & 0 & 0 & 0 & h_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_y & 0 & 0 & h_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & 0 \\ h_y^2 & h_x^2 & 3\kappa_1 & 1 & -2h_xh_y & -2h_y & -2h_y & 2h_x & 2h_x & 2 \\ h_y^2 & h_x^2 & 3\kappa_2 & 1 & -2h_xh_y & 2h_y & 2h_y & -2h_x & -2h_x & 2 \\ h_y^2 & h_x^2 & 3\kappa_3 & 1 & -2h_xh_y & 2h_y & -2h_y & -2h_x & 2h_x & -2 \\ h_y^2 & h_x^2 & 3\kappa_4 & 1 & -2h_xh_y & -2h_y & 2h_y & 2h_x & -2h_x & -2 \\ 0 & 0 & \kappa_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow h_{zz}=\kappa_5,$$

$$h_{ww}=\frac{1}{\det(C)}\begin{vmatrix} h_x & 0 & 0 & 0 & h_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_y & 0 & 0 & h_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & 0 \\ h_y^2 & h_x^2 & 1 & 3\kappa_1 & -2h_xh_y & -2h_y & -2h_y & 2h_x & 2h_x & 2 \\ h_y^2 & h_x^2 & 1 & 3\kappa_2 & -2h_xh_y & 2h_y & 2h_y & -2h_x & -2h_x & 2 \\ h_y^2 & h_x^2 & 1 & 3\kappa_3 & -2h_xh_y & 2h_y & -2h_y & -2h_x & 2h_x & -2 \\ h_y^2 & h_x^2 & 1 & 3\kappa_4 & -2h_xh_y & -2h_y & 2h_y & 2h_x & -2h_x & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \kappa_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow h_{ww}=\kappa_6,$$

$$h_{xy}=\frac{1}{\det(C)}\begin{vmatrix} h_x & 0 & 0 & 0 & h_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_y & 0 & 0 & h_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & 0 \\ h_y^2 & h_x^2 & 1 & 1 & 3\kappa_1 & -2h_y & -2h_y & 2h_x & 2h_x & 2 \\ h_y^2 & h_x^2 & 1 & 1 & 3\kappa_2 & 2h_y & 2h_y & -2h_x & -2h_x & 2 \\ h_y^2 & h_x^2 & 1 & 1 & 3\kappa_3 & 2h_y & -2h_y & -2h_x & 2h_x & -2 \\ h_y^2 & h_x^2 & 1 & 1 & 3\kappa_4 & -2h_y & 2h_y & 2h_x & -2h_x & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \kappa_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \kappa_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow h_{xy}=\frac{-\left(3\kappa_1+3\kappa_2+3\kappa_3+3\kappa_4-8\kappa_5\right)h_x h_y}{4},$$

$$h_{xz}=\frac{1}{\det(C)}\begin{vmatrix} h_x & 0 & 0 & 0 & h_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_y & 0 & 0 & h_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & 0 \\ h_y^2 & h_x^2 & 1 & 1 & -2h_x h_y & 3\kappa_1 & -2h_y & 2h_x & 2h_x & 2 \\ h_y^2 & h_x^2 & 1 & 1 & -2h_x h_y & 3\kappa_2 & 2h_y & -2h_x & -2h_x & 2 \\ h_y^2 & h_x^2 & 1 & 1 & -2h_x h_y & 3\kappa_3 & -2h_y & -2h_x & 2h_x & -2 \\ h_y^2 & h_x^2 & 1 & 1 & -2h_x h_y & 3\kappa_4 & 2h_y & 2h_x & -2h_x & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \kappa_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \kappa_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow h_{xz}=\frac{-3\left(\kappa_1-\kappa_2-\kappa_3+\kappa_4\right)h_y}{8},$$

$$h_{xw}=\frac{1}{\det(C)}\begin{vmatrix} h_x & 0 & 0 & 0 & h_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_y & 0 & 0 & h_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & 0 \\ h_y^2 & h_x^2 & 1 & 1 & -2h_x h_y & -2h_y & 3\kappa_1 & 2h_x & 2h_x & 2 \\ h_y^2 & h_x^2 & 1 & 1 & -2h_x h_y & 2h_y & 3\kappa_2 & -2h_x & -2h_x & 2 \\ h_y^2 & h_x^2 & 1 & 1 & -2h_x h_y & 2h_y & 3\kappa_3 & -2h_x & 2h_x & -2 \\ h_y^2 & h_x^2 & 1 & 1 & -2h_x h_y & -2h_y & 3\kappa_4 & 2h_x & -2h_x & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \kappa_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \kappa_6 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow h_{xw} = \frac{-3\left(\kappa_1 - \kappa_2 + \kappa_3 - \kappa_4\right) h_y}{8},$$

$$h_{yz} = \frac{1}{\det\left(C\right)} \begin{vmatrix} h_x & 0 & 0 & 0 & h_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_y & 0 & 0 & h_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & 0 \\ h_y^2 & h_x^2 & 1 & 1 & -2h_x h_y & -2h_y & -2h_y & 3\kappa_1 & 2h_x & 2 \\ h_y^2 & h_x^2 & 1 & 1 & -2h_x h_y & 2h_y & 2h_y & 3\kappa_2 & -2h_x & 2 \\ h_y^2 & h_x^2 & 1 & 1 & -2h_x h_y & 2h_y & -2h_y & 3\kappa_3 & 2h_x & -2 \\ h_y^2 & h_x^2 & 1 & 1 & -2h_x h_y & -2h_y & 2h_y & 3\kappa_4 & -2h_x & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \kappa_6 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow h_{yz} = \frac{3\left(\kappa_1 - \kappa_2 - \kappa_3 + \kappa_4\right) h_x}{8},$$

