MÜHENDİSLİK SİSTEMLERİNİN MODELLENMESİ VE SİMÜLASYONU

1

Mustafa Kemal SEVİNDİR, Ph.D

sevindir@yildiz.edu.tr

23.12.2018

Sayısal Simülasyon

Birinci Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemler için Euler Yöntemi

Euler yönteminin temeli, ilk türevin tanımıdır:

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{t=t_0} = f'(t_0) = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$$

Bu tanım Δt sıfıra yaklaştığında limiti kesindir ve f fonksiyonunun $t=t_0$ da birinci türevini sağlar. Eğer limit almadan küçük bir Δt değeri kullanılırsa, türev için bir yaklaşım elde edilir ve küçük ve daha küçük Δt kullanıldığında yaklaşım daha iyi olur.

Fonksiyonun türevini ve fonksiyonun değerini $t = t_0$ da bildiğimizi ve fonksiyonun değerini $t_1 = t_0 + \Delta t$ da tahmin etmek istediğimizi varsayalım.

$$f(t_1) \approx f(t_0) + \Delta t \cdot f'(t_0)$$

$f(t_1)$'yi belirledikten sonra, fonksiyonun değerini $t_2 = t_1 + \Delta t$, $t_3 = t_2 + \Delta t$ ve benzeri değerlerde tahmin ettiğimiz aşamalı bir prosedür kullanmayı hayal edebiliriz:

$$f(t_2) \approx f(t_1) + \Delta t \cdot f'(t_1)$$
$$f(t_3) \approx f(t_2) + \Delta t \cdot f'(t_2)$$

Örnek

$T_0 = 200°C$, $T_f = 25°C$, ve $\alpha = 0.1\ s^{-1}$ değerleri için

$\frac{dT}{dt} = -\alpha(T - T_f)$ denklemini sayısal olarak çözün.

$\Delta t = 0,1$ saniyelik zaman adımı kullanın ve 0,3 sn'deki T'yi bulun.

Bu denklemin analitik çözümü

$T = T_f + (T_0 - T_f)\exp(-\alpha t)$ dir

başlangıç koşulları $T(0) = T_0$

Diferansiyel denklem

$T' = -0{,}1(T - 25) \quad T(0) = 200°C$

Birinci adım: $t_0=0$, $t_1= t_0+\Delta t = 0 + 0{,}1 = 0{,}1$, $T(t_0) = 200°C$

$t = t_0$ da;

$$T'(t_0) = -0{,}1[T(t_0) - 25] = -0{,}1(200 - 25) = -17{,}5$$

Euler formülünü kullanarak,

$$T(t_1) = T(t_0) + \Delta t \cdot T'(t_0) = 200 + 0{,}1(-17{,}5) = 198{,}25°C$$

İkinci adım: $t_1=0,1$, $t_2=t_1+\Delta t = 0,1 + 0,1 = 0,2$,

$T(t_1) = 198,25°C$

$t = t_1$ de;

$$T'(t_1) = -0,1[T(t_1) - 25] = -0,1(198,25 - 25) = -17,33$$

Euler formülünü kullanarak,

$$T(t_2) = T(t_1) + \Delta t \cdot T'(t_1) = 198,25 + 0,1(-17,33) = 196,52°C$$

Üçüncü adım: t_2=0,2, t_3=t_2+Δt = 0,2 + 0,1 = 0,3,

$T(t_2)$ = 196,52°C

t = t_2 de;

$$T'(t_2) = -0{,}1[T(t_2) - 25] = -0{,}1(196{,}52 - 25) = -17{,}15$$

Euler formülünü kullanarak,

$$T(t_3) = T(t_2) + \Delta t \cdot T'(t_2) = 196{,}52 + 0{,}1(-17{,}15) = 194{,}81℃$$

Örnek

0,1 s'lik bir zaman adımı kullanarak, aşağıdaki diferansiyel denklemi 0,3 s’deki y değeri için çözün:

$y'' - 2y' + y = 0 \qquad y'(0) = 4 \qquad y(0) = -3$

Bu durumda yapacağımız şey, y’nin birinci türevine eşit yeni bir x fonksiyonu tanımlamaktır:

$x = y'$

Bu durumda $y'' = x'$

$x' - 2x + y = 0$

$y' = x \qquad y(0) = -3$

$x' = 2x - y \qquad x(0) = 4$

x(0) = y′(0)’ı x’in tanımından faydalanarak elde ettiğimizi unutmayın.

$$y(t_1) \approx y(t_0) + \Delta t \cdot y'(t_0)$$
$$x(t_1) \approx x(t_0) + \Delta t \cdot x'(t_0)$$

Birinci adım:

$t_0 = 0$ $\Delta t = 0,1$ $t_1 = t_0 + \Delta t = 0 + 0,1 = 0,1$

$x(t_0) = 4$ $y(t_0) = –3$

$$y'(t_0) = x(t_0) = 4$$
$$x'(t_0) = 2x(t_0) - y(t_0) = 2 \cdot 4 - (-3) = 11$$

Euler formülünü kullanarak,

$$y(t_1) = y(t_0) + \Delta t \cdot y'(t_0) = -3 + 0,1(4) = -2,6$$
$$x(t_1) = x(t_0) + \Delta t \cdot x'(t_0) = 4 + 0,1(11) = 5,1$$

İkinci adım:

t_1 = 0,1 Δt = 0,1 $t_2 = t_1 + \Delta t$ = 0,1+0,1 = 0,2 $x(t_1)$ = 5,1 $y(t_1)$ = –26

$$y'(t_1) = x(t_1) = 5{,}1$$
$$x'(t_1) = 2x(t_1) - y(t_1) = 2 \cdot 5{,}1 - (-2{,}6) = 12{,}8$$

Euler formülünü kullanarak,

$$y(t_2) = y(t_1) + \Delta t \cdot y'(t_1) = -2{,}6 + 0{,}1(5{,}1) = -2{,}09$$
$$x(t_2) = x(t_1) + \Delta t \cdot x'(t_1) = 5{,}1 + 0{,}1(12{,}8) = 6{,}38$$

Üçüncü adım:

$t_2 = 0{,}2$ $\Delta t = 0{,}1$ $t_3 = t_2 + \Delta t = 0{,}2+0{,}1 = 0{,}3$ $x(t_2) = 6{,}38$ $y(t_2) = -2{,}09$

$$y'(t_2) = x(t_2) = 6{,}38$$
$$x'(t_2) = 2x(t_2) - y(t_2) = 2 \cdot 6{,}38 - (-2{,}09) = 14{,}85$$

