Ön Bilgiler:

Tanım: $f(x+T) = f(x)$ şeklindeki fonksiyona periyodik fonksiyon denir. Aşağıdaki özellikler vardır.

i) $\int_{a-T/2}^{a+T/2} f(x)dx = \int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx$ ii) $\int_{T}^{T+t} f(x)\cdot dx = \int_{0}^{t} f(x)dx$

Dirichlet Koşulları: $f(x)$, $(-\pi,\pi)$ aralığında tanımlı 2π periyotlu bir fonksiyon olmak üzere

i) $f(x)$ tanım aralığında sürekli veya parçalı süreklidir.

ii) $f(x)$ fonksiyonunun tanım aralığında sonlu sayıda maksimum ve minimum noktası vardır. (Bu iki şart ile beraber $f(x)$ parçalı düzgün sürekli)

iii) $f(x)$ fonksiyonu periyot aralığında mutlak integre edilebilirdir. Yani $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx < \infty$ dir.

Dirichlet Teoremi: Yukarıdaki şartları sağlayan $f(x)$ fonksiyonu

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n\cos nx + b_n \sin nx]$ şeklinde trigonometrik bir seriye açılabilir.

Tanım: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\cos nx + b_n \sin nx)$ şeklindeki seriye Fourier serisi denir.

Serinin Değeri:

i) Fonksiyonun sürekli olduğu bütün noktalarda $f(x)$ değerine eşittir.

ii) Süreksizlik noktalarında

$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ değerine eşittir.

iii) Aralığın uç noktalarında $\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$ şeklinde hesaplanır.

Ortogonal ve Ortonormal Fonksiyonlar: $\{\varphi_n(t)\}$ fonksiyon dizisinin herhangi iki fonksiyonu (a,b) aralığında

$$\int_a^b \varphi_n(t)\cdot\overline{\varphi_m(t)}\,dt = \begin{cases} 0, & m\neq n \\ \neq 0, & m=n \end{cases}$$ eşitliğini sağlarsa ortogonaldir denir.

Tanım: Norm $\|\varphi\| = \int_a^b [\varphi_n(t)]^2 dt$ olmak üzere normu 1 olan diziye ortonormal dizi denir.

Euler-Fourier Formülleri: Bir ortogonal $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisini gözönüne alalım. $f(t)=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\dots+c_n\varphi_n(t)+\dots$ olsun. Aynı zamanda $f(t)$ (a,b) aralığında mutlak integre edilebilir olsun. Bu serideki c_n katsayılarını hesaplamak için $f(t)$ yi $\varphi_n(t)$ ile çarpalım ve (a,b) aralığında integre edelim

$$\int_a^b f(t)\varphi_n(t)dt = \int_a^b [c_1\varphi_1\varphi_n + c_2\varphi_2\varphi_n+\dots+c_n\varphi_n\varphi_n+\dots].dt$$

$$=\int_a^b c_n\varphi_n^2 dt \Rightarrow c_n = \frac{1}{\lambda}\int_a^b f(t).\varphi_n(t).dt \text{ olur.}$$

$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cdot\cos nt + b_n \sin nt]$ için $T=2\pi$

$a_0=\frac{1}{\pi}.\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$, $a_n=\frac{1}{\pi}.\int_{-\pi}^{\pi} f(t).\cos nt\,dt$, $b_n=\frac{1}{\pi}.\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt$ olarak bulunur.

Teorem: $\int_{-a}^{a} f(t).dt$ integralini gözönüne alalım.

$f(t)$ çift ise, $f(-t)=f(t)$ $\Big\}$ $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2.\int_0^a f(t)dt$

$f(t)$ tek ise, $f(-t)=-f(t)$ $\Big\}$ $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$ dır.

Fourier Serisinin Kompleks Şekli:

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos n\frac{\pi}{\ell}t + b_n\sin n\frac{\pi}{\ell}t\right] \quad \left\{ \cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}, \ \sin t=\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right.$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\left(\frac{e^{in\frac{\pi}{\ell}t}+e^{-in\frac{\pi}{\ell}t}}{2}\right)+b_n.\left(\frac{e^{in\frac{\pi}{\ell}t}-e^{-in\frac{\pi}{\ell}t}}{2i}\right)\right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty}\Big[\frac{(a_n+ib_n)}{2} e^{-in\frac{\pi}{\ell}t} + \frac{(a_n-b_n)}{2} e^{in\frac{\pi}{\ell}t}\Big]$$

$$\underset{c_0}{\downarrow} \qquad \underset{c_{-n}}{\downarrow} \qquad \underset{c_n}{\downarrow}$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\big[c_n e^{in\frac{\pi}{\ell}t} + c_{-n} e^{-in\frac{\pi}{\ell}t}\big]$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{\ell}t} + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{in\frac{\pi}{\ell}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{\ell}t}$$ O halde