$$h_{yw} = \frac{1}{\det\left(C\right)} \begin{vmatrix} h_x & 0 & 0 & 0 & h_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_y & 0 & 0 & h_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & 0 \\ h_y^2 & h_x^2 & 1 & 1 & -2h_x h_y & -2h_y & -2h_y & 2h_x & 3\kappa_1 & 2 \\ h_y^2 & h_x^2 & 1 & 1 & -2h_x h_y & 2h_y & 2h_y & -2h_x & 3\kappa_2 & 2 \\ h_y^2 & h_x^2 & 1 & 1 & -2h_x h_y & 2h_y & -2h_y & -2h_x & 3\kappa_3 & -2 \\ h_y^2 & h_x^2 & 1 & 1 & -2h_x h_y & -2h_y & 2h_y & 2h_x & 3\kappa_4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa_6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow h_{yw} = \frac{3\left(\kappa_1 - \kappa_2 + \kappa_3 - \kappa_4\right) h_x}{8},$$

$$h_{zw}=\frac{1}{\det(C)}\begin{vmatrix} h_x & 0 & 0 & 0 & h_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_y & 0 & 0 & h_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_x & 0 & h_y & 0 \\ h_y^2 & h_x^2 & 1 & 1 & -2h_xh_y & -2h_y & -2h_y & 2h_x & 2h_x & 3\kappa_1 \\ h_y^2 & h_x^2 & 1 & 1 & -2h_xh_y & 2h_y & 2h_y & -2h_x & -2h_x & 3\kappa_2 \\ h_y^2 & h_x^2 & 1 & 1 & -2h_xh_y & 2h_y & -2h_y & -2h_x & 2h_x & 3\kappa_3 \\ h_y^2 & h_x^2 & 1 & 1 & -2h_xh_y & -2h_y & 2h_y & 2h_x & -2h_x & 3\kappa_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa_6 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow h_{zw}=\frac{3\left(\kappa_1+\kappa_2-\kappa_3-\kappa_4\right)}{8}$$

elde edilir.

Böylece Hesse matrisinin elemanlarının normal eğrilikler ve ∇h gradient vektörünün bileşenleri cinsinden ifadeleri elde edilmiş olur.

Aynı şekilde $h_y=h_w=0$, $h_x=h_w=0$, $h_y=h_z=0$, $h_x=h_z=0$, $h_x=h_y=0$ durumları için de benzer sonuçlar elde edilebilir.

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, $4-$boyutlu Öklid uzayında normal formu ile verilen hiperyüzeylerin normal eğriliklerinin hiperyüzeyin normal form fonksiyonunun Hesse matrisi ve hiperyüzeyin teğet vektörü yardımıyla yazılabildiği gösterilmiştir. Ayrıca, $4-$boyutlu Öklid uzayındaki bir hiperyüzeyin normal form fonksiyonunun Hesse matrisinin sıfırdan farklı özdeğerlerinin, hiperyüzeyin asli eğriliklerine karşılık geldiği elde edilmiştir. Hiperyüzeyin h normal form fonksiyonunun Hesse matrisinin elemanlarının ∇h birim normal vektörünün bileşenleri yardımıyla ifade edilebileceği gösterilerek, hiperyüzeyin Gauss ve ortalama eğrilikleri normal form fonksiyonunun kısmi türevleri cinsinden hesap edilmiştir.

$4-$boyutlu Öklid uzayında normal formu ile verilen üç hiperyüzeyin arakesit eğrisinin diferensiyel geometrik özellikleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] Hartmann, E., (1998b). “The Normal Form of a Planar Curve and Its Application to Curve Design”, Mathematical Methods for Curves and Surfaces II, Daehlen, M., Lyche, T., Schumaker, L., eds., Vanderbilt University Press, Nashville, 237-244.

[2] Hartmann, E., (1999). “On the Curvatures of Curves and Surfaces Defined by Normalforms”, Computer Aided Geometric Design, 16:355-376.

[3] Hartmann, E., (2000). “Numerical parameterization of curves and surfaces”, Computer Aided Geometric Design, 17:251-266.

[4] Courant, R, and Hilbert, D., (1962). Methods of Mathematical Physics II, Interscience Publishers, J. Wiley, New York.

[5] Weise, H., (1988). Differentialgleichungen, Vandenhoek & Ruprecht, Göttingen.

[6] Gilbarg, D. ve Trudinger, N.C., (1983). Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer, Berlin.

[7] O’Neill, B., (1966)., Elementary Differential Geometry, Academic Press, New York.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Yusuf DURAN

Doğum Tarihi ve Yeri : 20.09.1988 İstanbul (Fatih)

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : ysufdran@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Lisans	Matematik	Fatih Üniversitesi	2012
Lise	Matematik Fen	Pertevniyal Lisesi	2007

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	**Firma/Kurum**	**Görevi**
2013 - Devam ediyor	Yıldız Teknik Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2012 -2013	Trakya Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

YAYINLARI

Bildiri

1- **Duran, Y**., ve Düldül, M., (2015). "E^4'te Normal Form ile Verilmiş Hiperyüzeyler Üzerine", 13. Geometri Sempozyumu, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul, 54.