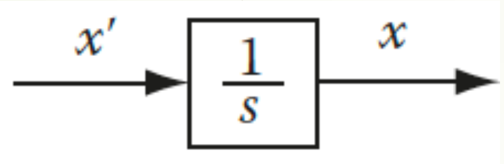
Euler formülünü kullanarak,

$$y(t_3) = y(t_2) + \Delta t \cdot y'(t_2) = -2{,}09 + 0{,}1(6{,}38) = -1{,}452$$
$$x(t_3) = x(t_2) + \Delta t \cdot x'(t_2) = 6{,}38 + 0{,}1(14{,}85) = 7{,}865$$

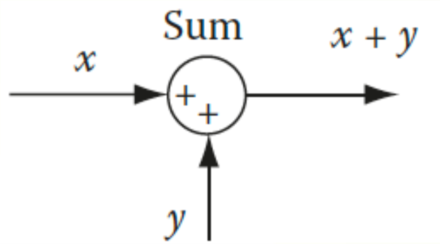
Sayısal Simülasyon

Diferansiyel Denklemlerin Blok Diyagramlarla Gösterimi

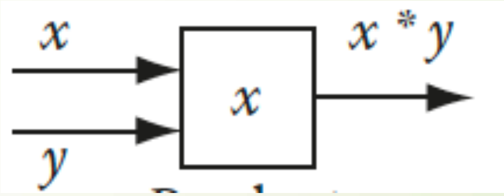
İntegral bloğu



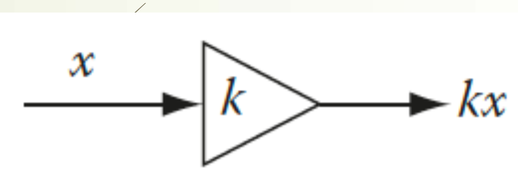
Toplama bloğu



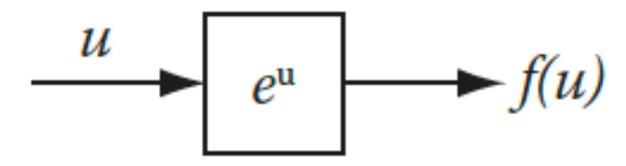
Çarpma bloğu



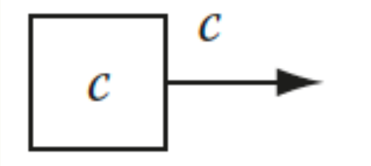
Kazanç bloğu



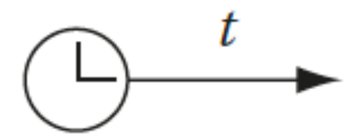
Fonksiyon bloğu



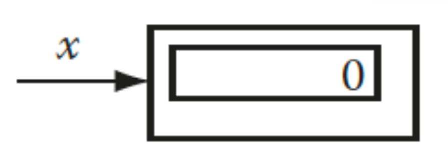
Sabit bloğu



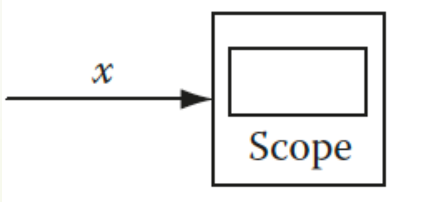
Saat bloğu



Ekran bloğu



Scope bloğu



Blok Diyagram Oluşturma Yönergeleri

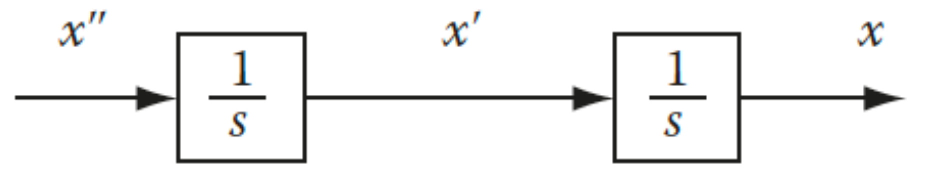
Örnek 1:

$4x'' + 2x' + 3x = 0$ diferansiyel denklemi için blok şeması oluşturun.

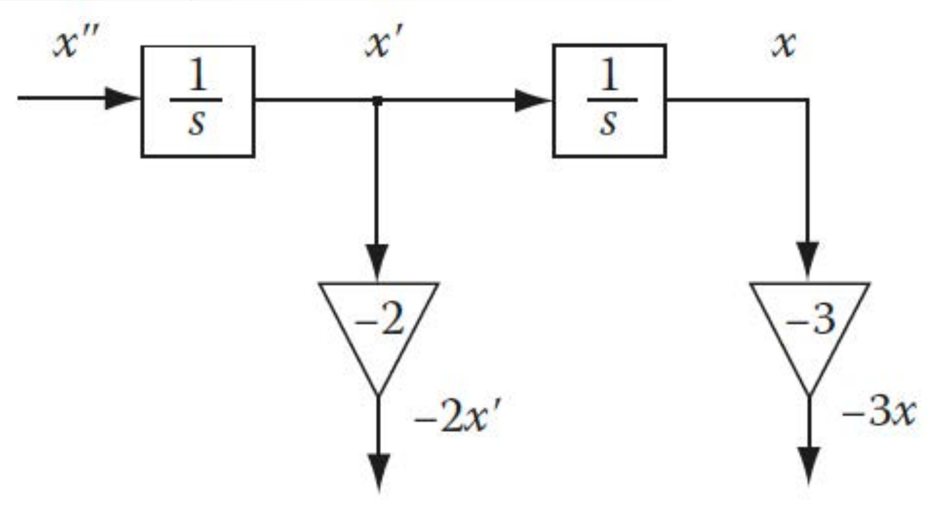
a) Diferansiyel denklemi en yüksek mertebeli türev sol tarafta olacak ve diğer her şey sağ tarafta olacak şekilde yeniden düzenleyin.