$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{\ell}t}$ olup $2\ell = T$ ve $w = \frac{\pi}{\ell}$ dir. Aynı zamanda

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\,dt \ , \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2\ell}\cdot\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\cdot e^{-inwt}\,dt \quad n = \mp 1, \mp 2, \ldots$$

Fourier Integrali:

Fourier serileri, Dirichlet koşullarını sağlayan periyodik fonksiyonların incelenmesinde kullanılır. Birçok hallerde, periyot sonsuz olabilir. Periyodik bir fonksiyonun periyodu sonsuza götürüldüğünde, elde edilecek serinin bir limiti mevcut olursa, periyodik olmayan fonksiyonların bir gösterimi elde edilir. Fourier serisinin, bu durumda alacağı şekle Fourier integrali denir.

$2T$ periyotlu, her sonlu aralıkta Dirichlet koşullarını sağlayan ve $(-\infty, \infty)$ aralığında mutlak integre edilebilen $f(x)$ fonksiyonunun kompleks Fourier serisi

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{T}x} \quad \text{ve} \quad c_n = \frac{1}{2T}\cdot\int_{-T}^{T} f(x)\cdot e^{-i\frac{n\pi}{T}x}\,dx \quad (1)$$ dir. $\frac{\pi}{T} = w$

olarak alınırsa

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inwx} \qquad c_n = \frac{1}{2T}\cdot\int_{-T}^{T} f(x)\cdot e^{-inwx}\cdot dx$$ olur. Komplek Fourier

katsayıları seride yerine yazılırsa

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\cdot e^{-inwx}\cdot dx\Big]\cdot e^{inwx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big[\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-T}^{T} f(x)\cdot e^{-inwx}\cdot dx\Big] e^{inwx}\cdot\frac{\pi}{T}$$

α_n değerleri arasındaki uzaklık sabit $w = \frac{\pi}{T}$ ye eşittir. $T \to \infty$ olduğunda bu değer sıfıra yaklaşacaktır. Limitte bunun sıfır değil, sıfıra çok yakın diferensiyel bir büyüklük olduğunu kabul ederek, bu farkı $w=\frac{\pi}{T}=\Delta w$ ile gösterirsek

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-T}^{T} f(x)\cdot e^{-in\Delta w x}\,dx\right]\cdot e^{in\Delta w x}\cdot\Delta w$$

yazabiliriz. Bu toplamın içi

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-T}^{T} f(x)\cdot e^{-in\Delta w x}\cdot dx=h(n\Delta w)$$

şeklinde $n\Delta w$ nın bir fonksiyonudur. Buna göre

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n\Delta w)\cdot e^{in\Delta w x}\cdot\Delta w$$

şeklinde olacaktır. $n\to\infty$ olduğunda $n\Delta w$ yani nw'ya karşı gelen tek tek değerler yerine limitte $n\Delta w\to w$ alınabilir. O halde belirli integralin tanımına göre $T\to\infty$ olduğunda

$$f(x)=\lim_{\Delta w\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(w)\cdot e^{iwx}\cdot\Delta w=\int_{-\infty}^{\infty} h(w)\cdot e^{iwx}\cdot dw\ .$$

$$h(w)=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot e^{-iwx}\cdot dx$$

olacağından

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot e^{-iwx}\cdot dx\right]\cdot e^{iwx}\cdot dw$$

elde edilir. İçteki integralde $x=u$ alırsak

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cdot e^{-iwu}\cdot du\right]\cdot e^{iwx}\cdot dw \quad (2)$$

olur. Böylece 2π periyotlu $f(x)$ fonksiyonunun periyodu sonsuza gittiğinde (2) integrali elde edilir. Bu integrale $f(x)$ fonksiyonunun Fourier integrali denir.

Fourier Dönüşümü:

$$h(x)=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(u)\cdot e^{-iwu}\cdot du\right]\cdot e^{iwx}\cdot dw$$

Fourier integralinde içteki integrale $H(w)$ dersek

$$H(w)=\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\cdot e^{-iwx}\cdot dx \quad (3)$$

olur. Bu durumda

$$h(x)=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} H(w)\cdot e^{iwx}\,dw \quad (4)$$

olarak yazılır. (3) integraline $h(x)$ fonksiyonunun

Fourier dönüşümü, $h(x)$'e de $H(w)$ nın invers Fourier dönüşümü denir.
Bu dönüşümler sembolle

$H(w)=F[h(x)]$ ve $h(x)=F^{-1}[H(w)]$ şeklinde gösterilir.