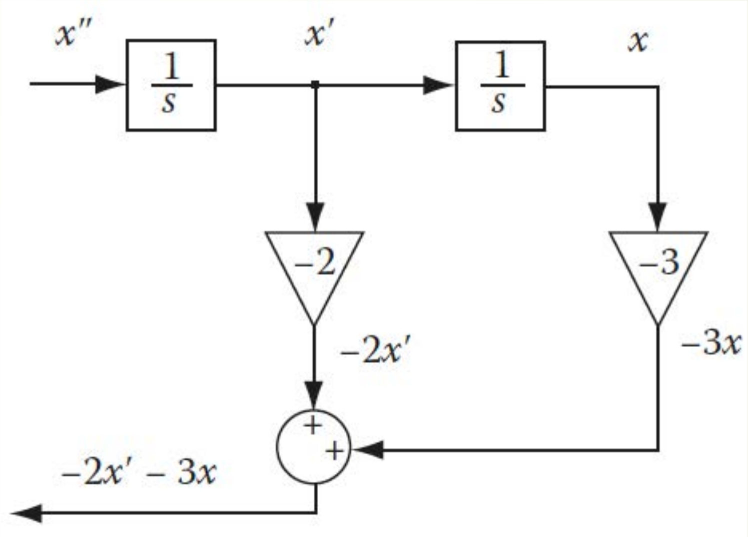
$$x'' = \frac{-2x' - 3x}{4}$$

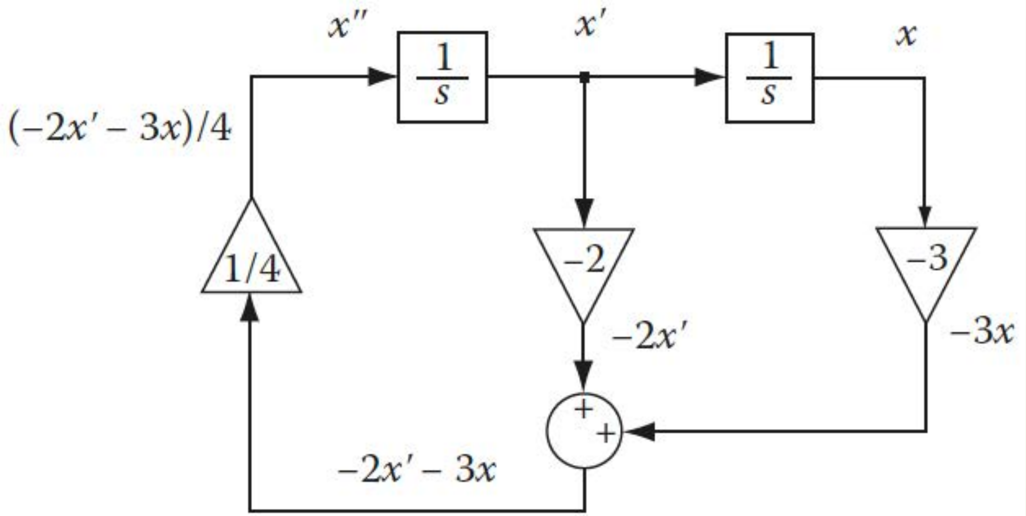
b) Gerektiği kadar integral bloğu yazın. Bu diferansiyel denklemin mertebesine eşittir.



c) Yeniden düzenlenmiş diferansiyel denklemin sağ tarafını oluşturun ve ilk integrale besleyin.



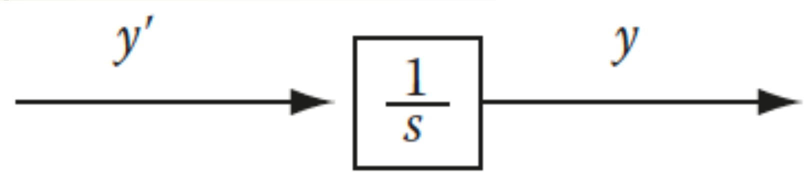


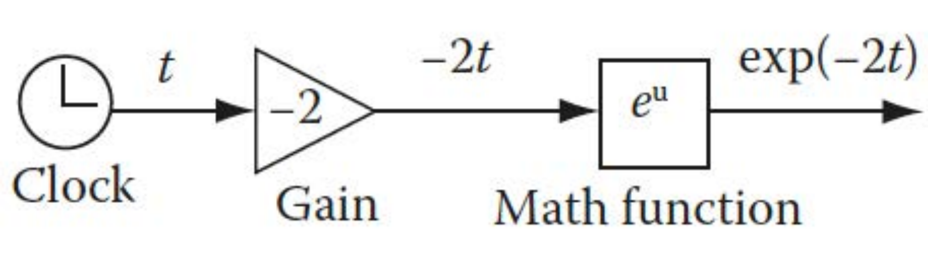


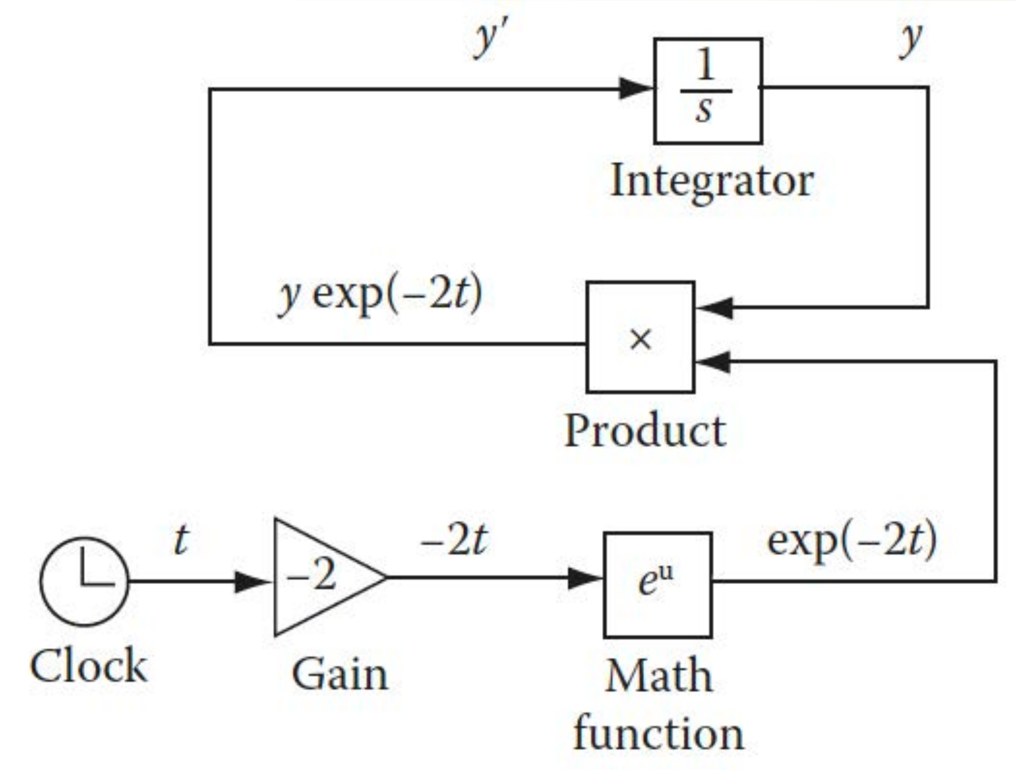
Örnek 2:

$y' - e^{-2t}y = 0$ diferansiyel denklemi için blok şeması oluşturun.

$$y' = e^{-2t}y$$







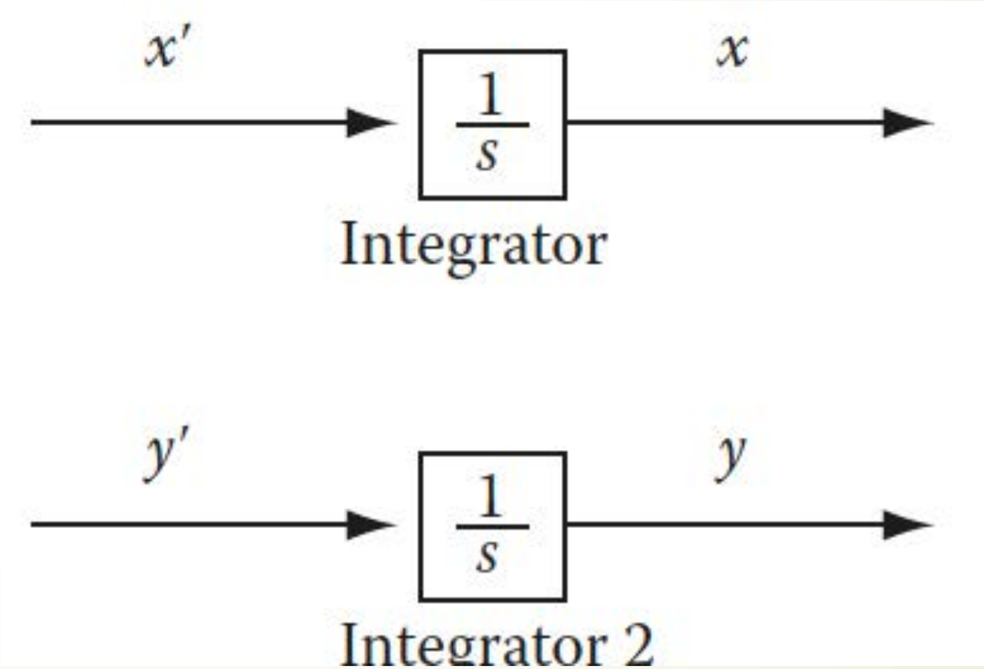
Örnek 3:

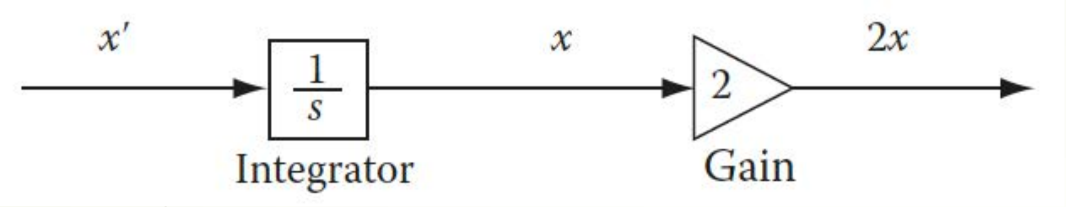
$$x'(t) + x(t) = 3y(t)$$
$$y'(t) - y(t) = 2x(t)$$

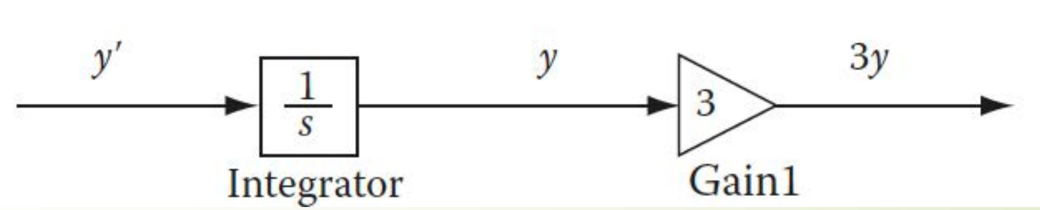
diferansiyel denklemleri için blok şeması oluşturun.