Fourier Dönüşümünün Özellikleri:

i) Lineerlik Özelliği: $F[h_1(x)]=H_1(w)$ ve $F[h_2(x)]=H_2(w)$ ise c_1 ve c_2 keyfi sabitler olarak

$$F[c_1h_1(x)+c_2h_2(x)]=c_1H_1(w)+c_2H_2(w)$$ dir.

İspat:

$$F[c_1h_1(x)+c_2h_2(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}[c_1h_1(x)+c_2h_2(x)].e^{-iwx}dx$$

$$=c_1\int_{-\infty}^{\infty}h_1(x).e^{-iwx}.dx+c_2\int_{-\infty}^{\infty}h_2(x)e^{-iwx}.dx=c_1H_1(w)+c_2H_2(w)$$ dur.

ii) Simetri Özelliği: $F[h(x)]=H(w)$ ise h ve H fonksiyonlarının yerleri değiştirildiğinde $F[H(x)]=2\pi h(-w)$ olur.

İspat: $h(x)=\frac{1}{2\pi}.\int_{-\infty}^{\infty}H(w).e^{iwx}.dw$ invers transformasyonunda, w ile x yer değiştirilirse

$$h(w)=\frac{1}{2\pi}.\int_{-\infty}^{\infty}H(x).e^{+iwx}.dx$$ olup $w\to -w$ yazılırsa

$$h(-w)=\frac{1}{2\pi}.\int_{-\infty}^{\infty}H(x)e^{-iwx}dx=\frac{1}{2\pi}.F[H(x)]\Rightarrow F[H(x)]=2\pi h(-w)$$ olur.

iii) Değişme Özelliği (x'e göre): $k\neq 0$ reel bir sayı olmak üzere

$$F[h(kx)]=\frac{1}{|k|}H\left(\frac{w}{k}\right)$$ dır.

İspat:

$F[h(kx)]=\int_{-\infty}^{\infty}h(kx)e^{-iwx}dx$ integralinde $kx=u$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$\left.\begin{aligned}k>0 \text{ ise } &=\frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty}h(u).e^{-i\left(\frac{w}{k}u\right)}du=\frac{1}{k}.H\left(\frac{w}{k}\right)\\ k<0 \text{ ise } &=-\frac{1}{k}.\int_{-\infty}^{\infty}h(u).e^{-i\frac{w}{k}u}.du=-\frac{1}{k}H\left(\frac{w}{k}\right)\end{aligned}\right\}\Rightarrow F[h(kx)]=\frac{1}{|k|}H\left(\frac{w}{k}\right)$$ olur.

iv) Değişme Özelliği (w'ya göre): $k \neq 0$ reel bir sayı olmak üzere

$$F^{-1}[H(kw)] = \frac{1}{|k|} \cdot h\left(\frac{x}{k}\right) \text{ dır.}$$

İspat:

$F^{-1}[H(kw)] = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} H(kw) e^{iwx} \cdot dw$ invers fourier dönüşümünde $kw = u$ değişken dönüştürmesi yapılırsa

$$\left.\begin{aligned} k>0 \text{ ise } &= \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} H(u) \cdot e^{i\frac{x}{k}u} du = \frac{1}{k} \cdot h\left(\frac{x}{k}\right) \\ k<0 \text{ ise } &= -\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} H(u) \cdot e^{i\frac{x}{k}u} du = -\frac{1}{k} h\left(\frac{x}{k}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow F^{-1}[H(kw)] = \frac{1}{|k|} \cdot h\left(\frac{x}{k}\right)$$

v) Öteleme Özelliği (x'e göre): $F[h(x)] = H(w)$ ise

$$F[h(x-x_0)] = e^{-iwx_0} \cdot H(w) \text{ dır.}$$

İspat:

$F[h(x-x_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x-x_0) e^{-iwx} \cdot dx$ integralinde $x - x_0 = u$ değişken dönüştürmesi yapılırsa

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(u) \cdot e^{-iw(u+x_0)} du = e^{-iwx_0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(u) \cdot e^{-iwu} \cdot du = e^{-iwx_0} \cdot H(w) \text{ olur.}$$

vi) Öteleme Özelliği (w'ya göre): $F^{-1}[H(w)] = h(x)$ ise

$$F^{-1}[H(w)] = h(x) \Rightarrow F^{-1}[H(w-w_0)] = e^{iw_0x} h(x) \text{ dir.}$$

İspat:

$F^{-1}[H(w-w_0)] = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} H(w-w_0) e^{iwx} dw$ ters fourier dönüşümünde $w - w_0 = u$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} H(u) \cdot e^{i(u+w_0)x} \cdot du = e^{iw_0x} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} H(u) \cdot e^{iux} \cdot du = e^{iw_0x} \cdot h(x).$$

elde edilir.