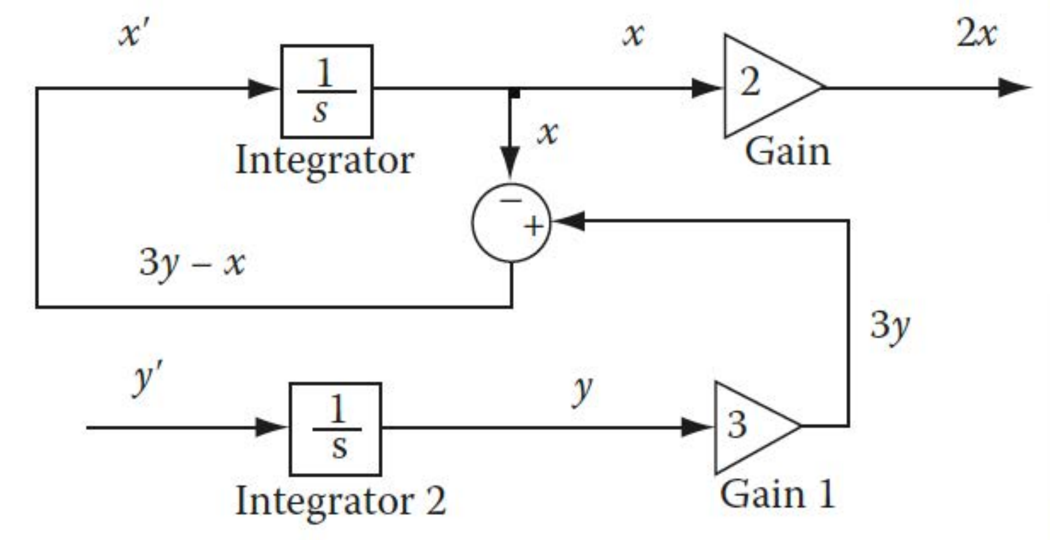
$$x'(t) = 3y(t) - x(t)$$

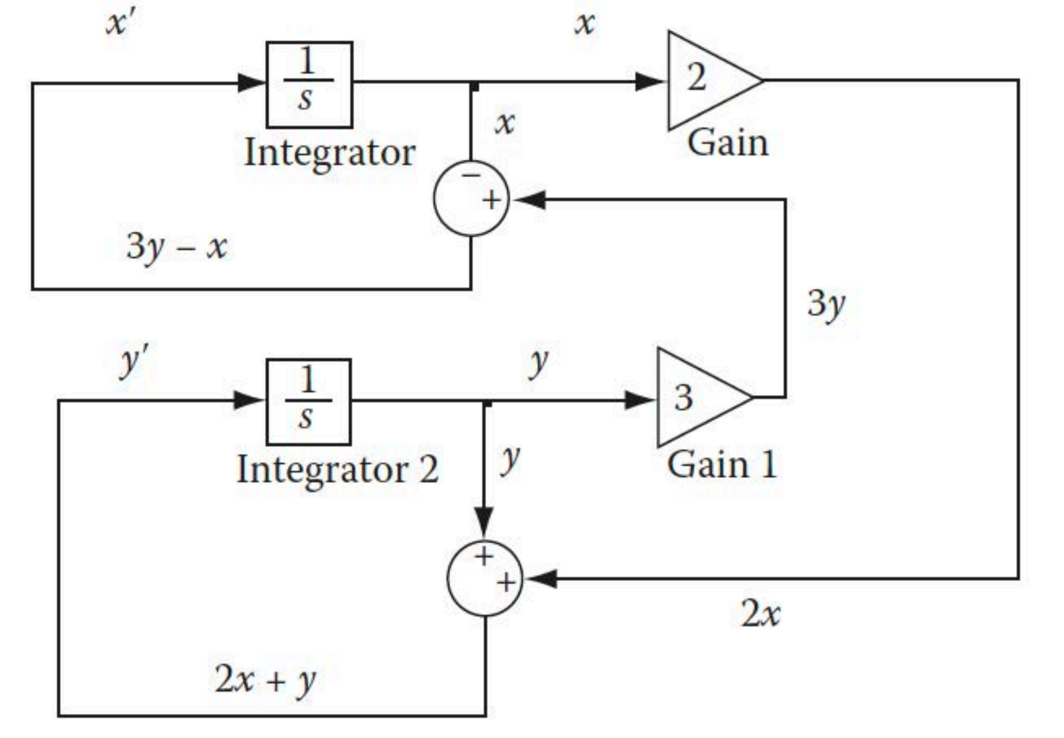
$$y'(t) = 2x(t) - y(t)$$




x′
1/s
Integrator
x
2
Gain
2x


y′
1/s
Integrator
y
3
Gain1
3y

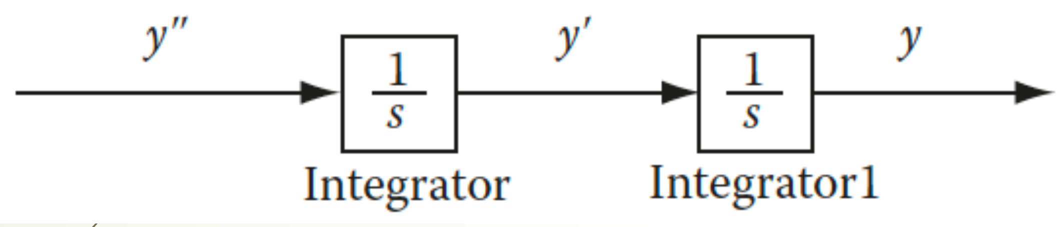

x′
1/s
Integrator
x
x
2
Gain
2x
−
+
3y − x
3y
y′
1/s
Integrator 2
y
3
Gain 1

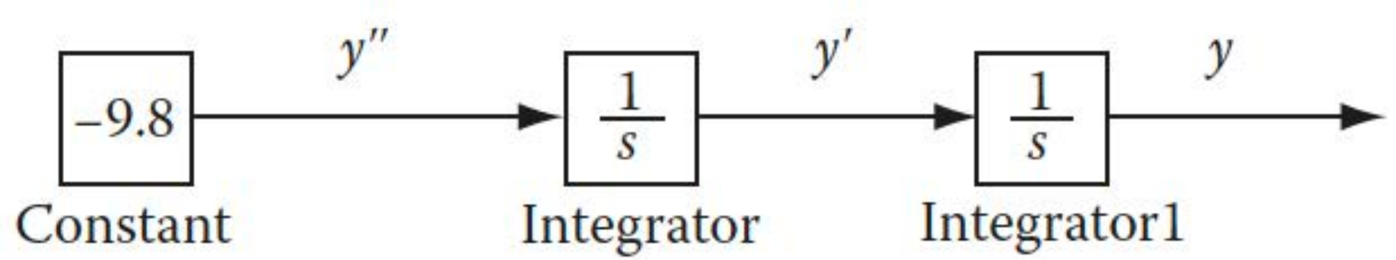

x′
1/s
Integrator
x
x
2
Gain
−
+
3y − x
3y
y′
1/s
Integrator 2
y
y
3
Gain 1
+
+
2x
2x + y

Örnek 4:

$y''(t) = -9{,}8$

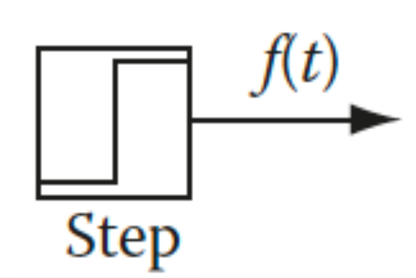
diferansiyel denklemi için blok şeması oluşturun.

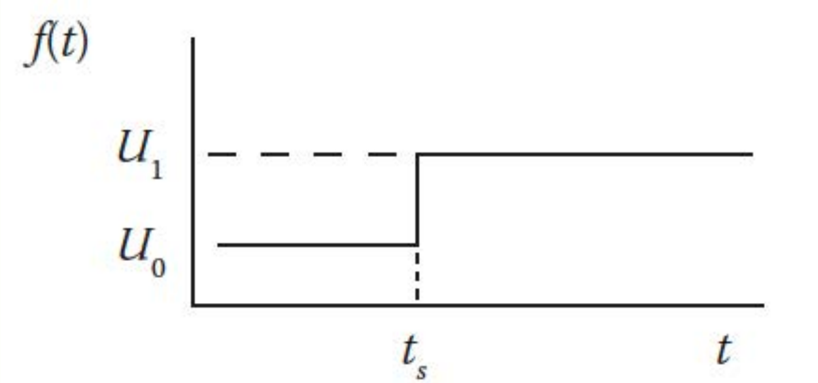




Bazı Ek Kaynak Blokları:

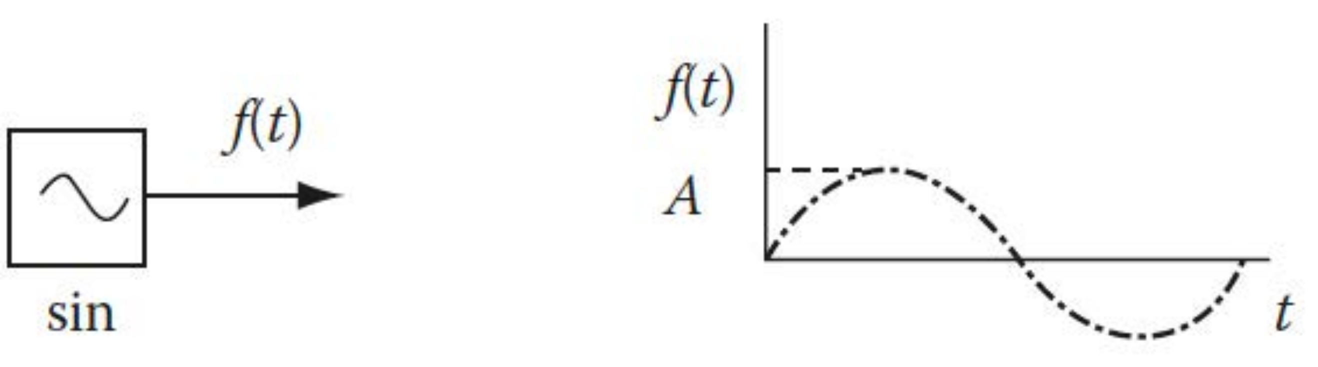
- **Adım Bloğu**



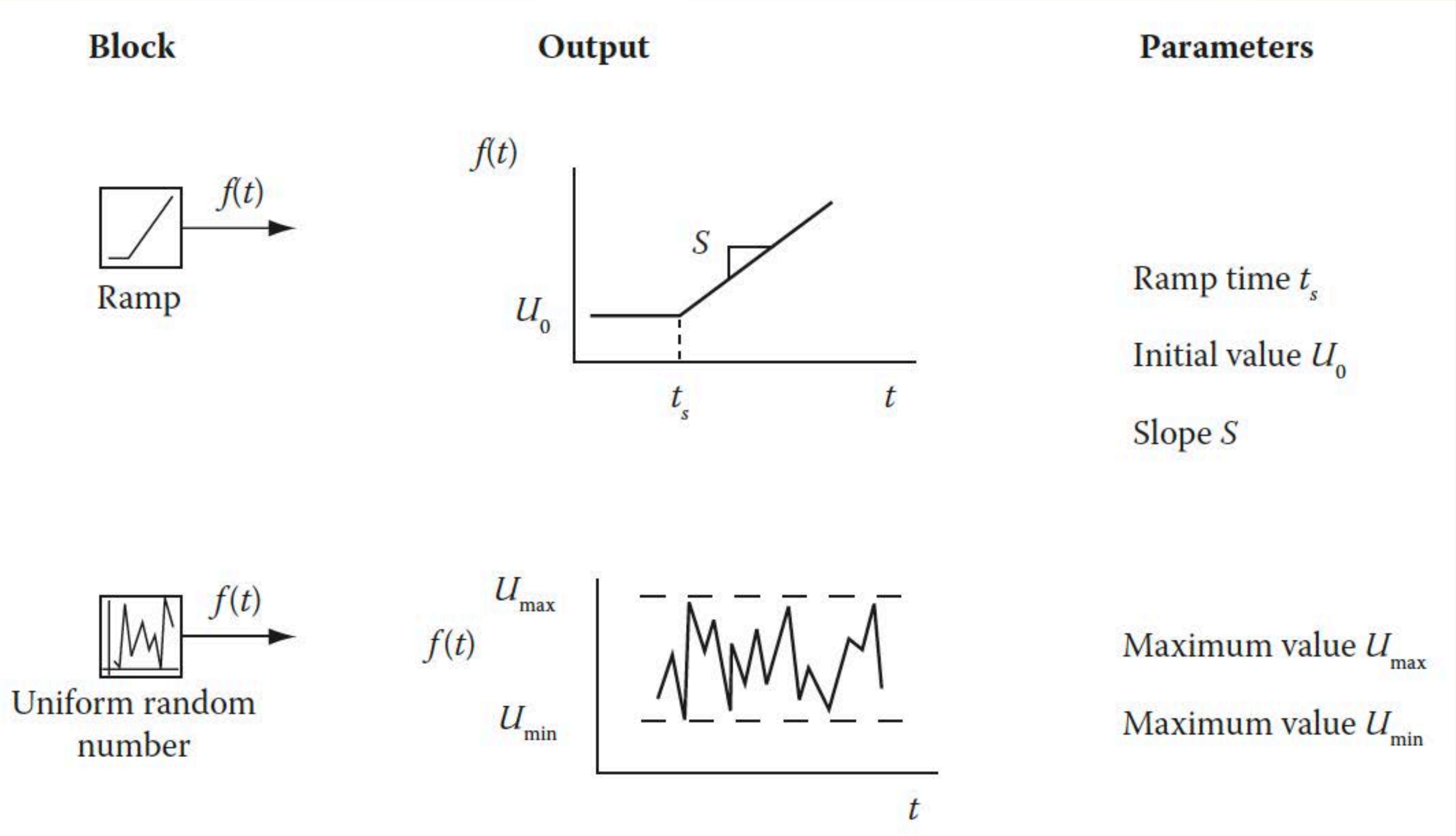


Adım bloğu, herhangi bir t_s zamanında U_0 başlangıç değerinden U_1 son değerine değişen bir zorlayıcı fonksiyon oluşturmamıza imkan sağlar. Adım zorlayıcı fonksiyonları bir sistemin dinamik tepkisini test etmek için mühendisler tarafından yaygın olarak kullanılır. U_0, U_1 ve t_s değerleri bloğa çift tıklanarak ve değerleri gelen forma yazılarak belirtilir.

- **Sinüs Dalgası**



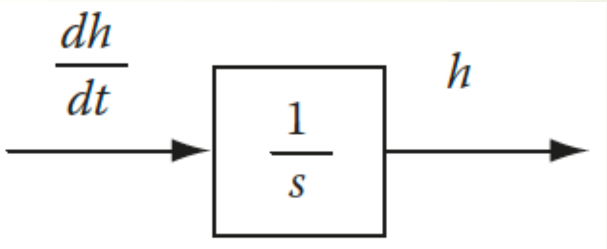
Sinüs dalgasının A genliği ve frekansı bloğu çift tıklayıp değerleri forma yazarak belirlenir. Sinüs dalgasını değiştirmek isterseniz, bunu formun faz kutusuna bir değer yazarak yapabilirsiniz. Örneğin, bu kutuya 1,5708 yazarak sinüs dalgasını kosinüs dalgası haline getirebilirsiniz. Bu π/2'dir ve sinüs dalgasını 90° döndürerek kosinüs fonksiyonu yapar.

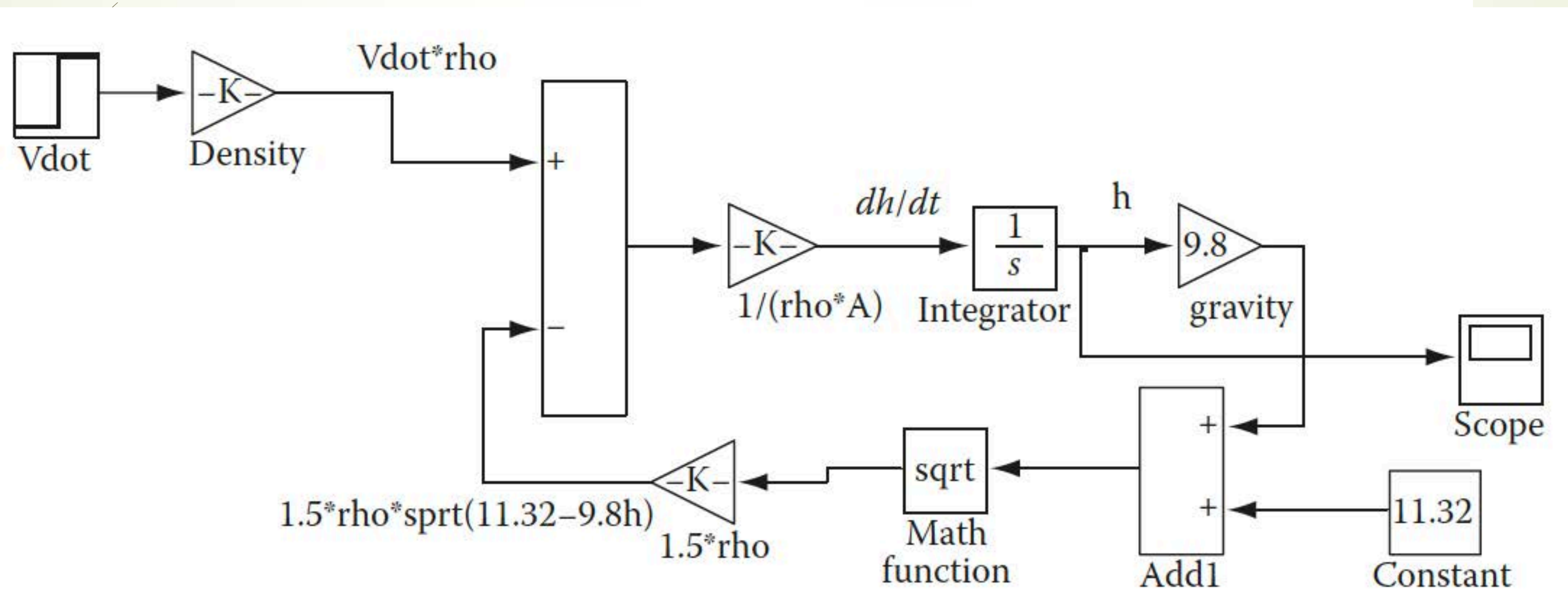

Block
Output
Parameters
f(t)
Ramp
f(t)
S
U0
ts
t
Ramp time ts
Initial value U0
Slope S
f(t)
Uniform random number
Umax
f(t)
Umin
t
Maximum value Umax
Maximum value Umin

Örnek

$$\rho A \frac{dh}{dt} + 1{,}5\rho\sqrt{11{,}32 + 9{,}8h} = \rho f_1 = \rho[10 + 2u(t)]$$

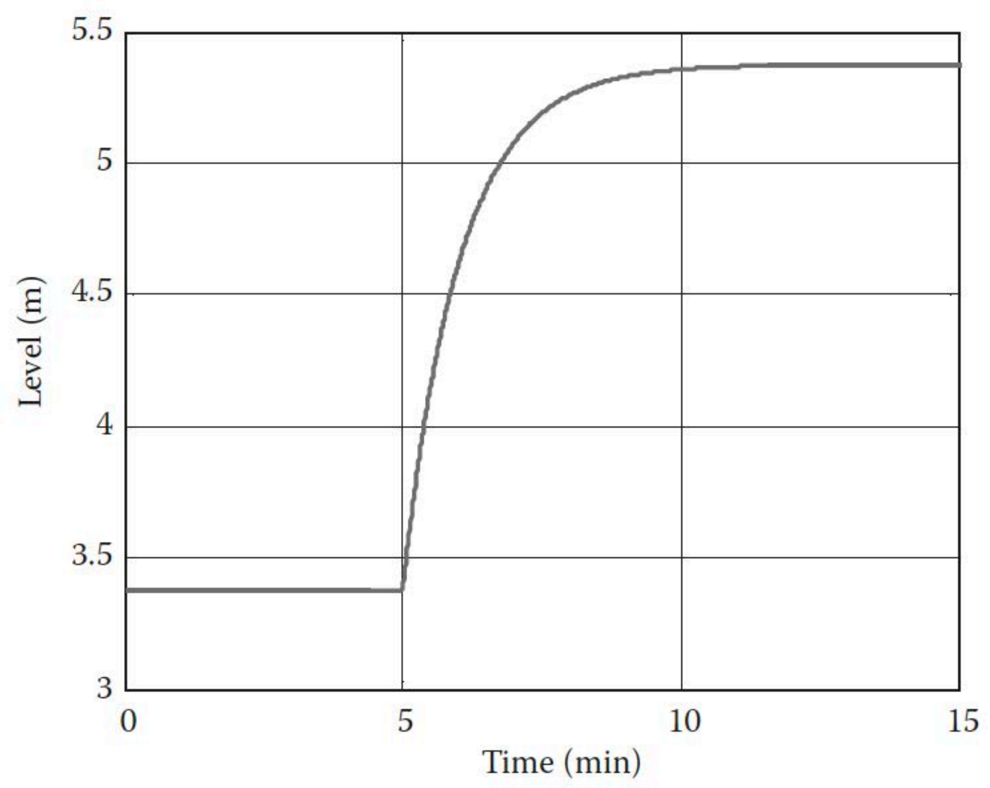
$$\frac{dh}{dt} = \frac{\rho[10+2u(t)] - 1{,}5\rho\sqrt{11{,}32+9{,}8h}}{\rho A}$$



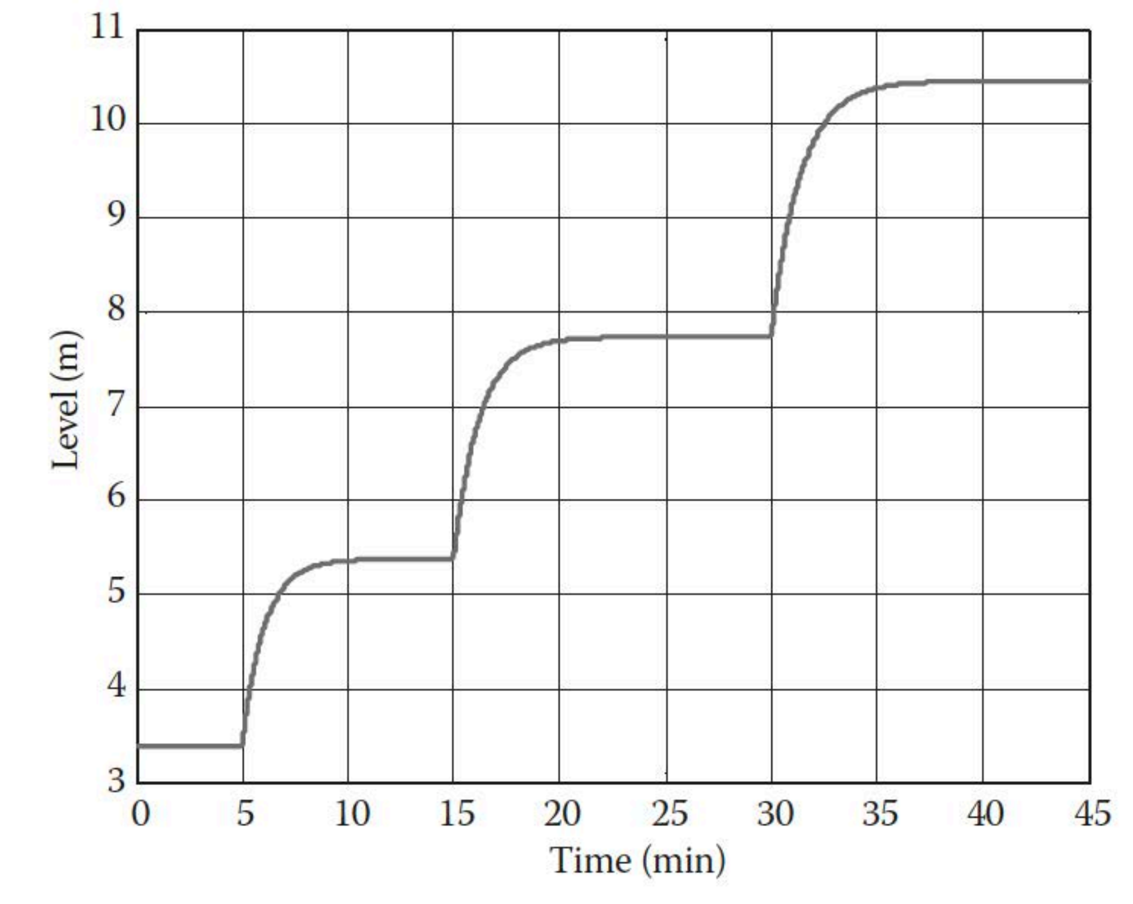


Şekil, zorlayıcı fonksiyona t=5dak. ve t=0 olarak girildiğinde tanktaki seviyenin tepkisini göstermektedir..

Denklem birinci mertebeden bir adi diferansiyel denklemdir. Bu tür bir diferansiyel denklem bir adım değişikliği ile zorlandığında, tepkideki en dik eğim tepkinin başlangıcında gerçekleşir. Şekil bu tepki türünü açıkça göstermektedir.



Giriş akışını 2m^3/dak. değiştirdikten sonra yeni kararlı duruma ulaşıldığında, giriş akışının aynı miktarda 2 m^3/dak. tekrar değiştirildiğini ve yeni bir kararlı duruma tekrar ulaşıldığını varsayalım.



Şekilden kolayca okunmamasına rağmen, seviyedeki ilk değişim 3,38 m'den 5,38 m'ye ya da 2,0 m'lik seviye değişimi; ikinci seviye değişimi 2,36 m; ve üçüncü değişiklik 2,72 m. Yani, giriş akışındaki 2 m^3/dak. değişimin seviye üzerindeki etkisi her zaman aynı değildir; sistemin başlangıç seviyesine veya toplam akışa veya işletme koşullarına bağlı olarak farklılık gösterir. Prosesin bu farklı davranışı, doğrusal olmayan diferansiyel denklemler tarafından tanımlanan sistemlere tipik bir örnektir; bu sistemlere *doğrusal olmayan sistemler* denir. Eğer model doğrusal olsaydı, giriş akışındaki 2 m^3/dak. değişiklikten dolayı seviyedeki tüm değişiklikler aynı olurdu.